# 統計物理学中的量子場论方法

А. А. 阿布里科索夫
Л. П. 戈 尔 可 夫 著
И. Е. 加洛辛斯基

郝 柏 林 譯

科 学 出 版 社

1 9 6 3

А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский

МЕТОДЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ
В СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Физматгиз, Москва, 1962

## 内 容 简 介


量子統計物理学研究处于低温下的多粒子系統。近几年来在这个領域中进展很大，这主要是因为应用了量子場論的数学方法。这些方法的基础——图解法——具有高度的直观性，并且能够使复杂的运算“自动”进行。用这些方法解决了許多从前无法处理的重要物理問題。

本书叙述了这些新方法和最近以来所得的新結果，較多地反映了苏联兰道院士的学派所获得的成果。本书的对象是理論物理、固体物理和低温物理方面的科学工作者，研究生和高年級大学生。


# 統計物理学中的量子場論方法


А. А. 阿布里科索夫
Л. П. 戈 尔 可 夫 著
И. Е. 加洛辛斯基

郝 柏 林 譯



科学出版社出版 (北京朝陽門大街117号)
北京市书刊出版业营业許可証出字第061号

中国科学院印刷厂印刷　新华书店总經售

1963年12月第一版　书号：2835
1963年12月第一次印刷　字数：308,000
(京) 精：1—2,900　开本：850×1168 1/32
平：1—2,800　印张：11 3/4　插页：3

定价：精装本 2.50 元
平装本 2.00 元


# 目　　录

# 譯者說明

本书根据1962年俄文初版譯出．原作者为即将出版的英文譯本作了若干补充与修正，这些修正主要涉及§§16，17，19，21，22和39；特别§21和§22.3.是完全改写了的，§19.6.是新增的．原作者友好地提供了以上諸节的訂正稿，因而这个譯本中得以作了相应訂正，特此志謝．

譯稿承以下同志校閱：霍崇儒（第一章），章思俊（第二、三章），霍裕平（第四章），陈式刚（第五章），陈春先（第六章），于渌（第七章）．謹志謝意．

譯者

1963年8月，北京．

# 序　　言

最近由于广泛应用了量子場論中的方法，統計物理学有相当大的进展．这些方法的优越性，在于微扰論的新表述法，首先是所謂費曼图的广泛应用．图解法的基本优点是它的直观性：运用单粒子問題的概念，这个方法可以确定任意級近似的結构，并借助对应規則写出所需的表达式．新方法解决了大量旧理論无法考虑的問題，还得出了許多新的一般关系，它是目前量子統計中最有力最有成效的方法．

現在，关于量子統計中場論方法的表述，及其对具体問題的应用，杂志文献已浩如烟海．但同时在統計物理工作者中，新方法却还沒有为人所共知．因此我們以为，已經有必要系統和尽可能全面地叙述这些問題，以饗广大讀者．

关于本书取材，我們首先力图显示新方法的实用性．因此书中除了詳細叙述数学工具外，还討論了量子統計的各种具体問題．当然，我們涉及的問題，还远不是近几年来这个領域中新結果的总汇．材料的取舍，决定于它們的物理意义和借以演示一般方法的可能性．

我們只限于量子統計的場論表述的一种方案（例如，书中未提及所謂三維微扰論等等）．照我們看来，本书采用的格林函数方法是最簡便的．

我們假定，讀者知道統計物理学和量子力学的基础．书中叙述了二次量子化方法和推导場論方法所必需的一切知識．在推导場論方法之前，第一章里簡述了关于能譜性質的某些現代概念，并举了一些簡单例子．

书中采用 $\hbar = 1$ 的单位制．温度以能量单位表示（$k = 1$）．

兰道（Л. Д. Ландау）院士和皮达也夫斯基（Питаевский）对本书涉及的問題作过許多宝貴的討論，作者向他們表示感謝．

А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский

МЕТОДЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ
В СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Физматгиз, Москва, 1962

## 内 容 簡 介

量子統計物理学研究处于低温下的多粒子系統．近几年来在这个領域中进展很大，这主要是因为应用了量子場論的数学方法．这些方法的基础——图解法——具有高度的直观性，并且能够使复杂的运算"自动"进行．用这些方法解决了許多从前无法处理的重要物理問題．

本书叙述了这些新方法和最近以来所得的新結果，較多地反映了苏联兰道院士的学派所获得的成果．本书的对象是理論物理、固体物理和低温物理方面的科学工作者，研究生和高年級大学生．

**統計物理学中的量子場論方法**

А. А. 阿布里科索夫
Л. П. 戈 尔 可 夫 著
И. Е. 加洛辛斯基

郝 柏 林 譯

*

科 学 出 版 社 出版（北京朝陽門大街117号）
北京市书刊出版业营业許可証出字第061号

中国科学院印刷厂印刷　新华书店总經售

*

1963年12月第一版　书号：2835
1963年12月第一次印刷　字数：308,000
(京) 精：1—2,900　开本：850×1168 1/32
平：1—2,800　印张：11 3/4　插页：3

定价：精装本 2.50 元
平装本 2.00 元

# 目　　录

# 第一章　多粒子系統在低溫下的一般性質

## §1. 元激发. 液体 $He^4$ 在低溫下的能譜和性質

**1. 引言. 准粒子.** 統計物理研究由大量粒子組成的系統的行为. 液体、气体和固体的宏观性質最終是由組成这些系統的粒子間的微观相互作用决定的. 显然,要解决包括决定每个粒子的行为在內的完整問題,是无法設想的. 但系統的总的宏观特征只由某些平均量决定.

为了确定起見,讓我們討論热力学性質. 系統的宏观状态可以用三个独立的热力学变量决定,例如,可以由給定压力 $P$、溫度 $T$ 和系統內的平均粒子数 $N$ 来决定. 从量子力学观点看,$N$ 个粒子組成的封閉系統由其能級 $E_n$ 描述. 試从系統中分出某个部分,但要使新的子系还能当作是宏观的. 由于这样一个子系中的粒子数还很多,而粒子間的作用力只在原子距离上有效,因此忽略边界效应后,就可以認为子系是封閉的,可用子系中粒子数一定时的能級来描述. 事实上,因为这个子系和原来封閉系統內的其它粒子互相作用着,因而它的能量和粒子数都不是严格确定的,它处于任何一个能級上的几率都是大于零的.

由統計物理中知道(参看[1])[1],热力学公式的微观推导基于所謂吉布斯分布,它給出子系处于能量为 $E_{nN}$、粒子数为 $N$ 的状态的几率:

$$w_{nN} = Z^{-1} e^{-\frac{E_{nN}-\mu N}{T}} \tag{1.1}$$

这个式子里 $T$ 是絕对溫度,$\mu$ 是化学势,而 $Z$ 是由以下条件决定的

---

1) 参閱[79],第92頁. ——譯者注.

归一因子：

$$\sum_{nN} w_{nN} = 1. \tag{1.2}$$

由(1.1)式得

$$Z = \sum_{nN} e^{-\frac{E_{nN}-\mu N}{T}}. \tag{1.3}$$

$Z$ 称为总統計和. 如果能級 $E_{nN}$ 已知,則統計和可以求出. 由此可直接得到热力学函数,因为 $Z$ 和热力学势 $\Omega$(以 $V$、$T$、$\mu$ 为独立变量的势)的关系是

$$\Omega = -T \ln Z. \tag{1.4}$$

理想气体的热力学函数显然很容易用上式算得，因为其能量是个别粒子能量之和. 对于粒子間有相互作用的多粒子系統,通常不可能求得能級. 因此直到目前在量子統計中,只有相互作用充分弱时,才成功地考虑了粒子間的相互作用. 用微扰論計算热力学函数时,实际上只能得到前一二級近似. 对于相互作用并不弱的大多数物理問題,直接利用公式(1.1)—(1.4)是一条不现实的途径.

温度极低时情况比較特殊. 当 $T \to 0$ 时只有距基态比較近的能級（低激发态）才在統計和中起主要作用. 在这个能量范围内,根据一些很普遍的、与粒子間相互作用的数值和特点无关的概念,就可以相当細致地确定系統的能譜.

为了使以后的討論更为清晰,我們以晶格振动激发为例. 只要振动是微弱的,晶格就可以看成耦合簡諧振子的集合. 引入簡正坐标后, 我們得到 $3N$($N$ 是原子数)个本征頻率为 $\omega_i$ 的綫性振子. 按照量子力学,这个系統的能譜由公式 $E = \sum_{i=1}^{3N}\omega_i\left(n_i + \frac{1}{2}\right)$ 給出, 式中 $n_i$ 为任意正整数或零. $n_i$ 的不同取法給出系統的不同能級.

晶格振动可以描写成在晶体內传播的单色平面波的迭加. 每个波有一定的波矢、频率和决定振动类型的标号 $s$. 由于在晶体內可能有各种类型的波传播,頻率 $\omega$ 就不再是波矢 $k$ 的单值函数,而由几个支 $\omega_s(k)$ 合成; 支的总数是 $3r$, $r$ 是每个晶胞內的原子数. 当动量較小时这些支中有三个支(称为声学支)的特点是頻率与波矢呈綫性关系 $\omega_s(k) = u_s(\theta, \varphi)|k|$. 其它各支的曲綫 $\omega_s(k)$ 开始于 $k = 0$ 时的某个不为零的数值, 同时当波矢較小时它与 $k$ 的关系很弱[1].

知道頻譜、能級和晶格原子位移(振子坐标)的矩陣元后,至少在原則上完全可能算得振动晶格的热力学和动力学特征. 然而实际上更为方便的办法, 是利用从量子力学对应原理得出的另一个等价图象,来代替耦合振子图象. 由对应原理知道,每个平面波相当于运动着的"粒子"的集合. 波矢 $k$ 决定这些粒子的动量[2],而頻率 $\omega_s(k)$ 决定它們的能量[3]. 晶格激发态可以設想成这些"粒子"的总合(它們称为声子), 它們在物体体积內自由运动. 这正和前面給出的系統的能級表达式一致, 而后者又和理想气体的能量相似.

数字 $n_i$ 可解释为处于状态 $i(i = (k, s))$ 中的声子数目. 它們可以取任意值. 由此看出,即令組成晶格的原子具有半整数自旋,声子还是服从玻色統計.

在极低温度下低能声子起最主要的作用. 从前面关于頻譜各支的叙述可知,能量最低的声子相当于声学支的动量較小的部分. 这时 $\omega(k)$ 是綫性关系. 仅仅由这一个事实就可以作出許多定性結論,例如晶格比热遵从 $T^3$ 律.

进行定量計算时, 常常用所謂德拜各向同性模型代替实际晶格的頻譜. 这个模型把譜的低頻部分的三个声学支代之以各向同性物体的頻譜, 即能量为 $\omega_l(k) = u_l k$ 的纵声子和能量同为 $\omega_t(k) = u_t k$、但具有两种可能偏振的横声子. 此外还认为声子动

1) 关于晶格振动譜的詳細情况,可参看派尔斯(R. E. Peierls)的书[2].
2) 实际上 $k$ 不是动量,而是"准动量"(見[2]). 但这里这种差别并不重要.
3) 再提醒一次,在我們所取的单位制中 $\hbar = 1$. 这就是說能量的量綱是[秒]$^{-1}$,而动量的量綱是[厘米]$^{-1}$. 为了回到通用的单位,只須将各个能量和动量都乘以 $\hbar$.

量不能超过某个临界值 $k_D$，它决定于保持正确自由度数目的归一条件．显然 $k_D \sim \frac{1}{a}$，$a$ 是原子間距离．这个模型导至著名的固体比热德拜內插公式．以后我們要用这个模型研究金屬內的电子声子相互作用．

如果在振动晶格的位能中計入微小的非简諧項，則前面的能量表达式不再是准确的．具有不同的 $n_i$ 的諸状态間出現一定的跃迁几率． 利用声子概念，这可以解释为声子間的各种互相作用过程，其結果是声子互相散射和产生新的声子．换句話說，在作严格討論时声子只能近似地看成自由运动的粒子．

温度升高，振动幅度增加，非简諧項的作用也随之俱增．在声子图象中，温度上升时声子数目增多，因而声子間作用也益增．因此，声子作为自由运动粒子的这种概念，只适用于温度不太高的范围（远低于熔点）．

現在討論一般情况． 与上面的例子相似，探討系統低激发态能譜图象的基础是假定在一級近似下能級与理想气体能級相应．換言之，就是假定任何一个能級都是若干"准粒子"或元激发的能量之和，它們在物体內运动并具有动量 $\boldsymbol{p}$ 和能量 $\varepsilon(p)$（一般地說，元激发的色散律 $\varepsilon(p)$ 与自由粒子的能量表达式 $\varepsilon_0(p)=\frac{p^2}{2m}$ 不同）．应当立即強調指出，元激发是由于系統內粒子的集体作用而产生的，因此屬于整个系統，而不屬于个別粒子．元激发数目也完全不必等于系統內的粒子总数．

所有能譜可以分为两大类——玻色型譜和費米型譜．在第一种情况下元激发具有整数內禀动量矩（自旋）并服从玻色統計．在第二种情况下元激发具有半整数自旋并遵从費米統計．由量子力学知道，任何系統的动量矩只能作整数改变．由此看出，玻色激发可以单个地出現与消失，而費米激发必須成对．

前面关于晶格振动的例子中已指出，元激发的統計不必与組成系統的粒子的統計一致． 显而易見的只是，玻色系統不能具有半整数自旋的激发．

元激发并不对应于系統的准确稳定态，而是大量能量差別很小的准确稳定态的迭加（波包）．因此系統有一定几率从一个态跃迁到另一个态，这就使波包扩散，元激发衰減．所以只有当波包的能量寬度（它决定衰減）比能量本身小得多时，用元激发来描述系統才是合理的．

波包的扩散和与之相关的元激发衰減可以視为"准粒子"互相作用的結果．这时能量和动量守恆律是成立的．这些过程可以分为一个元激发"裂变"为几个另外的元激发的过程，以及元激发彼此間的"散射"过程．

以后我們将看到，只有能量相当大时才会产生元激发的裂变．而散射过程仅在元激发数目足够多时才成为重要的． 由此可見，在低温下，当为数极少的低能元激发起主要作用时，这两类使元激发衰減的过程都是无足輕重的． 低温下元激发間的作用弱，于是可以将它們看作"准粒子"的理想气体．

現在，基于实驗数据和直接的理論計算，可以认为上述关于能譜結构的概念已是非常确定的事实． 当然各种物理对象（例如液态氦的同位素 $He^3$ 和 $He^4$，金屬，电介質等）的能譜也是完全不同的．$He^4$ 的能譜是玻色型，而 $He^3$ 和金屬电子[1]的能譜却屬于費米型．

**2. 玻色液体的能譜**[2]． 具有玻色型能譜的系統的例子之一，是所謂玻色液体，即由自旋为整数的原子构成的液体． 在自然界中只存在着一种这样的液体——液体氦（更确切地講，是同位素 $He^4$），它在絕对温度零度也不凝固． 由于氦原子 $He^4$ 的自旋为零，我們实际上只須討論自旋为零的一种情形．

动量数值很小时，玻色液体元激发能量与动量的关系可以借

---

1）为了避免誤解，我們必須說明，以后各处討論的都是各向同性的金屬模型，这与实际情况当然相距很远．实际金屬的电子能譜是显著各向异性的，因此本书中所述的許多結果对于它們只有定性意义．

2）以下所述关于玻色液体能譜的观念是由兰道首先提出来的[1,11]．

助一些相当一般的想法来决定．小动量的范围相当于液体的长波振动．而这种振动正是普通声波．由此立刻得到結論：小动量的元激发就是声量子——声子，其能量与动量的关系是熟知的． 实际上注意到声波頻率 $\omega$ 与波矢的关系 $\omega = uk$，其中 $u$ 是声速，我們立即得到所需的关系式

$$\varepsilon = up \tag{1.5}$$

这样，动量很小时玻色液体激发能与动量呈綫性关系，比例系数就是声速．

动量增大后，$\varepsilon(p)$ 不再是綫性关系，曲綫 $\varepsilon(p)$ 的形状已不能如此簡单地确定．因此，下面引述的討論很有意义，它可以使我們对任意动量得到一系列关于 $\varepsilon(p)$ 的結論[1]．

液体能量是它的密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ 和流体力学速度 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ 的泛函：

$$E(\rho, \boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\int \rho v^2 d\boldsymbol{r} + E^{(1)}(\rho), \tag{1.6}$$

式中 $E^{(1)}$ 是与速度无关的那部分能量．註我們討論微振动．这时 $\rho(\boldsymbol{r}) = \bar{\rho} + \delta\rho(\boldsymbol{r})$，其中 $\bar{\rho}$ 为与坐标无关的平衡密度，而 $\delta\rho(\boldsymbol{r})$ 和 $\boldsymbol{v}$ 是描述振动的微小量．注意到，由定义得

$$\bar{\rho} = \frac{1}{V}\int \rho(\boldsymbol{r}) d\boldsymbol{r}, \quad \int \delta\rho d\boldsymbol{r} = 0.$$

准确到 $\delta\rho$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的二級无穷小量，(1.6) 式右端第一項中的函数 $\rho(\boldsymbol{r})$ 可换成平均值 $\bar{\rho}$． 以同样的准确度可以把 $E^{(1)}$ 写成如下形状：

$$E^{(1)}(\rho) = E^{(1)}(\bar{\rho}) + \int \psi(\boldsymbol{r})\delta\rho d\boldsymbol{r} + \frac{1}{2}\iint \varphi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\delta\rho(\boldsymbol{r})\delta\rho(\boldsymbol{r}') d\boldsymbol{r} d\boldsymbol{r}'.$$

函数 $\psi(\boldsymbol{r})$ 和 $\varphi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ 仅仅由未受振动扰动的各向同性的均匀液体的性質决定，因此函数 $\psi(\boldsymbol{r})$ 应当是常数：$\psi(\boldsymbol{r})$＝常数＝$\psi$，而 $\varphi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ 只与 $|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|$ 有关：$\varphi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \varphi(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|)$．所以 $E^{(1)}$ 展开式中的一次項正比于 $\int \delta\rho(\boldsymbol{r}) dV \equiv 0$．最終有

$$E = E^{(1)}(\bar{\rho}) + \frac{\bar{\rho}}{2}\int v^2 d\boldsymbol{r} + \frac{1}{2}\iint \varphi(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|)\delta\rho(\boldsymbol{r})\delta\rho(\boldsymbol{r}') d\boldsymbol{r} d\boldsymbol{r}'.$$

速度 $\boldsymbol{v}$ 和密度振蕩的关系由連續性方程式給出

$$\dot{\rho} + \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v}) = 0,$$

如果准确到 $\delta\rho$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的一次項，此式可写为

$$\dot{\rho} + \bar{\rho}\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0 \tag{1.7}$$

变换到傅立叶表示：

$$\delta\rho(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{p}} \rho_{\boldsymbol{p}} e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}}, \quad \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{p}} e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}},$$

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{p}} \varphi_{\boldsymbol{p}} e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}},$$

并且考虑到液体微振动总是縱向的，即波矢为 $\boldsymbol{p}$ 的波中速度 $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{p}}$ 总平行于 $\boldsymbol{p}$：

$$\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{p}} = a_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{p}.$$

现在由(1.7)式容易求出

$$\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{p}} = i\frac{\dot{\rho}_{\boldsymbol{p}}}{\bar{\rho}} \cdot \frac{\boldsymbol{p}}{p^2}$$

以及

$$E = E^{(1)}(\bar{\rho}) + \frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{p}} \left(\frac{|\dot{\rho}_{\boldsymbol{p}}|^2}{2\bar{\rho}p^2} + \frac{1}{2}\varphi_{\boldsymbol{p}}|\rho_{\boldsymbol{p}}|^2\right). \tag{1.8}$$

(1.8)式中第一項是未扰动液体的能量，而第二項分解为許多項之和，其中每一項就正是頻率为 $\omega_{\boldsymbol{p}}$ 的簡諧振子的能量

$$\omega_{\boldsymbol{p}}^2 = \bar{\rho}p^2\varphi_{\boldsymbol{p}}. \tag{1.9}$$

这样，我們看到液体的任何振动都分解成元振动——由簡諧振子方程描述的元激发．

在量子情况下每个这种振子的能量由下式表示

$$\varepsilon_{\boldsymbol{p}} = \omega_{\boldsymbol{p}}\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2\cdots$$

这样得到的系統的能譜結构完全相当于前面描述过的元激发图象． 系統的能譜是不同数量元激发的能量之和；元激发能量 $\varepsilon(\boldsymbol{p})$ 与动量的关系由(1.9)式和显而易見的关系 $\varepsilon(\boldsymbol{p}) = \omega_{\boldsymbol{p}}$ 决定．

1) 下述推导是 Л. П. Питаевский 首先給出的[5]．

为了彻底地将問題解决，我們还必須把 $\varphi_p$ 通过系統的特征量表示出来. 为此必須注意到，量子情况下系統的基态能量并不等于 $E^{(1)}(\rho)$，这是与經典情况不同的，其原因在于这时必須考虑振子的所謂零振动能量. 后者对一个振子等于 $\omega_p/2$. 这样，玻色液体的基态能量等于

$$E_0 = E^{(1)}(\rho) + \sum_p \frac{\omega_p}{2},$$

其中(見(1.8)式)

$$V\frac{\omega_p}{2} = \frac{1}{2\bar{\rho}p^2}\overline{|\dot{\rho}_p|^2} + \frac{1}{2}\varphi_p\overline{|\rho_p|^2} = \varphi_p\overline{|\rho_p|^2} \tag{1.10}$$

从(1.9)和(1.10)我們立刻得到[1]：

$$\varepsilon(p) = \omega_p = \frac{p^2}{2mS(p)}, \tag{1.11}$$

这里 $S(p) = \frac{\overline{|\rho_p|^2}}{Vm\bar{\rho}}$ 是所謂密度关联函数

$$S(r - r') = \frac{\overline{[n(r) - \bar{n}][n(r') - \bar{n}]}}{\bar{n}} \tag{1.12}$$

的傅立叶分量，而 $n(r) = \frac{\rho(r)}{m}$ 是单位体积内的粒子数.

虽然 $S(p)$ 并不能算出来，从(1.11)式还是可以作出許多关于 $\varepsilon(p)$ 形状的重要結論. 另一方面，知道 $\varepsilon(p)$ 的某些性质后，可以判断函数 $S(p)$ 的行为，而后者正好决定液体和各种粒子(中子等，見后面第三章 §17)的相互作用过程.

前面已經提到，动量較小时元激发能量与动量呈綫性关系：$\varepsilon \approx up$. 由此看出，$S(p)$ 也与动量呈綫性关系 $S \approx \frac{p}{2mu}$.

当距离很近，或者說动量很大时，函数 $S(p)$ 具有已知的(見[1]§114)形式

$$S(r) = \delta(r) + \nu(r) \tag{1.13}$$

1) 公式(1.11)是費曼[6]用另一种方法首先推得的. 我們觉得，他所用的方法复杂得多，但并不比上述方法具备更大的普遍性.



其中 $\nu(r)$ 当 $r \to 0$ 时沒有奇异性. 写成傅立叶分量就得

$$S(p) = 1 + \nu(p),$$

当 $p \to \infty$ 时，$\nu(p) \to 0$. 于是动量很大时 $S(p)$ 趋向 1，而

$$\varepsilon(p) \approx \frac{p^2}{2m},$$

也就是元激发能量和液体的自由原子($He^4$ 原子)能量一样.

对于动量的中間数值，函数 $S(p)$ 可能随着 $p$ 的增加而单調地由零上升到 1，也可能在 $p \sim \frac{1}{a}$ 附近通过极大值，这里 $a$ 是原子間距离（这是考虑量綱而得出来的，因为在液体問題中唯一具有长度量綱的参量是原子間距离）. 后一情况下元激发能譜的形状可能如图 1 所示. 兰道[3,4]首先假設液体 $He^4$ 的激发譜在 $p \sim \frac{1}{a}$ 附近有极小值.

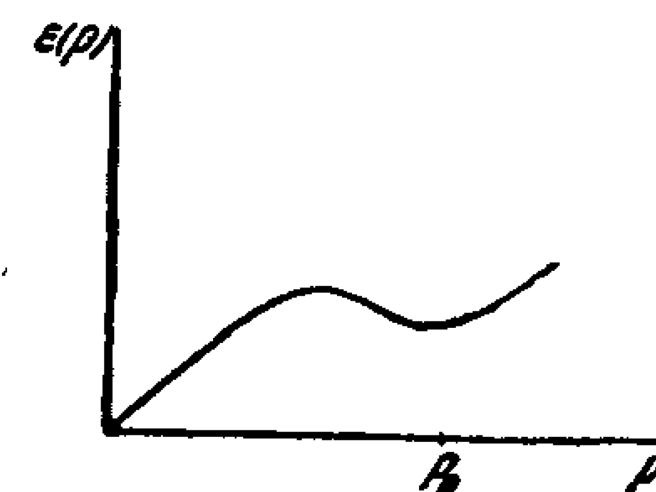


图 1

应当指出，上面給出的 (1.11) 式的推导基于流体力学近似，这时液体被看成連續介质. 当数量級为原子間距的距离或数量級为 $\frac{1}{a}$ 的动量起重要作用时，这种近似就不对了. 由于 (1.11) 式对于小动量是成立的，所以它应当看作是从小动量范围到极大动量范围的內插公式；动量极大时，粒子实际上是自由的，这时元激发和粒子一致，具有能量 $p^2/2m$.

液体 $He^4$ 元激发能譜的細节，自然不能从計算得出. 最近借助中子在液体 $He^4$ 中的散射实驗[7]，求得了最准确的 $\varepsilon(p)$ 曲綫.

知道了能譜，就可以算出液体 $He^4$ 的热力学函数（更确切些說，是算出它們在給定温度时的值与 $T = 0$ 时的值之差）. 这时随着 $T$ 的数值不同，能譜中起最大作用的部分也不同(見图 1).

在最低温范围内，只有能譜的小动量部分，即声子部分最重要. 温度較高时，$\varepsilon(p)$ 极小值 ($p = p_0$) 附近的激发变成最重要

的．将能量 $\varepsilon$ 按 $p-p_0$ 展开就得到[1]:

$$\varepsilon(p)=\Delta+\frac{1}{2m^*}(p-p_0)^2. \qquad (1.14)$$

能譜这一部分的元激发称为“旋子”(ротон).

一切热力学量都是“声子”部分和“旋子”部分的和．为了求得热力学势，只須將(1.1)和(1.14)式代入下式(見[1]，§53)

$$\Omega=VT\int\ln\left(1-e^{\frac{\mu-\varepsilon(p)}{T}}\right)\frac{dp}{(2\pi)^3}. \qquad (1.15)$$

这时还应当注意到以下情况．首先，元激发数目并未給定，它要从平衡条件，即自由能对粒子数目变化为极小值，确定；这就給出

$$\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{V,T}=\mu=0 \quad (F=\Omega+\mu N) \qquad (1.16)$$

当 $\mu=0$ 时热力学势 $\Omega$ 和自由能 $F$ 重合．其次，由于旋子能量总是大于問題中所能涉及的温度，它們的玻色分布可以代之以玻尔茲曼分布．这是因为当 $T\ll\varepsilon_{por}$ 时，可在計算(1.15)式的积分时將 $\ln(1-e^{-\varepsilon_{por}/T})$ 按小量 $e^{-\varepsilon_{por}/T}$ 展开而取第一項．这样就得到玻尔茲曼公式

$$F_{por}=-VT\int e^{-\frac{\varepsilon_{por}}{T}}\frac{dp}{(2\pi)^3}.$$

考虑以上两点，就可以算得：

$$F_\Phi=-V\frac{\pi^2T^4}{90u^3},$$
$$F_{por}=-V\frac{2m^{*1/2}T^{3/2}p_0^2}{(2\pi)^{3/2}}e^{-\frac{\Delta}{T}}. \qquad (1.17)$$

从此不难求得其它热力学量．

**2. 超流．** 玻色液体最有趣的性質是“超流”，即无摩擦地通过毛細管的本領．兰道[3]証明了，从他所建議的元激发能譜形状，可以得出这种性質．

設玻色液体在絕对零度下以速度 $\boldsymbol{v}$ 流过毛細管．在和液体相联系的坐标系中，液体是靜止的，而毛細管以速度 $-\boldsymbol{v}$ 运动．由于管壁和液体之間的摩擦，液体漸被管壁帶动．这就是説，液体的能量和动量不复为零．只有在液体中出現了元激发时，才可能发生这种情况．当出現了一个这种元激发后，液体就获得了动量 $\boldsymbol{p}$ 和能量 $\varepsilon(\boldsymbol{p})$．現在再回到与毛細管相連的坐标系中．液体在这个坐标系中的能量是

$$\varepsilon+\boldsymbol{pv}+\frac{Mv^2}{2}.$$

这样，元激发的出現使液体能量改变了 $\varepsilon+\boldsymbol{pv}$．只有这个变化是負数时，元激发才可能出現，于是

$$\varepsilon+\boldsymbol{pv}<0.$$

当 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 方向相反时，这个量取最小值．因此至少須有 $\varepsilon-pv<0$，即 $v>\frac{\varepsilon}{p}$．我們于是得到了要使液体中能产生元激发，其速度所必須滿足的条件

$$v>\left(\frac{\varepsilon}{p}\right)_{\min}. \qquad (1.18)$$

在曲綫 $\varepsilon(p)$ 上 $\frac{\varepsilon}{p}$ 最小的点是

$$\frac{d\varepsilon}{dp}=\frac{\varepsilon}{p}, \qquad (1.19)$$

即从坐标原点所引直綫与曲綫 $\varepsilon(p)$ 相切之处．

这样，仅当液体速度小于滿足条件(1.19)式諸点的元激发速度时，才能出現超流(注意 $\frac{d\varepsilon}{dp}$ 是元激发速度)．

对于任何玻色液体都至少有一个点滿足条件(1.19)．这就是坐标原点 $p=0$．$p$ 接近零时，元激发以声速运动，因此液体流速超过声速 $u$ 时，超流条件显然被破坏了．

液体 $He^4$ 的能譜中还有一个危险点．从图 1 所示曲綫看出，

1) 对于 $He^4$，公式內各常數的值是[7]：
$\Delta=11.4\cdot10^{11}$ 秒$^{-1}$，$P_0=1.92\cdot10^8$ (厘米)$^{-1}$，$m^*=0.16m_{He^4}$.

它位于旋子极小値右面. 利用(1.14)容易得出,超流流速应满足不等式

$$v < \frac{1}{m^*}(\sqrt{p_0^2 + 2m^*\Delta} - p_0),$$

或者,考虑到諸常数的数值(从它們可以看出 $p_0^2 \gg 2m^*\Delta$)

$$v < \frac{\Delta}{p_0}.$$

我們得到了最終結論:当流速超过 $\frac{\Delta}{p_0}$ 时,液体 $He^4$ 内的运动显然已不是超流.

温度高于零度时,玻色液体內出现元激发. 不难看出,上述关于液体流动时能否有新元激发出現的討論,并不因之改变. 有意义的是探討已經存在的元激发,对液体的运动有何影响.

为此我們設想,"元激发气体"以某种宏观速度 $v$ 在液体中运动. 分布函数可以从靜止气体的分布函数作代换 $\varepsilon \to \varepsilon - pv$ 而求得. 单位体积气体的动量由积分給出:

$$P = \int p n(\varepsilon - pv) \frac{dp}{(2\pi)^3}. \tag{1.20}$$

对于小速度 $n(\varepsilon - pv)$ 可以按 $pv$ 展开. 結果得到

$$P = -\int p(pv)\frac{\partial n}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{dp}{(2\pi)^3} = -\frac{v}{3}\int p^2 \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{dp}{(2\pi)^3}. \tag{1.21}$$

从(1.21)式看出,运动着的元激发气体的动量 $P$ 正比于运动速度 $v$. $P$ 与 $v$ 的比例系数显然就是运动物体的质量. 这样我們就看出,元激发气体相对于液体的运动伴随着质量轉移. 个别元激发当然可以与器壁作用,产生散射. 元激发气体在散射时和器壁交換动量. 这就是說,元激发气体的运动是粘滞的. 旣然,如前面已經看到的,元激发气体运动时有质量轉移,我們作出如下結論:在已經有元激发存在的玻色液体中可以发生粘滞流动,其速度并不破坏超流条件(1.18). 重要的是,粘滞流动所轉移的质量,决不等于整个液体的质量;它由关系式(1.21)决定,与元激发数目有关(例如,$T = 0$ 时 $P = 0$).



現在已經可以討論流速不破坏超流条件时,玻色液体运动的一般图象了.

从絕对零度开始討論. 如果液体在初始时刻处于基态,即沒有元激发存在,那么,它們以后也无从产生,运动始終是超流.

当 $T \neq 0$ 时运动图象有实质改变. 現在液体中存在着元激发,其数目由相应的統計公式决定. 虽然新的元激发不能产生,但是如前所述,沒有任何因素会妨碍已經存在着的元激发和器壁碰撞,和后者交換动量. 与公式(1.21)相应,只有一部分液体质量参与这个粘性流动. 另一部分液体质量还照常流动,即不与器壁摩擦,也不与产生粘流的那部分液体摩擦. 这样,$T \neq 0$ 时的玻色液体好象是两种液体——"超流的"和"正常的"——的混合物,它們互不摩擦地运动.

实际上当然不发生这种分割,液体中仅仅存在着两种运动,每种运动有自己的有效质量或有效密度. "正常"密度就是单位体积运动着的元激发气体动量与其速度的比例系数. 在(1.21)式中先后代入玻色分布和玻尔兹曼分布(前者 $\varepsilon = up$,后者 $\varepsilon$ 由(1.14)式給出)可以求出正常密度的声子和旋子部分:

$$\rho_{n\Phi} = \frac{2\pi^2 T^4}{45u^5},$$

$$\rho_{np} = \frac{2m^{*1/2}p_0^4 e^{-\frac{\Delta}{T}}}{3(2\pi)^{3/2}T^{1/2}}. \tag{1.22}$$

剩下的那部分液体密度对应于超流运动. 这样就有

$$\rho = \rho_n + \rho_s. \tag{1.23}$$

元激发气体的宏观速度記作 $v_n$. 超流液体速度記作 $v_s$. 后一速度有一重要性质. 如果将玻色液体放入圓筒內并使圓筒繞軸轉动,正常部分将被筒壁带动而开始与之俱轉. 相反,超流部分仍然靜止. 也就是說,无法使超流部分轉动. 換言之,超流部分的运动总是位流. 其数学表示是

$$\text{rot}\, v_s = 0. \tag{1.24}$$

对于元激发說来，液体超流部分的运动起着外界条件的作用．应当指出，前面講到的函数 $\varepsilon(p)$ 的形状，正是在与超流部分相联系的坐标系中才是那样．在靜止坐标系中显然有

$$\varepsilon' = \varepsilon(p) + p v_s, \tag{1.25}$$

式中 $p$ 是在与超流液体相連的坐标系中的动量．

在为元激发写輸运方程式时，就必須考虑这一点． 因而輸运方程式的形状是

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial r}\frac{\partial \varepsilon'}{\partial p} - \frac{\partial n}{\partial p}\cdot\frac{\partial \varepsilon'}{\partial r} = I(n), \tag{1.26}$$

这里 $I(n)$ 是碰撞积分．

玻色液体中存在着两种速度不同的运动，这就导致了十分奇特的流体力学．流体力学方程可以从輸运方程式(1.26)求得． 这里不打算引述的这个推导是 И. М. Халатников 完成的，并叙述在他的总結論文[8]里1)．

玻色液体的双速度流体力学与普通流体力学差别很大． 例如，在玻色液体中可以产生两种不同类型的振动，其传播速度也不一样．

第一种振动是普通声波，或称第一声． 在这种声波中液体作为整体运动；正常和超流部分并不分开． 第一声的传播速度等于 $u$．第二种振动——所謂第二声的传播速度是

$$u_2 = \sqrt{\frac{\rho_s T S^2}{\rho_n \rho C}}, \tag{1.27}$$

其中 $C$ 和 $S$ 是单位体积的比热和熵．在这种波里正常部分和超流部分作位相相反的振动，同时液体的总通量 $j = \rho_n v_n + \rho_s v_s \approx 0$．

我們不准备更詳細地討論有关超流液体的流体力学問題．在許多专門論文中研究了液体氦中声的传播，元激发的相互作用以及因之而生的各种耗散过程(粘滞性、热传导等)，其結果在 Е. М. Лифшиц[9] 和 И. М. Халатников[8] 的总結文章中有詳細叙述，

1) 适用于速度不十分高时的超流 $He^4$ 的流体力学方程是朗道首先得到的[1]．



讀者可以参閱．

現在我們轉而討論温度更高时玻色液体的特性，这时元激发数目增多了．元激发之間的相互作用已經不能省略，它們不能再看作自由粒子組成的气体． 因此，对气体模型算出的热力学量的(1.17)式也就失去意义． 决定正常密度的(1.22)式也不复成立．然而关于玻色液体內有效密度不同的两种运动的概念，却与前面所討論的元激发图象沒有直接联系，可以認为它还适用于比較高的温度．流体力学方程实际上只是守恆定律的結果，并可从后者导出(参看[8])，因而也还成立． 随着温度升高，正常密度 $\rho_n$ 也不断增大，一直达到和 $\rho$ 相等． 在这一温度下氦发生相变(所謂 $\lambda$ 点)． 相变点下可能有超流，相变点上不可能超流，玻色液体的流体力学也就与普通液体无异．

从 $\rho_n \neq \rho$ 到 $\rho_n = \rho$ 的过渡，原則上可以是連續的，也可以是跃变的． 实驗表明，氦的相变是二級相变，不吸收或放出潜热(見[10]，§130)．由此得知，正常密度 $\rho_n$ 随温度連續增加，最后在相变点达到 $\rho$ 值．

温度远高于 $\lambda$ 点时，氦不具有任何异于普通液体的特性． 但在 $\lambda$ 点附近却有理由看到許多本質上新的性質．系統的各种特征量，首先是热力学函数在二級相变点附近的行为，是現在尚未解决的問題，这是凝聚介質的物理中最有意义的課題之一．

## §2. 費米液体

**1. 費米液体中的激发．** 討論由遵从費米統計的相互作用粒子組成的系統． 我們只限于自旋为 1/2 的情况，因为实际上能涉及到的也仅是液体氦 $He^3$，金属中的电子或者核物質．自旋为 1/2 的有相互作用的費米粒子的系統我們将称为費米液体．

費米液体低激发态的理論是由朗道[11,12]建立的．这个理論的基础，是假定費米液体的激发譜可以按理想費米气体能譜同样原則构成．因此在开始討論費米液体之前，有必要把已知的費米气体激发态图象和元激发概念联系起来．

$T=0$ 时理想費米气体处于基态，大家熟知，这时粒子占据了全部动量小于某个边界值 $p_0$ 的量子态，而全部动量更大的态是空着的. 在动量空間里被占滿的态形成半径为 $p_0$ 的球，它称作費米球. 决定 $p_0$ 的条件是：$p<p_0$ 的状态数应等于粒子数

$$p_0=\left(\frac{3\pi^2N}{V}\right)^{1/3}, \tag{2.1}$$

这里 $N/V$ 是粒子密度.

激发态粒子按动量的分布就与上面不同了. 不难看出，可以逐个将粒子从費米球内移到球外面构成各种激发态. 每个这种元作用所构成的态与原来状态的差别在于：$p>p_0$ 的状态中多了一个粒子，而 $p<p_0$ 的状态中多了一个"空穴". 这些 $p>p_0$ 的粒子和 $p<p_0$ 的空穴显然也就起着理想費米气体元激发的作用. 它們具有自旋 1/2，只能成对地出現或消失，对于低激发态它們的动量值在 $p_0$ 附近. 这些元激发的能量最好从費米能級（卽 $p_0^2/2m$）算起. 这时粒子型激发的能量从費米能級向上算，而空穴能量向下算（卽粒子能量是 $\varepsilon=\frac{p^2}{2m}-\frac{p_0^2}{2m}\approx v(p-p_0)$，$v=\frac{p_0}{m}$，而空穴能量等于 $-\varepsilon=\frac{p_0^2}{2m}-\frac{p^2}{2m}\approx v(p_0-p)$）.

兰道的理論假定費米液体的低激发态与費米气体的低激发态极为相似. 它也能借助自旋为 1/2、动量在 $p_0$ 附近的元激发的集合来描述. 兰道理論中的实质性假定是：$p_0$ 的数值与液体粒子密度的关系也由同一(2.1)式給出，卽与理想气体一致（这个論断的証明見本书第四章）. 和气体一样、液体内的元激发也分两类——动量大于 $p_0$ 的"粒子"和动量小于 $p_0$ 的"空穴"，它們只能成对地出現与消失. 由此可見，"粒子"数必定等于"空穴"数.

尽管費米液体和理想費米气体的元激发十分相似，二者之間还有重要差別，它来自液体内元激发的相互作用. 这种相互作用的最明显的表現是存在着超流的（或超导的，如果所討論的是金属内的电子）費米液体. 不难看出，上述的費米气体的元激发譜并不导致超流. 事实上，为了使費米气体激发，卽形成 $p>p_0$ 的"粒



子"和 $p<p_0$ 的"空穴"，只需要任意小的能量. 同时这个粒子空穴对的总动量却达到 $2p_0$. 因此 $\left(\frac{\varepsilon}{p}\right)_{\min}=0$，从公式(1.18)看出临界速度为零，故不存在超流. 出現超流是因为准粒子間一定类型的相互作用使能譜根本改变. 原来这种費米液体的激发能不得小于一定数值. 在这种情况下，通常說，元激发譜中存在着能隙.

我們暂不研究超流費米液体（这将在第七章中詳加論述），先轉而探討正常費米系統元激发的性质.

元激发間的相互作用，使得元激发概念本身只在边界动量 $p_0$ 附近才有意义. 前面已經指出过，只有元激发衰減远小于本身能量时，才能使用这个概念. 衰減的数值或者取决于一个元激发分成几个的裂变过程，或者决定于它們之間的碰撞. 如果激发能远高于液体温度，则以裂变过程为主，衰減数值正比于裂变几率. 考虑到能量与动量守恆，以及"粒子"和"空穴"数目相等，不难看出裂变几率正比于 $(p-p_0)^2$ [1]. 另一方面，激发能正比于 $(p-p_0)$. 由此清楚看出，仅仅对于动量在 $p_0$ 附近的元激发衰減才是較小的.

如果討論温度大于零时的平衡費米液体，则"粒子"和"空穴"的平均能的数量級为 $T$. 由于元激发遵从費米統計，其数目也和 $T$ 正比. 不难看出，对于这种元激发裂变几率和散射几率是同数量

---

1) 最好利用与費米气体的相似性估計几率. 討論下述过程：动量为 $p_1(p_1>p_0)$ 的粒子和費米球内动量为 $p_2(p_2<p_0)$ 的粒子作用. 結果得到两个粒子，其动量为 $p_3$ 和 $p_4=p_1+p_2-p_3$；$p_3, p_4>p_0$. 这样，动量为 $p_1$ 的粒子"裂变"成动量为 $p_3$ 和 $p_4$ 的两个粒子以及动量为 $p_2$ 的空穴. 这一过程的总几率正比于

$$\int\delta(\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4)d\mathbf{p}_2d\mathbf{p}_3$$

$$p_2<p_0,\ p_3>p_0,\ p_4=|\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_3|>p_0.$$

不难看出，当 $p_1-p_0\ll p_0$ 时，矢量 $\mathbf{p}_2$ 和 $\mathbf{p}_3$ 的模的变化范围是

$$p_0<p_3<p_1+p_2-p_0,\ 2p_0-p_1<p_2<p_0$$

$\mathbf{p}_1$ 与 $\mathbf{p}_2$ 之間的夹角可以任意. $\mathbf{p}_3$ 与 $\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2$ 的夹角由能量守恆条件决定，对这个角度积分就取消了 $\delta$-函数. 剩下的积分对 $dp_2dp_3$ 在 $p_2\approx p_3\approx p_0$ 附近取，就得到因子 $(p_1-p_0)^2$.

级的，二者都正比于 $T^2$[1]. 由此可知，只有在足够低的温度下才能用元激发描述費米液体.

利用一个基于和费米气体相似性的模型，可以使费米液体能譜的性質显得更直观些. 試設想液体基态相当于准粒子的集合，它們填滿了边界动量为 $p_0$ 的費米球. 关系式(2.1)可以解釋为准粒子数目等于液体粒子数. 这个模型中的元激发完全和“粒子”与“空穴”的說法一致. “粒子”和“空穴”数相等在这个模型中就表現为准粒子数守恆. 如果引入准粒子分布函数 $n(p)$，则它的变化应满足条件

$$\int \delta n d\boldsymbol{p} = 0. \tag{2.2}$$

这里描述的气体模型对进一步研究費米液体的性質也是頗为方便的. 但是必須記住，准粒子概念本身仅仅在費米球面附近才有意义. 因此，当远离費米面的准粒子有重要作用时，从气体模型得到的一切性質都不适用于实际費米液体.

**2. 准粒子能量.** 除了上述关于元激发性質的假定，兰道理論还根据另一条关于准粒子相互作用性質的假定. 这就是假定此种相互作用可以借助于来自周围准粒子的作用在給定准粒子上的自洽場描述.

这时系統的能量已不等于个别准粒子能量的总和，而成为它們的分布函数的泛函. 个别准粒子的能量自然要定义作总能量对分布函数的变分导数：

$$\delta E = 2\int \varepsilon \delta n \frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} V \tag{2.3}$$

(因子 2 来自对自旋投影的求和).

从这个式子看出，$\varepsilon$ 正是增加一个动量为 $\boldsymbol{p}$ 的准粒子所引起

1) 对于近乎理想的費米气体，这两个过程实質上是同一現象，相应的几率正比于

$$\int \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4) n(\varepsilon_2)(1 - n(\varepsilon_3))(1 - n(\varepsilon_4)) d\boldsymbol{p}_2 d\boldsymbol{p}_3.$$

形式上可以認为 $|\boldsymbol{p}_2| > p_0$ 相当散射，而 $|\boldsymbol{p}_2| < p_0$ 相当裂变. 当 $\varepsilon_1 - \mu \sim T$ 时，两种情况下积分都正比于 $T^2$.



的系統的能量变化[1].

在(2.2)和(2.3)式中假設了准粒子的分布是空間均匀的. 实际上这条限制归結为：空間不均匀只能在远大于准粒子波长的距离上出現. 旣然我們只討論費米能級附近的元激发，其动量很接近 $p_0$，則相应的波长数量級为原子間距离. 这样，空間均匀的要求实际上未带来任何限制.

有磁場存在时，以及对于鉄磁系統，分布函数应当看成作用于自旋角标的算符(密度矩陣)——$n_{\alpha\beta}$. 和 $n_{\alpha\beta}$ 一样，准粒子能量也成为算符 $\varepsilon_{\alpha\beta}$. 当沒有磁場，而且系統为非鉄磁的，算符 $n_{\alpha\beta}$ 和 $\varepsilon_{\alpha\beta}$ 都正比于单位矩陣. 因此在一般情形下公式(2.3)应当写成

$$\delta\left(\frac{E}{V}\right) = \sum_{\alpha,\beta} \int \varepsilon_{\alpha\beta} \delta n_{\beta\alpha} \frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}.$$

这个表达式最好縮写为

$$\delta\left(\frac{E}{V}\right) = \mathrm{Sp}_\sigma \int \varepsilon \delta n \frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}, \tag{2.4}$$

这时只須将 $\varepsilon$ 和 $n$ 理解为相应的矩陣；符号 $\mathrm{Sp}_\sigma$ 和通常一样，表示矩陣 $\varepsilon$ 和 $\delta n$ 乘积的对角元之和.

(2.4)式所定义的准粒子能量，使得平衡分布函数确是費米函数. 为了証明这一点，最好利用熟知的熵的表达式[2]

$$\frac{S}{V} = -\mathrm{Sp}_\sigma \int [n \ln n + (1-n)\ln(1-n)] \frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}. \tag{2.5}$$

这个式子純粹来自排列組合，它之所以适用于費米液体，是因为假定了准粒子能級分类与理想气体能級分类一致. 由熵最大条件并注意粒子数和能量守恆，

$$\delta N = 0, \quad \delta E = 0,$$

可以对 $\delta n$ 变分而求得分布函数

$$n(\varepsilon) = n_F(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}} + 1}. \tag{2.6}$$

1) $n(\boldsymbol{p})$ 是准粒子的动量分布，所以 $2\int n(\boldsymbol{p}) \frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}$ 就是单位体积内的准粒子数.

2) 与通常一样，$\mathrm{Sp}_\sigma \ln n$ 表示对角元 $n_{\alpha\alpha}$ 的对数之和.

这里能量 $\varepsilon$ 是 $n$ 的泛函，所以实际上公式(2.6)是 $n(\varepsilon)$ 的很复杂的隐函数定义。

由于是 $n$ 的泛函，$\varepsilon$ 还与温度有关。这个关系可以表示如下。$T=0$ 时准粒子的平衡能量記为 $\varepsilon^{(0)}(\boldsymbol{p})$，当偏离平衡不多而且温度不高时能量表达式是

$$\varepsilon(\boldsymbol{p},\sigma)=\varepsilon^{(0)}(\boldsymbol{p},\sigma)+\delta\varepsilon(\boldsymbol{p},\sigma)=$$
$$=\varepsilon^{(0)}(\boldsymbol{p},\sigma)+\mathrm{Sp}_{\sigma'}\int f(\boldsymbol{p},\sigma;\boldsymbol{p}',\sigma')\delta n(\boldsymbol{p}',\sigma')\frac{d\boldsymbol{p}'}{(2\pi)^3}. \quad (2.7)$$

这里 $\delta n=n-n_F(T=0)$，而算符 $f$ 与两个准粒子的动量和自旋算符有关。(2.7)式的記法表示了其中各量的矩陣性质。我們已讲过，$\varepsilon$ 和 $n$ 是对自旋变量的矩陣。为了強調出这一点，特地将它們写成 $\varepsilon(\boldsymbol{p},\sigma)$，$n(\boldsymbol{p},\sigma)$，这里 $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z$ 是熟知的泡利(Pauli)矩陣，它們和准粒子自旋算符 $\boldsymbol{s}$ 的关系是 $\boldsymbol{s}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$。算符 $f$ 既是(2.7)式左面的自旋变量的矩陣，又是(2.7)式右面积分符号下 $\delta n$ 算符的自旋变量的矩陣。(2.7)式的最詳細的写法是

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\boldsymbol{p})=\varepsilon^{(0)}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{p})+\int f_{\alpha\beta;\gamma\delta}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}')\delta n_{\delta\gamma}(\boldsymbol{p}')\frac{d\boldsymbol{p}'}{(2\pi)^3}.$$

这个公式說明了符号 $f(\boldsymbol{p},\sigma;\boldsymbol{p}',\sigma')$ 的意义。

这样定义的函数 $f$ 是单位体积能量对 $\delta n$ 的二阶变分导数(試比較(2.7)和(2.4))，因此它对于 $\boldsymbol{p},\sigma$ 和 $\boldsymbol{p}',\sigma'$ 的置换是对称的。函数 $f$ 是费米液体的很重要的特征量。我們以后(見第四章)会看到，它与两个准粒子的零角散射振幅有关。

函数 $f$ 与自旋变量的关系可一般地表示为

$$f(\boldsymbol{p},\sigma;\boldsymbol{p}',\sigma')=\varphi(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}')+\sigma_i\sigma'_k\zeta_{ik}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'). \quad (2.8)$$

如果自旋相互作用来自交换[1]，則此式第二項的形状为 $(\sigma\sigma')\zeta(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}')$。

1) 通常粒子間与自旋有关的相互作用分成几类：与全同粒子可以置换有关的交换作用；由运动着的磁矩与电場的相对論作用导致的自旋軌道作用；磁矩間的直接磁作用。交换作用常大大超过其它各种作用。交换作用的特点是，它对于粒子系統总动量矩在空間的轉动是不变的。标量积$(\sigma\sigma')$正好具有这种性质。



无磁場存在时准粒子能量与自旋无关。(2.7)式中的函数 $\varepsilon^{(0)}$ 只依賴于 $p$ 并可按 $p-p_0$ 展开：

$$\xi(p)=\varepsilon^{(0)}(p)-\mu(0)=v(p-p_0), \quad (2.9)$$

这里 $\mu(0)$ 是 $T=0$ 时的化学势，而 $v$ 是常数。$v$ 是費米面上元激发的速度，它可写成

$$v=\frac{p_0}{m^*}, \quad (2.10)$$

式中 $m^*$ 是有效質量。兰道[11]証明，$m^*$ 和 $f$ 之間存在着一定关系。

单位液体体积的动量就等于质量通量；让我們把这个簡单事实写成关系式。费米液体单位体积的动量显然等于准粒子动量，也就是等于

$$2\int \boldsymbol{p}n\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}.$$

另一方面，由于假定了费米液体粒子数和准粒子数相等，液体粒子通量就等于准粒子通量，即

$$2\int \boldsymbol{v}n\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3},$$

式中 $\boldsymbol{v}$ 为准粒子速度。质量通量密度由此式乘液体原子質量 $m$ 而得。注意到 $\boldsymbol{v}$ 按定义等于$\frac{\partial\varepsilon}{\partial\boldsymbol{p}}$，我們把动量与质量通量相等的条件写为

$$\int \boldsymbol{p}n\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}=m\int\frac{\partial\varepsilon}{\partial\boldsymbol{p}}n\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}. \quad (2.11)$$

在(2.11)式中对 $n$ 变分，并注意到这时能量变化与 $\delta n$ 的关系是(2.7)式，后者在沒有磁場存在时(即 $n$ 与 $\varepsilon$ 都与自旋无关)可以写成

$$\delta\varepsilon=\frac{1}{2}\mathrm{Sp}_{\sigma}\mathrm{Sp}_{\sigma'}\int f(\boldsymbol{p},\sigma;\boldsymbol{p}',\sigma')\delta n'\frac{d\boldsymbol{p}'}{(2\pi)^3}.$$

由此得到：

$$\int\frac{\boldsymbol{p}}{m}\delta n\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}=\int\frac{\partial\varepsilon}{\partial\boldsymbol{p}}\delta n\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}+$$

$$+\frac{1}{2}\mathrm{Sp}_\sigma\mathrm{Sp}_{\sigma'}\int n\delta n'\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}}f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\sigma};\boldsymbol{p}',\boldsymbol{\sigma}')d\boldsymbol{p}\frac{d\boldsymbol{p}'}{(2\pi)^6}.$$

在第二个积分里对 $\boldsymbol{p}$ 作分部积分并将变量置换 $\boldsymbol{p}\boldsymbol{\sigma} \longleftrightarrow \boldsymbol{p}'\boldsymbol{\sigma}'$

$$\int\frac{\boldsymbol{p}}{m}\delta n\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}=\int\frac{\partial\varepsilon}{\partial\boldsymbol{p}}\delta n\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}-$$

$$-\frac{1}{2}\mathrm{Sp}_\sigma\mathrm{Sp}_{\sigma'}\iint\delta nf(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\sigma};\boldsymbol{p}',\boldsymbol{\sigma}')\frac{\partial n'}{\partial\boldsymbol{p}'}\frac{d\boldsymbol{p}d\boldsymbol{p}'}{(2\pi)^6}.$$

由于 $\delta n$ 的任意性，由此立即得出：

$$\frac{\boldsymbol{p}}{m}=\frac{\partial\varepsilon}{\partial\boldsymbol{p}}-\frac{1}{2}\mathrm{Sp}_\sigma\mathrm{Sp}_{\sigma'}\int f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\sigma};\boldsymbol{p}',\boldsymbol{\sigma}')\frac{\partial n'}{\partial\boldsymbol{p}'}\frac{d\boldsymbol{p}'}{(2\pi)^3}.$$

$T=0$ 时能量 $\varepsilon$ 在费米面附近有如(2.9)式，而 $\frac{\partial n'}{\partial\boldsymbol{p}'}\approx-\frac{\boldsymbol{p}'}{p'}\times$ $\times\delta(p'-p_0)$. 注意液体是各向同性的，因而 $f$ 只与 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{p}'$ 間的夹角 $\chi$ 有关，我們得到

$$\frac{1}{m^*}=\frac{1}{m}-\frac{p_0}{2(2\pi)^3}\mathrm{Sp}_\sigma\mathrm{Sp}_{\sigma'}\int f(\chi)\cos\chi d\Omega, \tag{2.12}$$

其中 $f(\chi)$ 是 $f$ 在 $|\boldsymbol{p}|=|\boldsymbol{p}'|=p_0$ 时的值. (2.12)式中按矢量 $\boldsymbol{p}'$ 的方向积分. 这个关系式給出了液体原子质量与准粒子有效质量的联系. 除了很小的修正项外，它对于足够低的温度也还成立.

费米液体的比热通过 $m^*$ 表示，其公式和普通费米气体一样. 事实上我們从(2.3)式就可以得出单位体积的比热

$$C_V=\left(\frac{\partial(E/V)}{\partial T}\right)_{N,V}=2\int\varepsilon\left(\frac{\partial n}{\partial T}\right)_N\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}. \tag{2.13}$$

不难証明，如果在积分中将 $\varepsilon$ 换成 $\varepsilon^{(0)}$，相对誤差的数量级为 $[T/\mu(0)]^2$. 这样，在对 $T$ 的綫性近似下我們就得到了普通的气体公式

$$C_V=\frac{1}{3}m^*p_0T. \tag{2.14}$$

低温下的熵也由同样的公式表达[1)].

1) 可以利用(2.13)式从比热的实驗数据求 $m^*$. 根据(2.1)式，动量 $p_0$ 由液体密度决定. 对液体 $He^3$ 可得(見[13,14])：

$$p_0=0.76\cdot10^8\ (\text{厘米})^{-1},\quad m^*=2m_{He^3}.$$



**3. 声波.** 和在玻色液体中一样，声波在费米液体中的传播也有許多特点(虽然是另一些不同于玻色液体中的特点). 如果討論频率一定的声波，则当温度不太低时，它的传播遵从普通的流体力学规律. 声的衰減这时正比于元激发的碰撞时間 $\tau$. 温度降低，碰撞几率也減少，它正比于费米分布表面延展寬度的平方，因此碰撞时間将按 $T^{-2}$ 律增长. 在 $\tau\sim\frac{1}{\omega}$ 的温度下，声波就不能传播了.

但是継續降低温度时，又出現了传播声波的可能性. 然而一般說来，它具有另一速度，而且也不再是簡单的疏密波. 兰道[12]預言了这个現象，并称之为"零声". 由于确定声的本质时，重要的只是 $\omega$ 和 $\tau$ 的关系，这两种声可以分别表述为低頻声($\omega\tau\ll1$)和高頻声($\omega\tau\gg1$).

温度不太低，条件 $\omega\tau\ll1$ 成立时，声速和平常情况一样决定于压縮率. 可以証明，它和函数 $f$ 有本质性联系[11]. 压縮率通过化学势对粒子数的导数 $\frac{\partial\mu}{\partial N}$ 表达最为方便. 因为化学势仅与 $\frac{N}{V}$ 有关，故得

$$\frac{\partial\mu}{\partial N}=-\frac{V^2}{N^2}\frac{\partial P}{\partial V}=\frac{1}{N}\frac{\partial P}{\partial\left(\frac{N}{V}\right)} \tag{2.15}$$

($P$——压力). 由此得出 $\frac{\partial\mu}{\partial N}$ 与 $u^2$ 的关系：

$$u^2=\frac{\partial P}{\partial\rho}=\frac{\partial P}{\partial\left(\frac{mN}{V}\right)}=\frac{1}{m}N\frac{\partial\mu}{\partial N}. \tag{2.16}$$

导数 $\frac{\partial\mu}{\partial N}$ 的算法如下. 因为 $\mu\approx\varepsilon(p_0)$，所以 $p_0$ 的变化和函数 $\varepsilon(p)$ 本身形状的变化都导致 $\mu$ 的改变：

$$\delta\mu=\frac{1}{2}\mathrm{Sp}_\sigma\mathrm{Sp}_{\sigma'}\int f\delta n'\frac{d\boldsymbol{p}'}{(2\pi)^3}+\frac{\partial\varepsilon^{(0)}(p_0)}{\partial p_0}\delta p_0. \tag{2.17}$$

(我們考虑无磁場的情形). 由(2.1)式得 $\delta N$ 与 $\delta p_0$ 的关系

$$\delta N=\frac{1}{\pi^2}p_0^2\delta p_0V.$$

(2.17)式积分内重要的仅是 $\delta n$ 在費米面附近的变化，故可对动量的絕对值积分．这給出

$$\int f\delta n' \frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} = \frac{\delta N}{8\pi V}\int f d\Omega.$$

从而

$$\frac{\partial\mu}{\partial N} = \frac{1}{16\pi V}\mathrm{Sp}_\sigma\mathrm{Sp}_{\sigma'}\int f d\Omega + \frac{\pi^2}{p_0 m^* V}. \tag{2.18}$$

利用有效质量的表达式(2.12)以及(2.1)式，得到：

$$u^2 = \frac{p_0^2}{3m^2} + \frac{1}{6m}\left(\frac{p_0}{2\pi}\right)^3 \mathrm{Sp}_\sigma\mathrm{Sp}_{\sigma'}\int f(\chi)(1-\cos\chi)d\Omega. \tag{2.19}$$

这样，在 $\omega\tau \ll 1$ 的頻段內，声速由(2.19)式决定．它和无相互作用时的声速 $u^2 = \frac{p_0^2}{3m^2}$ 不同．

为了研究 $\omega\tau \gg 1$ 的頻段內声的传播，我們利用普通的輸运方程

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial \boldsymbol{r}}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \boldsymbol{p}} - \frac{\partial n}{\partial \boldsymbol{p}}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \boldsymbol{r}} = I(n), \tag{2.20}$$

其中 $I(n)$ 是碰撞积分．偏离平衡不大时分布函数可写成

$$n = n_F + \delta n,$$

其中 $n_F$——平衡函数，而 $\delta n$——小修正項，它是时間的周期函数

$$\delta n \sim e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)}.$$

碰撞积分的数量級为

$$I(n) \sim \frac{\delta n}{\tau},$$

它与 $\frac{\partial n}{\partial t}$ 相比可以略而不計．使方程式(2.20)綫性化时还要注意，$\varepsilon$ 是 $n$ 的泛函，所以导数 $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \boldsymbol{r}}$ 不等于零．由(2.7)得

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \boldsymbol{r}} = \mathrm{Sp}_{\sigma'}\int f\frac{\partial \delta n'}{\partial \boldsymbol{r}}\frac{d\boldsymbol{p}'}{(2\pi)^3}.$$

考虑到这一点后，我們就得到：

$$(\boldsymbol{kv}-\omega)\delta n - \boldsymbol{kv}\frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon}\mathrm{Sp}_{\sigma'}\int f\delta n' \frac{d\boldsymbol{p}'}{(2\pi)^3} = 0. \tag{2.21}$$



从这个方程式看出，$\delta n$ 正比于 $\frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} \approx -\delta(\varepsilon-\mu)$．引入符号 $\delta n = \frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon}\nu$，我們就得到：

$$(\boldsymbol{kv}-\omega)\nu + \boldsymbol{kv}\frac{1}{2}\mathrm{Sp}_{\sigma'}\int F\nu' \frac{d\Omega'}{4\pi} = 0, \tag{2.22}$$

其中

$$F(\chi) = f(\chi)\frac{p_0 m^*}{\pi^2}. \tag{2.23}$$

如果取 $\boldsymbol{k}$ 作极軸并引入符号 $\tilde{u} = \frac{\omega}{k}$——波的传播速度，$s = \frac{\tilde{u}}{v}$，則方程式(2.22)变为

$$(s-\cos\theta)\nu(\theta,\varphi,\sigma) = \cos\theta\frac{1}{2}\mathrm{Sp}_{\sigma'}\int F(\chi)\nu(\theta',\varphi',\sigma')\frac{d\Omega}{4\pi}. \tag{2.24}$$

从方程式(2.24)看出普通声波和費米液体內 $\omega\tau \gg 1$ 时所传播的声波的基本差别．第一种情况下在液体作为整体靜止不动的坐标系中，分布函数仍是各向同性的．这就是說，費米球的半径改变，同时其中心相对 $\boldsymbol{p}=0$ 点发生振动．第二种情况下分布函数的变化更为复杂，費米面不再是球形．費米面的改变由函数 $\nu$ 决定．

先討論方程式(2.24)的与自旋无关的解．这时从整个函数 $F(\chi)$ 中只剩下与(2.8)式中函数 $\varphi$ 有关的部分 $\Phi(\chi)$．先看最簡单的情形，即 $\Phi = \Phi_0 =$ 常数．由方程式(2.24)得出：

$$\nu = \frac{\mathrm{const}\cdot\cos\theta}{s-\cos\theta}e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)}. \tag{2.25}$$

我們卽将看到，$s$ 应大于 1．这就是說，費米面沿运动方向伸长．

将(2.25)代入(2.24)并令 $F = \Phi_0$，求出决定 $s$ 的方程式．积分后有

$$\frac{s}{2}\ln\frac{s+1}{s-1} - 1 = \frac{1}{\Phi_0}. \tag{2.26}$$

由此看出，如果 $s$ 是实数(这相当于非衰減波)，則它应当大于1，卽

$$\tilde{u} > v. \tag{2.27}$$

从方程式(2.24)还看出，这个条件对于任意的函数$\Phi$都是成立的．其次，由于方程式(2.26)左面总是正的，显然零声的存在条件就是$\Phi_0$大于零．

如果$\Phi_0$很大，$s$也很大．从方程(2.26)得到当$\Phi_0\to\infty$时，$s\to\sqrt{\frac{\Phi_0}{3}}$．相反，当$\Phi_0\to0$，$s\to1$，即$\tilde{u}\to v$．这是接近于理想费米气体的情况．

不难看出，$\Phi\to0$时$s$趋向于1．这个結論与$\Phi$的形状无关．其实从(2.24)式就可以得出$\Phi\to0$，$s\to1$，而$\nu$只在$\theta$很小的范围内不为零．由(2.19)式，在近似理想的费米气体中$u^2=\frac{p_0^2}{3m^2}$，即$u\approx\frac{v}{\sqrt{3}}\approx\frac{\tilde{u}}{\sqrt{3}}$．因此零声速为普通声速的$\sqrt{3}$倍．应当指出，在近假理想的费米气体这个极限情况下，$\tau$大为增加，結果相当于零声的频段展寬，相反，普通声波只能存在于頻率很低的范围内．

在任意函数$\Phi(\chi)$的一般情况下，方程式(2.24)已不能这样簡单地求解．如果将$\nu(\theta,\varphi)$和$\Phi(\chi)$按球諧波展成級数，则相应于不同方位数$m$的球函数(即因子$e^{im\varphi}$)的振幅所滿足的方程式也互相分离．这时数$m$不超过函数$\Phi(\chi)$按 Legendre 多項式展开所得表达式$\Phi(\chi)=\sum_l\Phi_lP_l(\cos\chi)$中最大角标$l$．这样我們就得到結論：在一般情况下可以产生几种"零声"，其分布函数在垂直于传播方向$k$的平面中的变化，并不是各向同性的．和最簡单的情况一样，出现这些振动的可能性取决于函数$\Phi$的形状．例如当$\Phi=\Phi_0+\Phi_1\cos\chi$时，出现$\nu\sim e^{i\varphi}$的振动的条件是$\Phi_1>6$．

須要注意，在这种波里并不发生液体的疏密变化．

当函数$f$与自旋有关时，液体中还能传播一些特别的波，它們可称为自旋波．例如，設想如下的函数$F(\chi)$(自旋的交换作用)：

$$F(\chi)=\Phi(\chi)+Z(\chi)(\sigma\sigma'). \qquad (2.28)$$

这时除了与自旋无关的解以外，形状如下的函数$\nu$也滿足方程式(2.24)：



$$\boldsymbol{\nu}=\nu\boldsymbol{\sigma}, \qquad (2.29)$$

其中$\boldsymbol{\nu}$是未知矢量．决定函数$\boldsymbol{\nu}$的方程是

$$(s-\cos\theta)\boldsymbol{\nu}=\cos\theta\int Z\boldsymbol{\nu}'\frac{d\Omega}{4\pi}. \qquad (2.30)$$

矢量$\boldsymbol{\nu}$的分量的方程与和自旋无关的$\nu$的方程相比，只是把$\Phi$换成了$Z$．所以全部进一步的討論对自旋波也是成立的．可以証明[11]，$Z$按球諧波展开的零次項决定費米液体的磁化率．对于液体$He^3$它是負数，这很可能是說明，自旋波不能在这种液体中传播．

金属中的电子是比較特殊的情形．显然，仅仅有电子密度变化而晶格不变的波，是不能在金属中传播的．这种波将造成未被补偿的电荷，因此激发这种振动实际上要求很大的能量．很可能这是意味着，在庫伦力的情况下，函数$f$包含着一个与角度无关的为无限大的常数(参看§22)．根据(2.26)，这时$s=\infty$．然而这些討論只适用于密度振动；电子液体中在一定条件下可能传播$\nu\sim e^{im\varphi}(m\neq0)$的高阶"声"以及与密度变化无关的自旋波．

$T=0$时可能有声波传播，就是說明在液体的激发譜中存在着玻色型的声子支，其能量与动量呈綫性关系$\varepsilon_i=u_ip$．但是声子所导致的热力学量的修正項，含有$T$的更高次冪(比热$\sim T^3$)，这在所討論的近似中沒有計入．

以后(第四章)要証明，上述理論的基本原則，可以从具有任意短程相互作用力的費米粒子体系的微观討論中推导出．

用以上形式陈述的兰道理論，首先是适用于液体$He^3$在低温下的性質．粒子間庫伦相互作用的存在，引起一系列特性．其中有一些将在§22中借簡单模型說明．与普通費米液体差得更远的，是超流(超导)費米系統．超导体的性質将在第七章中討論．最后还应当指出，鉄磁性的費米系統也与上述模型不同．A. A. Абрикосов 和 И. Е. Дзялошинский 的論文[15]研究了这类費米液体的性質，讀者可以参閱．

## §3. 二次量子化

前面叙述的玻色和费米液体的理論，在一定意义上具有唯象的性质。它是根据一些有关温度元激发譜的假設的。以后我們要从事这一理論的微观論証。本节中先叙述通常称为二次量子化方法的輔助数学工具[1]。

設有$N$个沒有相互作用的粒子組成的系統，这些粒子可能处于某些波函数为 $\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi)\cdots$ 的状态中，这些波函数构成完全正交归一函数系。$\xi$ 表示描述粒子状态的任何变量，通常是坐标和自旋投影。显然可以給定处于状态 $\varphi_1, \varphi_2\cdots$ 中的粒子数，来代替用完全波函数对系統的描述。这相当于变换到新的表象，即所謂二次量子化表象。在这个表象中数字 $N_1, N_2\cdots$ 起着变量的作用。

先从遵守玻色統計的粒子开始討論。大家知道，玻色粒子系統的完全波函数，对于不同粒子間的变量置换是对称的。不难驗証，对应于填充数 $N_1, N_2\cdots$ 的波函数是

$$\Phi_{N_1N_2}\cdots=\left(\frac{N_1!N_2!\cdots}{N!}\right)^{1/2}\sum_{P}\varphi_{p_1}(\xi_1)\varphi_{p_2}(\xi_2)\cdots\varphi_{p_N}(\xi_N);\tag{3.1}$$

这里 $p_i$ 是状态編号，按照 $p_i$ 的一切可能的置换求和。求和符号前面的因子保証归一$\left(\int|\Phi|^2\prod_i d\xi_i=1\right)$。我們将把 $\Phi_{N_1N_2\cdots}$ 看作变量 $N_i$ 的函数。

設 $F^{(1)}$ 是相对于全部粒子都对称的算符，其形状为

$$F^{(1)}=\sum_a f_a^{(1)},\tag{3.2}$$

其中算符 $f_a$ 只作用于变量为 $\xi_a$ 的函数。容易看出，这样的算符作用到函数 $\Phi_{N_1N_2\cdots}$ 上，或者使其不改变，或者将它变换为相应于其中一个粒子的状态有变化的另一函数。因此 $F^{(1)}$ 对函数(3.1)的矩陣元的形状是：

$$\text{对角元}\qquad \overline{F^{(1)}}=\sum_i f_{ii}^{(1)}N_i,$$

$$\text{非对角元}\qquad (F^{(1)})^{N_i\quad N_k-1}_{N_i-1\quad N_k}=f_{ik}^{(1)}\sqrt{N_iN_k},\tag{3.3}$$

其中

$$f_{ik}^{(1)}=\int\varphi_i^*(\xi)f^{(1)}\varphi_k(\xi)d\xi.$$

算符 $F^{(1)}$ 对数目 $N_i$ 的作用，可以引入新的算符 $a_i$ 表示；这些算符使处于状态 $i$ 的粒子数減少一个，其矩陣元为

$$(a_i)^{N_i-1}_{N_i}=\sqrt{N_i}.\tag{3.4}$$

其厄米共軛算符 $a_i^+$ 显然具有矩陣元：

$$(a_i^+)^{N_i}_{N_i-1}=\left(a_i{}^{N_i-1}_{N_i}\right)^*=\sqrt{N_i},\tag{3.5}$$

即粒子数增加一个。不难驗証，算符 $F^{(1)}$ 可写成如下形式：

$$F^{(1)}=\sum f_{ik}^{(1)}a_i^+a_k.\tag{3.6}$$

实际上这个算符的矩陣元也和(3.3)式相符。这就是 $F^{(1)}$ 在二次量子化表象中的表达式。

根据公式(3.4)和(3.5)，算符 $a_i$ 和 $a_i^+$ 的乘积是对角算符：

$$\begin{aligned}a_i^+a_i&=N_i,\\ a_ia_i^+&=N_i+1.\end{aligned}\tag{3.7}$$

从(3.4)，(3.5)和(3.7)式得到算符 $a_i$ 的对易关系：

$$\begin{aligned}[a_ia_k^+]&=a_ia_k^+-a_k^+a_i=\delta_{ik},\\ [a_ia_k]&=[a_i^+a_k^+]=0.\end{aligned}\tag{3.8}$$

对称化了的算符

$$F^{(2)}=\sum_{a,b}f_{ab}^{(2)}\tag{3.9}$$

的表达式也是类似的，这里 $f_{ab}^{(2)}$ 作用到 $\xi_a$ 与 $\xi_b$ 的函数上。在二次量子化表象中算符 $F^{(2)}$ 的形状为：

---

1) 我們以为在此簡述一下二次量子化方法(参閱[16])是有益的，因为它是以后发展的全部工具的基础。

$$F^{(2)} = \sum_{iklm} f^{(2)ik}_{lm} a_i^+ a_k^+ a_l a_m, \tag{3.10}$$

其中

$$f^{(2)ik}_{lm} = \int \varphi_i^*(\xi_1)\varphi_k^*(\xi_2) f^{(2)} \varphi_l(\xi_1)\varphi_m(\xi_2)\, d\xi_1 d\xi_2.$$

对更复杂的算符,也可依此类推.

試取处于外場中的有相互作用的粒子系統的哈密頓量

$$H = \sum H_a^{(1)} + \sum_{a,b} U^{(2)}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) + \sum_{a,b,c} U^{(3)}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b, \mathbf{r}_c) + \cdots, \tag{3.11}$$

其中 $H_a^{(1)} = -\frac{\Delta_a}{2m} + U(\mathbf{r}_a)$. 根据上述,在二次量子化表象中它是

$$H = \sum H^{(1)}_{ik} a_i^+ a_k + \sum_{iklm} U^{(2)ik}_{lm} a_i^+ a_k^+ a_l a_m + \cdots. \tag{3.12}$$

如果取哈密頓量 $H_a^{(1)}$ 的本征函数为 $\varphi_i$,则(3.12)式第一項成为:

$$H^{(1)} = \sum \varepsilon_i a_i^+ a_i = \sum \varepsilon_i N_i. \tag{3.13}$$

在費米統計情况下系統的完全波函数对于諸变数是反对称的. 这就使不相互作用的粒子的填充数只能是 0 与 1,而波函数形状为:

$$\Phi_{N_1N_2\cdots} = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_P (-1)^P \varphi_{p_1}(\xi_1)\varphi_{p_2}(\xi_2)\cdots\varphi_{p_N}(\xi_N), \tag{3.14}$$

这里所有的数 $p_1, p_2, \cdots, p_N$ 是不同的. 符号 $(-1)^P$ 表示,奇置換在(3.14)的和中取«—»号. 为了确定起見,我們令滿足如下順序的一項取«+»号:

$$p_1 < p_2 < p_3 < \cdots < p_N. \tag{3.15}$$

(3.2)式的算符 $F^{(1)}$ 这时有矩陣元:

对角元 $\overline{F^{(1)}} = \sum_i f_{ii} N_i,$

非对角元 $(F^{(1)})^{1_i\ 0_k}_{0_i\ 1_k} = \pm f^{(1)}_{ik},$ (3.16)

式中取«+»或«—»号, 要視状态 $i$ 和 $k$ 之間的状态中的总粒子数是偶数或奇数而定. 引入算符 $a_i$,其矩陣元为:



$$(a_i)^0_1 = (a_i^+)^1_0 = (-1)^{\sum_{l=1}^{i-1} N_l}. \tag{3.17}$$

借助这些算符可以把算符 $F^{(1)}$ 写成(3.6)式的形式.

算符 $a_i$ 和 $a_i^+$ 的乘积等于

$$a_i^+ a_i = N_i, \quad a_i a_i^+ = 1 - N_i. \tag{3.18}$$

因此

$$\{a_i a_i^+\} = a_i a_i^+ + a_i^+ a_i = 1.$$

所有其它的反对易关系等于零,即

$$\{a_i a_k^+\} = \delta_{ik}, \quad \{a_i a_k\} = \{a_i^+ a_k^+\} = 0. \tag{3.19}$$

更复杂的算符,其中包括哈密頓量,都可以通过算符 $a_i$ 和 $a_i^+$,写成与玻色粒子情形类似的形式.

## §4. 稀薄玻色气体

量子液体的簡单例子是弱非理想气体, 即粒子間相互作用比較弱的气体. 以后我們将看到,为此必須要求粒子的散射振幅小于平均波长 $\lambda = \frac{1}{p}$,后者对于簡并气体在数量级上等于粒子間距离.

在这种条件下,由于相碰粒子的动量小,对最初几级近似只考虑 $s$ 散射就够了. 如果 $s$ 散射幅为 $a$, 则 $p$ 散射幅的数量级約为 $a\left(\frac{a}{\lambda}\right)^2$ [1]. 因此,如果在总能量中 $s$ 散射給出数量级由 $a/\lambda$ 开始的諸項,则 $p$ 散射給出的各項不低于$\left(\frac{a}{\lambda}\right)^3$. 由此可知,一直精确到这些項,散射可以認为是各向同性的.

1) 如果力的作用半径是 $r_0$,则由量子力学(見[16])知道,当 $\lambda \gg r_0$ 时,动量矩为 $l$ 的散射幅約为 $r_0\left(\frac{r_0}{\lambda}\right)^{2l}$.

以同样的精确度可以忽略三重碰撞，而且对于费米气体可以証明，三重碰撞的貢献还要小，它$\sim\left(\frac{a}{\lambda}\right)^{3}$[1]。我們将假定，粒子間的相互作用是相斥的，即散射幅符号为«+»。对于玻色气体，这是因为，只要存在着吸引力，即令很弱，它就无論如何不能在低温下仍是稀薄气体。对于费米气体，粒子間的吸引力导致超流。我們这里暂不討論这种情形。

本节中将計算稀薄玻色气体的基态能量和能譜($T = 0$)[2]。下一节中討論稀薄费米气体。为了簡单起見，我們假定玻色气体粒子自旋为零。这时相互作用能可写成

$$H_{int} = \frac{U}{2V} \sum_{p_1+p_2=p_3+p_4} a^+_{p_4} a^+_{p_3} a_{p_2} a_{p_1}. \tag{4.1}$$

我們把$U$从求和号中提出，是因为任意一对粒子間的相互作用都是一样的，而且散射幅又与角度无关($s$散射)。在第一級近似下$U$的数值与散射幅的关系为

$$U = \frac{4\pi}{m} a. \tag{4.2}$$

这个等式不难从以下討論得到。根据$s$散射幅的定义(見[16]，第460，482頁)，它与两个等同粒子的有效散射截面的关系为(在质心系統中)

$$d\sigma = (2a)^2 d\Omega.$$

另一方面，可以借助哈密頓量(4.1)决定$d\sigma$。在玻恩(Born)近似下得到(見[16]，第466頁)：

$$d\sigma = \left(\frac{m}{4\pi}\right)^2 (2U)^2 d\Omega,$$

从而得出(4.2)式。

1) 最后这个論断的根据是，三个相碰费米粒子的波函数应为反对称的。为此必须要求第三个粒子相对于前两个粒子中自旋投影与它相同的那个具有奇的动量矩。結果至少要多出来一个因子$\left(\frac{a}{\lambda}\right)^2$。

2) 波戈留博夫[17]首先得到了稀薄玻色气体的能譜，楊振宁和黄克孙[18]以及Brueckner和Sawada[19]决定了基态能量。本节中我們主要依据論文[17,19]。



波戈留博夫 (Н. Н. Боголюбов) 証明[17]，当只涉及稀薄玻色气体的基态或低激发态时，相互作用能算符(4.1)可以大为化簡，結果得以将哈密頓量对角化并求出能譜。簡化的基本思想如下。理想玻色气体的粒子在基态中处于能量为零的最低能級上，或者如通常所說的，处于凝聚体中。对于稀薄气体，由于相互作用弱，其基态与理想气体基态相差不多，即处于凝聚体中的粒子数远超过处于其它能級上的粒子数：$N - N_0 \ll N_0$。低激发态也是这样。因为玻色算符$a_i$的矩陣元等于$\sqrt{N_i}$，則很清楚，我們可以只考慮凝聚体內諸粒子之間以及激发粒子和凝聚体粒子間的相互作用，而忽略凝聚体外各粒子間的相互作用。这就是說，在(4.1)的和中只要保留以下各項：

$$H_{int} = \frac{U}{2V}\Big[a_0^+ a_0^+ a_0 a_0 + \sum_{p\neq 0}(2a_p^+ a_0^+ a_p a_0 + 2a_{-p}^+ a_0^+ a_{-p} a_0 + a_p^+ a_{-p}^+ a_0 a_0 + a_0^+ a_0^+ a_p a_{-p})\Big]. \tag{4.3}$$

由于$N_0$很大，我們有理由将算符$a_0^+$和$a_0$視为普通数而代之以$\sqrt{N_0}$。实际上这些算符彼此之間以及与任何其它算符$a_i$、$a_i^+$的对易关系給出一或零，即无論如何都远小于算符$a_0$和$a_0^+$的矩陣元。这样我們就得到：

$$H_{int} = \frac{U}{2V}\Big[N_0^2 + 2N_0 \sum_{p\neq 0}(a_{-p}^+ a_{-p} + a_p^+ a_p) + N_0 \sum_{p\neq 0}(a_p^+ a_{-p}^+ + a_p a_{-p})\Big]. \tag{4.4}$$

系統內的总粒子数可写成

$$N = N_0 + \frac{1}{2}\sum_{p\neq 0}(a_p^+ a_p + a_{-p}^+ a_{-p}). \tag{4.5}$$

由此可将(4.4)式中所有的$N_0$通过$N$表示。在$H_{int}$中保留不低于$N$的一次冪的各項，再添上动能算符，就得到如下的哈密頓量：

$$H = \frac{UN^2}{2V} + \frac{1}{2}\sum_{p\neq 0}\Big[\Big(\frac{p^2}{2m} + \frac{UN}{V}\Big)(a_p^+ a_p + a_{-p}^+ a_{-p}) +$$

$$+\frac{UN}{V}(a_p^+a_{-p}^+ + a_pa_{-p})\Big]. \tag{4.6}$$

哈密顿量的最后一項是非对角的． 为使其对角化，作算符 $a_p$ 和 $a_p^+$ 的綫性变换：

$$\alpha_p = \frac{1}{\sqrt{1-A_p^2}}(a_p + A_pa_{-p}^+),$$
$$\alpha_p^+ = \frac{1}{\sqrt{1-A_p^2}}(a_p^+ + A_pa_{-p}). \tag{4.7}$$

新的算符 $\alpha_p$ 和 $\alpha_p^+$ 满足和原来一样的对易关系．在(4.6)式中将 $a_p$ 和 $a_p^+$ 通过 $\alpha_p$ 和 $\alpha_p^+$ 表示，就得到：

$$H = \frac{UN^2}{2V} + \sum_{p\neq 0}\frac{1}{1-A_p^2}\left[\left(\frac{p^2}{2m}+\frac{NU}{V}\right)A_p^2 + \frac{NU}{V}A_p\right] + \\ + \frac{1}{2}\sum_{p\neq 0}\frac{1}{1-A_p^2}\left[\left(\frac{p^2}{2m}+\frac{NU}{V}\right)(1+A_p^2) + \right. \\ \left. + 2\frac{UN}{V}A_p\right](\alpha_p^+\alpha_p + \alpha_{-p}^+\alpha_{-p}) + \frac{1}{2}\sum_{p\neq 0}\frac{1}{1-A_p^2}\left[\left(\frac{p^2}{2m}+\frac{NU}{V}\right)2A_p + \right. \\ \left. + \frac{NU}{V}(1+A_p^2)\right](\alpha_p^+\alpha_{-p}^+ + \alpha_p\alpha_{-p}). \tag{4.8}$$

为了使非对角項成为零，系数 $A_p$ 须滿足关系式：

$$\left(\frac{p^2}{2m}+\frac{NU}{V}\right)2A_p + \frac{NU}{V}(1+A_p^2) = 0.$$

由此

$$A_p = \frac{V}{UN}\left(-\frac{p^2}{2m} - \frac{NU}{V} + \sqrt{\left(\frac{p^2}{2m}+\frac{UN}{V}\right)^2 - \left(\frac{UN}{V}\right)^2}\right). \tag{4.9}$$

根号前須取«＋»号，是因为激发态应具有正能量． 将(4.9)式的系数 $A_p$ 代入(4.8)式就得到：

$$H = \frac{UN^2}{2V} - \frac{1}{2}\sum_{p\neq 0}\left[\left(\frac{p^2}{2m}+\frac{UN}{V}\right) - \sqrt{\left(\frac{p^2}{2m}+\frac{UN}{V}\right)^2 - \left(\frac{UN}{V}\right)^2}\right] + \\ + \frac{1}{2}\sum_{p\neq 0}\sqrt{\left(\frac{p^2}{2m}+\frac{UN}{V}\right)^2 - \left(\frac{UN}{V}\right)^2}(\alpha_p^+\alpha_p + \alpha_{-p}^+\alpha_{-p}). \tag{4.10}$$

求得的公式由两項构成． 第一項是常数． 第二項是对角算符，它可以写成：

$$\sum_{p\neq 0} n_p\varepsilon(p),$$

其中 $n_p$ 是相应于算符 $\alpha_p$ 的填充数．当所有的 $n_p$ 都等于零时，能量最低，因此 $\sum_p n_p\varepsilon(p)$ 是激发能．这个式子的形状和无相互作用粒子系統的能量(3.13)一样． 由此可見，稀薄玻色气体的低激发态可以用元激发模型描述，其能譜为[1]：

$$\varepsilon(p) = \sqrt{\left(\frac{p^2}{2m}+\frac{UN}{V}\right)^2 - \left(\frac{UN}{V}\right)^2}. \tag{4.11}$$

动量很小时有

$$\varepsilon(p) \approx \frac{\sqrt{4\pi aN/V}}{m}p, \tag{4.12}$$

这相当于玻色液体譜的声子部分． 动量很大时 $\varepsilon(p)$ 就成为自由粒子能量：

$$\varepsilon(p) \approx \frac{p^2}{2m}, \tag{4.13}$$

这也和§2中的結論一致．

(4.10)式中第一項显然是玻色液体基态能量． 不难看出，式中对 $p$ 的和在动量大时如 $\sum_p \frac{1}{p^2}$ 一样发散．这是因为实际上不能把能量按 $U$ 的冪展开． 从(4.10)式直接看出，$U$ 是常数就导致能量为无穷大．这里重要的是，散射幅 $a$ 乃是有限的小量，因此可按它将能量展开．

$U$ 和散射幅之間的关系(4.2)并不是精确的，而是只对一次項成立．由于我們关心能量中的高次項，(4.2)式必須加以修正． 討論凝聚体内两个粒子散射而轉入状态 $p, -p$，在微扰論第二級近

1) 应指出，上述推导中使用了玻恩近似． 然而实际上公式(4.11)借助(4.2)式通过散射幅 $a$ 表达后，不仅在玻恩近似下成立，而且在 $\frac{a}{\lambda}\ll 1$ 的一切情况下都成立．这将在第五章中証明．(4.16)，(5.20)和(5.21)式也是如此．

取下有

$$U - \frac{U^2}{V} \sum_{p \neq 0} \frac{1}{p^2/m} = \frac{4\pi a}{m}. \tag{4.14}$$

由此将 $U$ 通过 $a$ 表示出来，并代入(4.10)式，就得到基态能量

$$E = \frac{2\pi a}{m}\frac{N^2}{V} + \frac{8\pi^2 a^2}{m^2}\left(\frac{N}{V}\right)^2 \sum_p \frac{1}{p^2/m} -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_p \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{4\pi a N}{mV}\right)\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{4\pi a N/mV}{p^2/2m + 4\pi a N/mV}\right)^2}\right). \tag{4.15}$$

对于大的 $p$，(4.15) 式收斂．对动量积分，得：

$$\frac{E}{V} = \frac{2\pi a}{m}\left(\frac{N}{V}\right)^2\left[1 + \frac{128}{15\sqrt{\pi}} a^{3/2}\left(\frac{N}{V}\right)^{1/2}\right]. \tag{4.16}$$

注意，这里是按 $\left[a\left(\frac{N}{V}\right)^{1/3}\right]^{1/2}$ 展开的．

由此式可得声速为

$$u = \sqrt{\frac{V^2}{mN}\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}} = \frac{\sqrt{4\pi a N/V}}{m}. \tag{4.17}$$

这个表达式和能譜声子部分的公式 (4.12) 内 $p$ 的系数应一致，事实上也正是如此．

本节初已經講过，玻色气体的散射幅 $a$ 应是正数． 这也可以从(4.17)式看出，因为如果 $a < 0$，声速就成为虚数(状态不穩定)．

元激发按动量的分布由普通的玻色公式給出：

$$\bar{n}_p = \overline{a_p^+ a_p} = \frac{1}{e^{\varepsilon(p)/T} - 1}. \tag{4.18}$$

至于玻色液体粒子本身按动量的分布，則它可由下式算出：

$$\bar{N}_p = \overline{a_p^+ a_p}.$$

以(4.7)式代入，得：

$$\bar{N}_p = \frac{\bar{n}_p + A_p^2(\bar{n}_p + 1)}{1 - A_p^2}. \tag{4.19}$$

当然，此式只适用于 $p \neq 0$．能量为零的粒子数由下式給出：



$$N_0 = N - \sum_{p \neq 0} \bar{N}_p.$$

絕对零度时 $\bar{n}_p = 0$，因而从(4.19)式求得：

$$\bar{N}_p = \frac{\frac{8\pi^2 a^2}{m^2}\left(\frac{N}{V}\right)^2}{\varepsilon(p)\left[\varepsilon(p) + \frac{p^2}{2m} + \frac{4\pi a N}{mV}\right]}, \tag{4.20}$$

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \frac{8}{3\sqrt{\pi}} a^{3/2}\left(\frac{N}{V}\right)^{1/2}. \tag{4.21}$$

由此清楚看到，非理想玻色气体，卽使处于基态，也不是全部粒子的动量都等于零．

## §5. 稀薄費米气体

現在轉而討論費米气体． 我們要决定基态能量，元激发的有效質量和 $f$ 函数1)，所得各式精确到数量級为$\left(\frac{a}{\lambda}\right)^2$之項，这里 $a$ 是 $s$ 散射幅．

这时相互作用能量算符不能象玻色粒子的情况那样写成(4.1)式．其实只要在(4.1)式中 $i, k, l, m$ 不仅代表动量，而且代表自旋投影，則由于費米算符反对易，求和就成为零．原因在于哈密頓量 (4.1) 式中未計入費米粒子散射之特殊性． 根据量子力学 (見[16]，§114)，只有自旋反平行时，自旋为 1/2 的全同粒子才能发生 $s$ 散射． 这时散射幅比粒子不同时增大一倍．考虑到这种情况，我們可将相互作用能写成

$$H_{int} = \frac{U}{V}\sum_{p_1+p_2=p_3+p_4} a^+_{p_3,\frac{1}{2}} a^+_{p_4,-\frac{1}{2}} a_{p_2,-\frac{1}{2}} a_{p_1,\frac{1}{2}}, \tag{5.1}$$

或者，完全等同地写为：

$$H_{int} = \frac{U}{2V}\sum_{p_1+p_2=p_3+p_4} a^+_{p_3,\alpha} a^+_{p_4\beta} a_{p_2\beta} a_{p_1\alpha}. \tag{5.1'}$$

1) 楊振宁和黄克生[20] 以及楊振宁和李政道[21] 計算了基态能量，有效質量是 A. A. Абрикосов 和 И. М. Халатников[22] 以及 В. М. Галицкий[23] 得到的．論文[22]中算出了 $f$ 函数．

和从前一样，$U$ 在第一级近似下与 $s$ 散射幅的关系为：

$$U=\frac{4\pi a}{m}. \tag{5.2}$$

对 $H_{int}$ 应用微扰論。基态能量的一級修正項等于 $H_{int}$ 的对角矩陣元：

$$E^{(1)}=\frac{U}{V}\sum n_i n_k Q_{ik}, \tag{5.3}$$

其中角标 $i, k$ 相应于給定的动量和自旋投影，$n_i$ 是 $T=0$ 时的填充数[1]，它等于 1 $(p<p_0)$ 或 0 $(p>p_0)$，$(p_0=(3\pi^2N/V)^{1/3})$。(5.3) 式中的因子 $Q_{ik}$ 用以計入 $i$ 和 $k$ 状态中粒子自旋的反平行，它最好取为

$$Q_{ik}=\frac{1}{4}(1-\boldsymbol{\sigma}_i\boldsymbol{\sigma}_k), \tag{5.4}$$

其中 $\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_i$ 是状态 $i$ 中的粒子自旋算符。把(5.2)式和(5.4)式代入(5.3)式，得：

$$E^{(1)}=\frac{\pi a}{m}\frac{N^2}{V}. \tag{5.5}$$

为了求得第二級修正，我們利用微扰論公式

$$E_n^{(2)}=\sum_{m\neq n}\frac{|(H_{int})_{nm}|^2}{E_n-E_m}. \tag{5.6}$$

将(5.1)式代入后，我們得到如下之和：

$$\frac{2U^2}{V^2}\sum_{iklm}\frac{n_in_k(1-n_l)(1-n_m)Q_{ik}Q_{lm}}{(\boldsymbol{p}_i^2+\boldsymbol{p}_k^2-\boldsymbol{p}_l^2-\boldsymbol{p}_m^2)/2m}. \tag{5.7'}$$

由于我們的目的是求能量按 $a$ 冪的展开，則应如在 §4 中一样，注意到 $U$ 与散射幅的关系式(5.2)不是精确的，而只准确到 $U$ 的一次項。考虑二次項后得到代替(5.2)式的关系：

$$U+\frac{2U^2}{V}\sum_{l,m}\frac{Q_{lm}}{(\boldsymbol{p}_i^2+\boldsymbol{p}_k^2-\boldsymbol{p}_l^2-\boldsymbol{p}_m^2)/2m}=\frac{4\pi a}{m}. \tag{5.2'}$$

1) 这里 $n_i$ 表示无相互作用粒子的填充数。不难理解，$T=0$ 时它們和准粒子的填充数一致，而与相互作用粒子系統的填充数 $N_i$ 不同。



如果由此将 $U$ 通过 $a$ 表达出来，并代入(5.3)式，則在 $E^{(1)}$ 的表达式中也出现比例于 $a^2$ 的項，它們自然应算是二級修正。注意到这一点后，我們就得到能量的二級近似值如下：

$$E^{(2)}=\frac{32a^2\pi^2}{m^2V^2}\sum_{iklm}\left[\frac{n_in_k(1-n_l)(1-n_m)Q_{ik}Q_{lm}}{(\boldsymbol{p}_i^2+\boldsymbol{p}_k^2-\boldsymbol{p}_l^2-\boldsymbol{p}_m^2)/2m}-\right.$$
$$\left.-\frac{n_in_kQ_{ik}Q_{lm}}{(\boldsymbol{p}_i^2+\boldsymbol{p}_k^2-\boldsymbol{p}_l^2-\boldsymbol{p}_m^2)/2m}\right]. \tag{5.7}$$

和(5.7′)式相反，这个表达式在 $\boldsymbol{p}$ 很大时不发散。由此可見，和玻色气体一样，$U$ 的重整化消除能量发散。

(5.2′)式初看是矛盾的，因为左端与 $\boldsymbol{p}_i$ 和 $\boldsymbol{p}_k$ 的夹角有关，而右端与之无关。这好象表明我們取的相互作用能算符不合理。然而实际上完全不必为此担心，因为在(5.2′)式中未計入的是与高阶动量矩有关的諸項，而它們对能量的貢献很小，这在前面已經指出。

(5.7)式第一項中含有四个 $n_i$ 的那部分等于零，这是因为分母对于置换 $i,k\Longleftrightarrow l,m$ 是反对称的，而分子是对称的，同时各求和区間也相同。剩下的含有三个 $n_i$ 的两項彼此相等。因而最終有：

$$E^{(2)}=-\frac{64a^2\pi^2}{m^2V^2}\sum_{iklm}\frac{n_in_kn_lQ_{ik}}{(\boldsymbol{p}_i^2+\boldsymbol{p}_k^2-\boldsymbol{p}_l^2-\boldsymbol{p}_m^2)/2m}. \tag{5.8}$$

从求和变成积分，这个式子可以写成

$$\frac{E^{(2)}}{V}=-\frac{64a^2\pi^2}{m^2(2\pi)^9}\int\limits_{|\boldsymbol{p}_1|<p_0}d\boldsymbol{p}_1\int\limits_{|\boldsymbol{p}_2|<p_0}d\boldsymbol{p}_2\int\limits_{|\boldsymbol{p}_3|<p_0}d\boldsymbol{p}_3\int d\boldsymbol{p}_4\times$$
$$\times\frac{\delta(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_3-\boldsymbol{p}_4)}{(\boldsymbol{p}_1^2+\boldsymbol{p}_2^2-\boldsymbol{p}_3^2-\boldsymbol{p}_4^2)/2m}. \tag{5.9}$$

根据 §2，元激发能的定义为[1]：

$$\varepsilon_i=\frac{\delta E}{\delta n_i}. \tag{5.10}$$

1) 初看之下，此式似不正确，因为 $\varepsilon$ 是 $E$ 对准粒子分布函数的变分导数，而不是对粒子分布函数。然而(5.10)式中的导数不是对于粒子的真实分布，而是对无相互作用的粒子的分布；前面已指出（見 38 頁之注），后者在 $T=0$ 时与相互作用系統准粒子分布一致。

(5.3)和(5.8)式对 $n_i$ 的变分給出:

$$\varepsilon(\boldsymbol{p})=\frac{p^2}{2m}+\frac{2\pi aN}{mV}+$$

$$+\frac{32\pi^2a^2}{m^2(2\pi)^9}\int\limits_{|\boldsymbol{p}_1|<p_0}d\boldsymbol{p}_1\int\limits_{|\boldsymbol{p}_2|<p_0}d\boldsymbol{p}_2\int d\boldsymbol{p}_3\left[\frac{\delta(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_3)}{(p^2+p_3^2-p_1^2-p_2^2)/2m}-\right.$$

$$\left.-2\frac{\delta(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_3)}{(p^2+p_1^2-p_2^2-p_3^2)/2m}\right].\qquad(5.11)$$

这样,为了求得基态能量和元激发的有效质量,就必須計算积分(5.9)和(5.11). 积分相当繁复,因为重数太高,而且积分区域不方便.

可以应用一种更簡单的方法,它基于利用函数 $f$. 如果引入函数

$$f_{ik}=\frac{\delta^2E}{\delta n_i\delta n_k},\qquad(5.12)$$

则根据 §2 的(2.12)和(2.19)式, 可以从而决定有效質量和低頻声速. 由声速經过相应的积分,可求出基态能量.

因此問題就归結为确定 $f$. 先对 $n_i$、再对 $n_k$ 变分(5.3)和(5.8)式,我們得到 $f$ 的下列表达式:

$$f=\frac{8a\pi}{m}Q_{\sigma\sigma'}-$$

$$-\frac{64\pi^2a^2}{m^2(2\pi)^3}\int\limits_{|\boldsymbol{p}_1|<p_0}d\boldsymbol{p}_1\int d\boldsymbol{p}_2\left[Q_{\sigma\sigma'}\frac{\delta(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)}{(p^2+p'^2-p_1^2-p_2^2)/2m}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}\frac{\delta(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p}_2)}{(p^2+p_1^2-p'^2-p_2^2)/2m}+\frac{1}{4}\frac{\delta(\boldsymbol{p}'+\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_2)}{(p'^2+p_1^2-p^2-p_2^2)/2m}\right].\qquad(5.13)$$

計算时我們立即認为 $|\boldsymbol{p}|=|\boldsymbol{p}'|=p_0$. (5.13)式中的积分要比(5.9)和(5.11)式中簡单得多. 結果是:

$$f(\chi)=\frac{2\pi a}{m}\left[1+2a\left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{1/3}\left(2+\frac{\cos\chi}{2\sin\frac{\chi}{2}}\ln\frac{1+\sin\frac{\chi}{2}}{1-\sin\frac{\chi}{2}}\right)\right]-$$



$$-\frac{2\pi a}{m}(\sigma\sigma')\left[1+2a\left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{1/3}\left(1-\frac{\sin\frac{\chi}{2}}{2}\ln\frac{1+\sin\frac{\chi}{2}}{1-\sin\frac{\chi}{2}}\right)\right].\qquad(5.14)$$

所得公式的奇异性值得注意. 当角度 $\chi$ 接近 $\pi$ 时,对于自旋相反的粒子,函数 $f$ 具有对数奇异性:

$$f(\chi)\sim(1-\sigma\sigma')\ln\frac{1}{\pi-\chi}.\qquad(5.15)$$

很清楚,这种情况下前面所述的近似,严格說来是不能用的. 函数 $f$ 在 $\chi=\pi$ 点的奇异性,反映了以 $\pi$ 角相碰的元激发的散射幅的奇异性(見第四章). 为了得到正确的表达式, 須把微扰論級数的主要項求和,这些項中对数的冪次最高(比 $a$ 的冪低一級). 如果認为角 $\chi$ 准确地等于 $\pi$, 但 $\lambda=p^2+p'^2-2p_0^2\neq0$, 则求和的結果使 $f$ 中出現因子

$$\frac{1}{1+a\left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{1/3}\left(\ln\frac{p_0^2}{\lambda}+\frac{i\pi}{2}\right)}\qquad(5.16)$$

(实数部分以对数精确度写出). 根据我們的假定, $a$ 是正数, 故 $\lambda\to0$ 时此式趋向零.

然而对于費米气体, $a<0$ 的情况原则上也是可能的. 与玻色气体相反,这时由于泡利原则的限制,气体仍是稀薄的,并且看来全部公式仍可应用. 可是察看公式(5.16),即知散射幅将在某个 $\lambda$ 的小虚值下具有极点. 这时基态是不稳定的,因为要出現动量和自旋相反的准粒子束縛对 (Cooper 現象),这乃是金属超导的基本原因(見第七章). 这里我們只限于 $a>0$ 的情況.

总之,我們求得的 $f$ 的表达式不适用于接近 $\pi$ 的角度. 但是由于奇异性是对数型的, 它只在奇点的直接邻域中才表現出来. 由于我們感兴趣的各量中只有 $f$ 和正则函数的积分, 函数 $f$ 的对数奇异性并不重要.

把(5.14)式代入(2.12),得到有效質量的值:

$$\frac{m}{m^*} = 1 - \frac{8}{15}(7\ln 2 - 1)a^2\left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{2/3}. \tag{5.17}$$

类似地从声速的表达式(2.19)得到:

$$u^2 = \frac{\pi^{4/3}}{3^{1/3}}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}\frac{1}{m^2} + 2\frac{\pi a}{m^2}\frac{N}{V}\left[1 + \frac{4}{15}a\left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{1/3}(11 - 2\ln 2)\right]. \tag{5.18}$$

由此式不难求得费米液体基态能量. 由此利用关系式(2.16) $u^2 = \frac{N}{m}\frac{\partial\mu}{\partial N}$, 两次积分(5.18)式后得:

$$E = \int \mu dN = E^{(0)} + \frac{\pi a}{m}\frac{N^2}{V}\left[1 + \frac{6}{35}a\left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{1/3}(11 - 2\ln 2)\right]. \tag{5.19}$$

(5.17)和(5.19)式的結果,也可以从(5.9)和(5.11)式直接积分求得. 这說明了对这个模型費米液体理論的基本原則是成立的. 这些原則的一般推导将在第四章中給出.

在結束之前,讓我們和玻色气体一样, 試求粒子的动量分布. 为此須計算矩陣元:

$$\bar{N}_{p,\frac{1}{2}} = \bar{N}_{p,-\frac{1}{2}} = \langle \Psi^* a^+_{p,\frac{1}{2}} a_{p,\frac{1}{2}} \Psi \rangle, \tag{5.20}$$

其中 $\Psi$ 是相互作用粒子的真实波函数. 将按微扰論計算到二級項的函数 $\Psi$(見[16],第 161—162 頁)

$$\Psi_n = \Psi_n^{(0)} + \sum_m{}' \frac{(H_{int})_{mn}\Psi_m^{(0)}}{E_n - E_m} + \sum_m{}' \sum_k{}' \frac{(H_{int})_{mk}(H_{int})_{kn}\Psi_m^{(0)}}{(E_n - E_k)(E_n - E_m)} - $$
$$- (H_{int})_{nn} \sum_m{}' \frac{(H_{int})_{mn}\Psi_m^{(0)}}{(E_n - E_m)^2} - \frac{\Psi_n^{(0)}}{2}\sum_m{}' \frac{|(H_{int})_{mn}|^2}{(E_n - E_m)^2} \tag{5.21}$$

代入. 注意在函数 $\Psi_n^{(0)}$ 的表象中,算符 $a^+_{p\frac{1}{2}}a_{p\frac{1}{2}}$ 是对角的, 我們就得到:

$$\bar{N}_{p\frac{1}{2}} - n_{p\frac{1}{2}} = \sum_m{}' \frac{|(H_{int})_{m0}|^2 \left(n^{(m)}_{p\frac{1}{2}} - n_{p\frac{1}{2}}\right)}{(E_0 - E_m)^2}, \tag{5.22}$$

其中 $n^{(m)}_{p\frac{1}{2}}$ 是无相互作用系統的 $\Psi_m^{(0)}$ 狀态中动量为 $\boldsymbol{p}$、自旋投影为 1/2 的粒子数,而 $n_{p\frac{1}{2}}$ 是在基态的相应粒子数. 已經指出过, 无相互作用的粒子的分布 $n_{p\frac{1}{2}}$ 和 $T = 0$ 时元激发的分布相同.



从(5.1)式代入 $H_{int}$ 后得到:

$$\bar{N}_{p\frac{1}{2}} - n_{p\frac{1}{2}} =$$
$$= \begin{cases} -\dfrac{16\pi^2a^2}{(2\pi)^6m^2}\displaystyle\int\limits_{|p_1|<p_0} d\boldsymbol{p}_1 \int\limits_{|p_2|>p_0} d\boldsymbol{p}_2 \int\limits_{|p_3|>p_0} d\boldsymbol{p}_3 \frac{\delta(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_3)}{[(p^2+p_1^2-p_2^2-p_3^2)/2m]^2}, & \text{当} |\boldsymbol{p}| < p_0, \\ \dfrac{16\pi^2a^2}{(2\pi)^6m^2}\displaystyle\int\limits_{|p_1|>p_0} d\boldsymbol{p}_1 \int\limits_{|p_2|<p_0} d\boldsymbol{p}_2 \int\limits_{|p_3|<p_0} d\boldsymbol{p}_3 \frac{\delta(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_3)}{[(p^2+p_1^2-p_2^2-p_3^2)/2m]^2}, & \text{当} |\boldsymbol{p}| > p_0. \end{cases} \tag{5.23}$$

这样就看出来,粒子的动量分布和准粒子的分布 $n_{p\frac{1}{2}}$ 在 $a$ 的第二級近似才出現差别. (5.23)式对全部 $\boldsymbol{p}$ 的积分显然等于零,这相当于液体粒子数与准粒子数相等. 有意义的是,在 $|\boldsymbol{p}| = p_0$ 处函数 $\bar{N}_{p\frac{1}{2}}$ 有一跃变.

第四章中将証明, 这是費米液体的普遍性質.

(5.23) 式的积分計算結果[1]是相当繁杂的,我們不在此一一写出. 下面引的是某些极限情况的值:

$$N_{0,\frac{1}{2}} = 1 - 2a^2\left(\frac{3}{\pi}\frac{N}{V}\right)^{2/3}\left(1 - \frac{1}{2}\ln 2\right),$$
$$N_{p_0-0,\frac{1}{2}} = 1 - 2a^2\left(\frac{3}{\pi}\frac{N}{V}\right)^{2/3}\left(\frac{1}{3} + \ln 2\right),$$
$$N_{p_0+0,\frac{1}{2}} = 2a^2\left(\frac{3}{\pi}\frac{N}{V}\right)^{2/3}\left(\ln 2 - \frac{1}{3}\right), \tag{5.24}$$
$$N_{p_0-0,\frac{1}{2}} - N_{p_0+0,\frac{1}{2}} = 1 - 4a^2\left(\frac{3}{\pi}\frac{N}{V}\right)^{2/3}\ln 2,$$
$$N_{p\gg p_0,\frac{1}{2}} = \frac{16a^2}{9}\left(\frac{3}{\pi}\frac{N}{V}\right)^{2/3}\left(\frac{p_0}{p}\right)^4.$$

这样,当 $p < p_0$ 时函数 $N_p$ 接近 1, 并且随 $p$ 从 0 到 $p_0$ 而略有減少. 然后 $N_p$ 跃变减少到数量级为 $a^2\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}$, 当 $p \gg p_0$ 时它比例于 $a^2\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}\left(\frac{p_0}{p}\right)^4$ 而減少.

---

1) 这些計算是 B. A. Беляков[84] 完成的.

# 第二章　$T=0$ 时的量子場論方法

## §6. 相互作用表象

上一章里叙述的二次量子化方法的形式对求解許多問題是不适用的. 事实上它只能用于粒子間相互作用弱的情况. 这时或者可借助微扰論, 或者哈密頓量已大为簡化, 以致很容易进行对角化. 但是更常遇見的情况是, 不能局限于微扰論級数的前几項. 于是必須有一种方法, 使得能按照簡单明了的規則写出微扰論級数的任何一項.

常常由于某种物理条件, 使我們可以从微扰論級数的全部項中分出所謂"主要項"(其数量級远超过其它各項)的序列(通常是无限序列), 这时問題就归結为这个序列的求和.

在更一般的情况下, 当微扰論級数各項为同一数量級时, 理論的任务就在于寻求各种普遍关系(例如将費米边界动量 $P_0$ 和液体粒子数联系起来的(2.1)式, 它是兰道的費米液体理論的基础). 本章里发展的图解方法借自量子場論, 它最适用于这些目的[1].

为了开始叙述量子場論方法, 我們先把二次量子化工具的表述形式略加改变. 引入"粒子場"算符:

$$
\begin{aligned}
\psi(\xi) &= \sum_i \varphi_i(\xi) a_i, \\
\psi^+(\xi) &= \sum_i \varphi_i^*(\xi) a_i^+,
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

这里 $a_i$, $a_i^+$ 是我們在上一章里已見过的二次量子化算符, $\varphi_i(\xi)$ 是粒子在状态 $i$ 的波函数. 算符 $\psi(\xi)$ 和 $\psi^+(\xi)$ 可以相应地解释为在 $\xi$-空間中給定点的粒子的消灭和产生算符. 从 §3 得到这些

1) 可参閱[25]. (或参閱[78]——譯者注).



算符之間的对易关系:

$$
\begin{aligned}
&\psi(\xi)\psi^+(\xi') \mp \psi^+(\xi')\psi(\xi) = \delta(\xi-\xi'), \\
&\psi(\xi)\psi(\xi') \mp \psi(\xi')\psi(\xi) = 0, \\
&\psi^+(\xi)\psi^+(\xi') \mp \psi^+(\xi')\psi^+(\xi) = 0,
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

这里上面的符号对应于玻色統計, 下面的符号对应費米統計. 单粒子算符 $F^{(1)}$ 在新的表象中写成

$$
F^{(1)} = \int \psi^+(\xi) f^{(1)} \psi(\xi) d\xi. \tag{6.3}
$$

双粒子算符以及更复杂的算符都可以类似地写出.

哈密頓量也不难通过算符 $\psi$ 和 $\psi^+$ 表示. 例如对自旋为 1/2 的粒子的系統, 无磁場存在时哈密頓量的形状为

$$
\begin{aligned}
H = &\int \left[\frac{1}{2m}\nabla\psi_\alpha^+(\boldsymbol{r})\nabla\psi_\alpha(\boldsymbol{r}) + U(\boldsymbol{r})\psi_\alpha^+(\boldsymbol{r})\psi_\alpha(\boldsymbol{r})\right] d\boldsymbol{r} + \\
&+ \frac{1}{2}\iint \psi_\alpha^+(\boldsymbol{r})\psi_\beta^+(\boldsymbol{r}')U^{(2)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\psi_\beta(\boldsymbol{r}')\psi_\alpha(\boldsymbol{r}) d\boldsymbol{r} d\boldsymbol{r}' + \cdots
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

这里假定粒子間的相互作用与自旋无关. 角标 $\alpha$ 和 $\beta$ 表示自旋的投影, 同时对出现两次的同一角标要进行求和. 自旋为零的玻色粒子系統, 哈密頓量的不同仅在于算符 $\psi$ 不带角标. 推广到更复杂的情形也是不难的.

(6.4)式的外形相当于 $N$ 粒子系統的平均能量, 这些粒子处于同样的状态 $\psi_\alpha(\boldsymbol{r})$, 而且态的归一条件是 $\int|\psi_\alpha|^2 d\boldsymbol{r} = N$. 借助这个相似性, 总可以容易地写出二次量子化表象中的哈密頓量.

除了哈密頓量以外, 在給定点的粒子密度算符也有重要意义. 由于在普通表象中它的形状是 $n(\boldsymbol{r}) = \sum_a \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a)$, 我們就得到

$$
n(\boldsymbol{r}) = \int \psi_\alpha^+(\boldsymbol{r}_a)\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a)\psi_\alpha(\boldsymbol{r}_a) d\boldsymbol{r}_a = \psi_\alpha^+(\boldsymbol{r})\psi_\alpha(\boldsymbol{r}). \tag{6.5}
$$

粒子数算符相应为

$$
N = \int n(\boldsymbol{r}) d\boldsymbol{r} = \int \psi_\alpha^+(\boldsymbol{r})\psi_\alpha(\boldsymbol{r}) d\boldsymbol{r}.
$$

現在假設有一个哈密頓量为 $H$ 的粒子系統. 为了确定这个系

統的状态如何随时間变化，需要解薛定格方程：

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t}=H\Phi \tag{6.6}$$

($\Phi$ 是系統的波函数)．方程式(6.6)的形式解可以写成[1]：

$$\Phi(t)=e^{-iHt}\Phi_H, \tag{6.7}$$

這里 $\Phi_H$ 是与时間无关的函数．

任意算符 $F$ 的矩陣元随时間的变化可借助(6.7)式求得：

$$F_{nm}(t)=\langle\Phi_n^*(t)F\Phi_m(t)\rangle=\langle\Phi_{Hn}^*e^{iHt}Fe^{-iHt}\Phi_{Hm}\rangle. \tag{6.8}$$

最后一个表达式可以看成算符

$$\tilde{F}(t)=e^{iHt}Fe^{-iHt}. \tag{6.9}$$

对函数 $\Phi_H$ 的矩陣元．

这相当于变換到新的表象，它叫作海森堡表象．而前面討論的表象，其中算符与时間无关(例如 $\psi(r)$ 和 $\psi^+(r)$)，称为薛定格表象．海森堡表象的最重要的性質是波函数 $\Phi_H$ 与时間无关．时間关系都轉到了算符上；从(6.9)式得

$$\frac{\partial\tilde{F}}{\partial t}=i(H\tilde{F}-\tilde{F}H)\equiv i[H,\tilde{F}]. \tag{6.10}$$

在薛定格表象中情況正好相反．算符与时間无关(如果不討論交变外場)，而波函数随时間变化．从(6.9)式看出，哈密頓量在两个表象中是一样的．

如果討論系統的穩定态，則波函数 $\Phi_{Hn}$ 滿足方程

$$H\Phi_{Hn}=E_n\Phi_{Hn}. \tag{6.11}$$

这时从(6.8)式得：

$$F_{nm}(t)=\langle\Phi_{Hn}^*F\Phi_{Hm}\rangle e^{i(E_n-E_m)t}. \tag{6.12}$$

以无自旋的无相互作用粒子系統为例．取自由粒子函数 $\frac{1}{\sqrt{V}}=e^{ipr}$ ($V$—体积)为 $\varphi_i(\xi)$．算符 $\psi$ 在薛定格表象中的形式是

$$\psi(r)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_p a_pe^{ipr}. \tag{6.13}$$

1) 算符 $e^{-iHt}$ 是級数 $1-iHt+\cdots+\frac{1}{n!}(-iHt)^n+\cdots$ 的形式写法．



借助(6.4)式我們看出，哈密頓量在薛定格表象中具有(3.13)的形式，卽 $H=\sum\varepsilon_0(p)n_p$，其中 $\varepsilon_0(p)$ 为自由粒子能量．因此从(6.9)式求出海森堡表象中的算符 $\tilde{\psi}(r,t)$ 为

$$\tilde{\psi}(r,t)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_p e^{i\sum_{p'}\varepsilon_0(p')n_{p'}t}a_pe^{-i\sum_{p''}\varepsilon_0(p'')n_{p''}t}e^{ipr}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_p a_pe^{i[pr-\varepsilon_0(p)t]}. \tag{6.14}$$

必須指出，一般地說，海森堡算符 $\tilde{\psi}(r,t)$ 并不滿足相应的薛定格算符的对易关系(6.2)．然而当諸 $\tilde{\psi}$ 算符取在同一时刻，从(6.9)和(6.2)看出，它們的对易关系和薛定格算符 $\psi(r)$ 一致．

除了以上两个表象，还有一个对以后很重要的中間类型表象，称为相互作用表象．这个表象的性質是量子場論方法的基础．

从哈密頓量中分出粒子相互作用的部分 $H_{int}$：

$$H=H_0+H_{int}, \tag{6.15}$$

同时将系統的薛定格波函数作如下变換：

$$\Phi_i=e^{iH_0t}\Phi. \tag{6.16}$$

对时間微分函数 $\Phi_i$，我們得到：

$$i\frac{\partial\Phi_i}{\partial t}=-H_0\Phi_i+e^{iH_0t}(H_0+H_{int})\Phi=e^{iH_0t}H_{int}e^{-iH_0t}\Phi_i. \tag{6.17}$$

因此

$$i\frac{\partial\Phi_i}{\partial t}=H_{int}(t)\Phi_i,\qquad H_{int}(t)=e^{iH_0t}H_{int}e^{-iH_0t}. \tag{6.18}$$

相互作用表象由 $\Phi_i$ 函数給出．这个表象中的任何算符可以从薛定格表象的算符按定义 $H_{int}(t)$ 的同一公式(6.18)求出．由此还看出，这个表象中的任何算符 $F(t)$ 滿足方程式

$$\frac{\partial F(t)}{\partial t}=i[H_0,F(t)], \tag{6.19}$$

卽无相互作用粒子系統海森堡算符所滿足的方程．这样我們就得到結論：相互作用表象中所有的算符与无相互作用系統的海森堡

算符一样，而波函数满足哈密頓量为 $H_{int}(t)$ 的薛定格方程式．能够利用"自由"算符是这个表象的一大优点．

現在決定相互作用表象中函数 $\Phi_i(t)$ 与时間的关系．既然不同时刻的諸算符 $H_{int}(t)$ 互不对易，我們就不能把方程式(6.17)的解簡单写作

$$\Phi_i(t) = \text{const}\, e^{-i\int^t H_{int}(t')dt'}.$$

必須按下列方式处理．設我們已知函数 $\Phi_i$ 在某一时刻 $t_0$ 的值．在方程式(6.17)两端对时間从 $t_0$ 积分到 $t(t > t_0)$，于是从微分方程式得到积分方程式：

$$\Phi_i(t) = \Phi_i(t_0) - i\int_{t_0}^{t} H_{int}(t')\Phi_i(t')dt'.$$

我們将这个方程式的解按 $H_{int}$ 的值展成級数：

$$\Phi_i(t) = \Phi_i^{(0)}(t) + \Phi_i^{(1)}(t) + \cdots$$

零級近似下 $\Phi_i^{(0)}(t) = \Phi_i(t_0)$．一級近似下

$$\Phi_i^{(1)}(t) = -i\int_{t_0}^{t} H_{int}(t_1)dt_1\Phi_i(t_0);$$

第二級近似是

$$\Phi_i^{(2)}(t) = -\int_{t_0}^{t} H_{int}(t_1)dt_1\int_{t_0}^{t_1} H_{int}(t_2)dt_2\Phi_i(t_0);$$

第 $n$ 級近似是

$$\Phi_i^{(n)}(t) = (-i)^n\int_{t_0}^{t} H_{int}(t_1)dt_1\int_{t_0}^{t_1} H_{int}(t_2)dt_2\cdots \cdots\int_{t_0}^{t_{n-1}} H_{int}(t_n)dt_n\Phi_i(t_0).$$

从 $\Phi_i(t)$ 的級数結构看出，整个結果可以記为

$$\Phi_i(t) = S(t, t_0)\Phi_i(t_0), \qquad (6.20)$$

式中矩陣 $S(t, t_0)$ 由以下級数定义：

$$S(t, t_0) = 1 - i\int_{t_0}^{t} H_{int}(t_1)dt_1 + \cdots$$

$$\cdots + (-i)^n\int_{t_0}^{t} H_{int}(t_1)dt_1\cdots\int_{t_0}^{t_{n-1}} H_{int}(t_n)dt_n + \cdots \qquad (6.21)$$



級数(6.21)的特点是，时刻較迟的算符 $H_{int}$ 总是位于时刻較早的算符左面，因为总有

$$t > t_1 > t_2 > \cdots > t_n > t_0.$$

可令表达式(6.21)更为对称．討論級数的第 $n$ 項

$$(-i)^n\int\cdots\cdots\int_{t>t_1\cdots>t_0} H_{int}(t_1)H_{int}(t_2)\cdots H_{int}(t_n)dt_1dt_2\cdots dt_n$$

并将积分变量作任意置换 $t_1, \cdots, t_n \to t_{p_1}, t_{p_2}, \cdots, t_{p_n}$，积分的数值自然不因此而改变．作完一切可能的变量 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 的置换，把結果相加并除以置换数($n!$)，我們就使每个变量的积分范围都扩展到了整个从 $t_0$ 到 $t$ 的区間．重要的是要使积分号下的諸算符 $H_{int}$ 总是从左至右按时間的递減順序排列．以符号 $T$ 表示这种編时运算，就可以将級数的第 $n$ 項写成

$$S^{(n)}(t, t_0) = \frac{(-i)^n}{n!}\int_{t_0}^{t}\cdots\int_{t_0}^{t} T\{H_{int}(t_1)\cdots H_{int}(t_n)\}dt_1\cdots dt_n. \qquad (6.22)$$

現在不难驗証，整个(6.21)式可以写成

$$S(t, t_0) = T\exp\left\{-i\int_{t_0}^{t} H_{int}(t')dt'\right\}, \qquad (6.23)$$

为此只須将指数展开并利用編时算符 $T$ 的定义．算符 $S(t, t_0)$ 显然具有以下性质：

$$S(t_2, t_1)S(t_1, t_0) = S(t_2, t_0) \quad t_2 > t_1 > t_0. \qquad (6.24)$$

(6.16)和(6.18)式确定了薛定格表象和相互作用表象的关系．由(6.20)式可以求得相互作用表象和海森堡表象的联系．假設波函数的变换式为

$$\Phi_i(t) = Q(t)\Phi_H,$$

其中 $Q$ 是幺正算符．从(6.20)式得

$$Q(t) = S(t, t_0)Q(t_0),$$

由此参考(6.24)式得

$$Q(t) = S(t, a)P,$$

其中 $a$ 是某一时刻，而 $P$ 是与时間无关的算符．为了确定 $P$，我們

把(6.16)和(6.7)式代入关系式 $\Phi_i(t)=Q(t)\Phi_H$，即把 $\Phi_i$ 和 $\Phi_H$ 都通过薛定格函数 $\Phi$ 表示出来。这就得到:

$$e^{iH_0t}=S(t,\alpha)Pe^{iHt}.$$

注意 $S(\alpha,\alpha)=1$，得

$$P=e^{iH_0\alpha}e^{-iH\alpha}.$$

最好在这一步上利用所謂"寖漸引入相互作用"的假定[1]。設在时刻 $t=-\infty$ 粒子間沒有相互作用，以后无限慢地"引入"作用。如果这时令 $\alpha$ 趋向 $-\infty$，則 $P\to1$，因此

$$\Phi_i(t)=S(t)\Phi_H, \tag{6.25}$$

此处

$$S(t)=S(t,-\infty). \tag{6.26}$$

利用性質(6.24)，得

$$S(t_2,t_1)=S(t_2)S^{-1}(t_1). \tag{6.27}$$

基于(6.25)式，相互作用表象和海森堡表象的算符有如下关系:

$$\tilde{F}(t)=S^{-1}(t)\boldsymbol{F}(t)S(t). \tag{6.28}$$

以后我們常会遇見几个海森堡算符的編时乘积对系統基态 $\Phi_H^0$ 的平均值

$$\langle\Phi_H^{0*}T[\tilde{A}(t)\tilde{B}(t')\tilde{C}(t'')\cdots]\Phi_H^0\rangle. \tag{6.29}$$

对費米算符我們把推导(6.23)式时所定义的編时算符 $T$ 略为推广，而对玻色算符仍保留原来定义。費米算符 $A(t_1)B(t_2)C(t_3)\cdots$ 的 $T$ 乘积的意义是：按时間遞減順序从左向右排列的乘积，再乘以 $(-1)^P$，其中 $P$ 是从 $A(t_1)B(t_2)C(t_3)\cdots$ 变换到編时乘积所需的費米算符置換次数。例如 $F_1(t_1)$, $F_2(t_2)$ 是費米算符，而 $B_1(t_3)$, $B_2(t_4)$ 是玻色算符，則

$$T\{F_1(t_1)F_2(t_2)\}=\begin{cases}F_1(t_1)F_2(t_2), & t_1>t_2,\\ -F_2(t_2)F_1(t_1), & t_1<t_2,\end{cases}$$

$$T\{B_1(t_3)F_1(t_1)\}=\begin{cases}B_1(t_3)F_1(t_1), & t_3>t_1,\\ F_1(t_1)B_1(t_3), & t_3<t_1,\end{cases}$$

1) 必須立刻強調指出，这里利用的"寖漸引入相互作用"純系形式。利用它可以最快地得到正确結果，但这一步并非必需(參看[26])。



$$T\{B_1(t_3)B_2(t_4)\}=\begin{cases}B_1(t_3)B_2(t_4), & t_3>t_4,\\ B_2(t_4)B_1(t_3), & t_3<t_4.\end{cases}$$

对算符 $H_{int}(t)$，新的 $T$ 乘积定义与原来定义重合，因为在 $H_{int}$ 中費米算符总是成对出現。当然，編时运算的規則对海森堡表象和相互作用表象中的算符是相同的。

設在(6.29)式中时間順序为

$$t>t'>t''>\cdots$$

按(6.28)式变换到相互作用表象算符。这时得到

$$\begin{aligned}&\langle\Phi_H^{0*}S^{-1}(t)\boldsymbol{A}(t)S(t)S^{-1}(t')\boldsymbol{B}(t')S(t')\cdots\Phi_H^0\rangle=\\&=\langle\Phi_H^{0*}S^{-1}(\infty)S(\infty,t)\boldsymbol{A}(t)S(t,t')\boldsymbol{B}(t')\cdots\Phi_H^0\rangle=\\&=\langle\Phi_H^{0*}S^{-1}(\infty)T[\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{B}(t')\boldsymbol{C}(t'')\cdots S(\infty)]\Phi_H^0\rangle.\end{aligned} \tag{6.30}$$

显然，从(6.29)式到(6.30)式的变换与时間 $t, t', t''\cdots$ 的順序无关，即在任何情况下都成立。

現在我們只須决定 $\Phi_H^{0*}S^{-1}(\infty)=[S(\infty)\Phi_H^0]^*$，即算符 $S(\infty)$ 作用于基态波函数的結果。从(6.20)和(6.25)式得:

$$\Phi_H^0=\Phi_i(-\infty),\; S(\infty)\Phi_H^0=\Phi_i(\infty).$$

这样，$S(\infty)\Phi_H^0$ 就是函数 $\Phi_i(\infty)$，它是由基态波函数 $\Phi_i(-\infty)$ 寖漸引入粒子間相互作用而得到的。大家知道，系統的基态，即能量最低的态，必然是非簡并的。同时由量子力学的一般原理(見[16]，第173頁)知道，处于某个非簡并稳定态的系統不能在无限慢扰动影响下跃迁到另一个态。因此我們的結論是函数 $\Phi_i(\infty)=S(\infty)\Phi_H^0$ 与函数 $\Phi_H^0$ 只能差一相因子

$$S(\infty)\Phi_H^0=e^{iL}\Phi_H^0. \tag{6.31}$$

由此得到最終結果

$$\langle\Phi_H^{0*}T[\tilde{A}(t)\tilde{B}(t')\tilde{C}(t'')\cdots]\Phi_H^0\rangle=\frac{\langle\Phi_H^{0*}T[\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{B}(t')\boldsymbol{C}(t'')\cdots S(\infty)]\Phi_H^0\rangle}{\langle\Phi_H^{0*}S(\infty)\Phi_H^0\rangle}. \tag{6.32}$$

我們在此強調一下，这个結論只适用于对系統基态的平均值，因为系統的任何其它能級都是多重簡并的，因而系統可能因粒子間碰撞而跃迁至其它状态。这就是說，对激发态平均时成立的是

(6.30)式,而不是(6.32)式.

在这一章里我們将只討論处于 $T=0$,即基态的系統. 为了簡化起見,我們把相应的平均記为$\langle\cdots\rangle$,并用普通字母表示相互作用表象中的算符. 凡是必須写薛定格算符的地方,我們将強調指出它們只与坐标有关(例如 $\psi(\boldsymbol{r})$)并且临时説明.

## §7. 格林函数[1]

**1. 定义. 自由粒子的格林函数.** 量子場論方法中描述系統微观性质的最重要的量之一是单粒子格林函数[2]. 它的定义是

$$G_{\alpha\beta}(x, x') = -i\langle T(\tilde{\psi}_\alpha(x)\tilde{\psi}^+_\beta(x'))\rangle. \tag{7.1}$$

$x$(或 $x'$)是四个变量——坐标 $\boldsymbol{r}$ 和时間 $t$ 的集合; $\alpha$ 和 $\beta$ 是自旋角标.

知道了格林函数,就可以算出任何如(3.2)式类型的单粒子算符对基态的平均值. 其实由(6.3)式有:

$$\overline{F^{(1)}} = \pm i\int\left[\lim_{\substack{t'\to t+0\\ \boldsymbol{r}'\to\boldsymbol{r}}} f^{(1)}_{\alpha\beta}(x)G_{\beta\alpha}(x, x')\right]d\boldsymbol{r}$$

(玻色統計取正号,費米統計取負号). 例如粒子密度和粒子流密度相应为

$$n(x) = \pm i\lim_{\substack{t'\to t+0\\ \boldsymbol{r}'\to\boldsymbol{r}}} G_{\alpha\alpha}(x, x'),$$

$$j(x) = \pm\frac{1}{m}\lim_{\substack{t'\to t+0\\ \boldsymbol{r}'\to\boldsymbol{r}}}(\nabla_{\boldsymbol{r}} - \nabla_{\boldsymbol{r}'})G_{\alpha\alpha}(x, x').$$

以后我們将証明,借助格林函数可以将能量作为体积的函数求出,从而得到系統在 $T=0$ 时的状态方程式(压力与密度的关系). 此外还要証明,格林函数(7.1)式的傅立叶分量的极点决定元激发譜. 这就使我們有可能求得系統在温度不为零时(当然,还

1) 本节材料大部分取自 В. М. Галицкий 和 А. Б. Мигдал 的論文[27].

2) 場論中"格林函数"一詞的意义与綫性方程式理論中不同. 虽然它也满足右端为 $\delta$-函数的方程式,但后者通常是非綫性的(見 §10). 自由粒子格林函数是例外,它們具是海森堡場算符 $\tilde{\psi}(\boldsymbol{r}, t)$ 綫性方程式的格林函数. "格林函数"一詞最初只用于这种情况,后来推广到任意相互作用系統的(7.1)式.



要足够低)的热力学函数.

还有一个情况使得格林函数有重要意义,这就是可以借助图解法計算它們(見 §8 和 9),这种方法比普通形式的微扰論方法具有更多优点.

在这一节里我們将分析格林函数的一般性质. 为了簡化符号,我們把角标 $\alpha, \beta$ 略去不写. 这不会引起錯誤,因为沒有鉄磁性与外磁場时, $G_{\alpha\beta}$ 的形状本来就是 $G_{\alpha\beta} = G\delta_{\alpha\beta}$. 这里我們只限于討論此种情形.

我們在本章里只研究費米粒子系統,这是因为玻色系統在絕对零度下具有許多本质上的特殊之处,它們与凝聚体的存在有关(第五章专門論述玻色系統). 固体振动的量子——声子是例外. 由于它們的数目不定,声子气体中不发生凝聚,因而可以用普通方法研究它們的性质.

空間无限的均匀系統的格林函数,在沒有外場存在时只与坐标差 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$ 和 $t-t'$ 有关. 将 $G$ 展成傅立叶积分

$$G(x-x') = \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}G(\boldsymbol{p}, \omega)e^{i[\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')-\omega(t-t')]} \tag{7.2}$$
$$(d^4p = d\boldsymbol{p}d\omega).$$

对于无相互作用的粒子系統很容易求出函数 $G(\boldsymbol{p},\omega)$. 在費米粒子情况下只須把自由場海森堡算符的表达式(6.14)代入(7.1)式,并注意到,所有 $|\boldsymbol{p}|<p_0$ 的能級被占滿,而 $|\boldsymbol{p}|>p_0$ 的能級空着,就得到:

$$G^{(0)}(x) = -\frac{i}{V}\sum_{\boldsymbol{p}} e^{i(\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}-\varepsilon_0(\boldsymbol{p})t)}\begin{cases}1-n_{\boldsymbol{p}}, & t>0,\\ -n_{\boldsymbol{p}}, & t<0,\end{cases} \tag{7.3}$$

其中

$$n = \langle a^+_{\boldsymbol{p}}a_{\boldsymbol{p}}\rangle = \begin{cases}1, & |\boldsymbol{p}|<p_0,\\ 0, & |\boldsymbol{p}|>p_0.\end{cases}$$

变换到动量表象. 由(7.3)式得:

$$G^{(0)}(\boldsymbol{p}, \omega) = -i\left\{\theta(|\boldsymbol{p}|-p_0)\int_0^\infty e^{i[\omega-\varepsilon_0(\boldsymbol{p})]t}dt - \right.$$
$$\left. -\theta(p_0-|\boldsymbol{p}|)\int_0^\infty e^{-i[\omega-\varepsilon_0(\boldsymbol{p})]t}dt\right\}, \tag{7.4}$$

其中

$$\theta(z)=\begin{cases}1, & z>0,\\ 0, & z<0.\end{cases}$$

$G(\boldsymbol{p},\omega)$的表达式包含如下的两个积分

$$\int_0^\infty e^{ist}dt.$$

我們将这类积分定义为极限

$$\lim_{\delta\to+0}\int_0^\infty e^{ist-\delta t}dt=i\lim_{\delta\to+0}\frac{1}{s+i\delta}. \tag{7.5}$$

分母中的 $i\delta$ 决定这个函数积分时繞过极点 $s=0$ 的方式,即

$$\int F(s)\frac{ds}{s+i\delta}=⨍\frac{F(s)}{s}ds-i\pi F(0),$$

这里 $⨍$ 表示积分主值．这样,就可以写成

$$\frac{1}{s+i\delta}=\frac{1}{s}-i\pi\delta(s).$$

有时用符号 $\delta_+(s)$ 表示 $\frac{1}{\pi}\frac{i}{s+i\delta}$:

$$\delta_+(s)=\delta(s)-\frac{1}{i\pi s}. \tag{7.6}$$

借助(7.4)和(7.5)式就得到

$$G^{(0)}(\boldsymbol{p},\omega)=\frac{\theta(|\boldsymbol{p}|-p_0)}{\omega-\varepsilon_0(\boldsymbol{p})+i\delta}+\frac{\theta(p_0-|\boldsymbol{p}|)}{\omega-\varepsilon_0(\boldsymbol{p})-i\delta}.$$

注意 $|\boldsymbol{p}|<p_0$ 和 $|\boldsymbol{p}|>p_0$ 时 $G$ 的表达式的全部差别就在于 $\delta$ 的符号,我們可以最終写成:

$$G^{(0)}(\boldsymbol{p},\omega)=\frac{1}{\omega-\varepsilon_0(\boldsymbol{p})+i\delta\,\mathrm{sign}(|\boldsymbol{p}|-p_0)}. \tag{7.7}$$

现在討論声子系統．我們只限于最簡单的情况——各向同性連續介质中的縱振动．

首先要决定,什么是声子場算符．

将介质中点的位移記为$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r},t)$．单位体积的动量等于$\rho\dot{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{r},t)$,其中 $\rho$ 是密度． 由量子力学知道,$\boldsymbol{q}$ 和 $\dot{\boldsymbol{q}}$ 要换成具有以下对易关系的算符

$$\rho[\dot{q}_i(\boldsymbol{r},t),q_k(\boldsymbol{r}',t)]=-i\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta_{ik}. \tag{7.8}$$

对小体积 $d\boldsymbol{r}$ 积分(7.8)式,就得出坐标和动量的普通对易规則．

把算符 $\boldsymbol{q}$ 按平面波展开．这时波矢 $\boldsymbol{k}$ 单值地决定頻率,后者我們記为 $\omega_0(\boldsymbol{k})$．这样就有

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\{q_{\boldsymbol{k}}e^{i[\boldsymbol{kr}-\omega_0(\boldsymbol{k})t]}+q_{\boldsymbol{k}}^+e^{-i[\boldsymbol{kr}-\omega_0(\boldsymbol{k})t]}\}. \tag{7.9}$$

我們討論縱波,因此矢量 $\boldsymbol{q}$ 的傅立叶分量与波矢 $\boldsymbol{k}$ 方向一致． 我們将使用 $\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{k}}$ 在 $\boldsymbol{k}$ 方向上的投影,并将它記作 $q_{\boldsymbol{k}}$.

引入算符 $b_{\boldsymbol{k}}$,它和$q_{\boldsymbol{k}}$ 的关系是

$$q_{\boldsymbol{k}}=\frac{b_{\boldsymbol{k}}}{\sqrt{2\rho\omega_0(\boldsymbol{k})}}. \tag{7.10}$$

这时从(7.8)式看出,$b_{\boldsymbol{k}}$ 满足玻色产生和消灭算符的普通对易关系．

振动动能算符等于

$$K=\frac{\rho}{2}\int[\dot{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{r},t)]^2d\boldsymbol{r}. \tag{7.11}$$

振动的平均动能等于平均位能,故可得公式:

$$\overline{H}=2\overline{K}=\sum_{\boldsymbol{k}}\omega_0(\boldsymbol{k})\left(n_{\boldsymbol{k}}+\frac{1}{2}\right), \tag{7.12}$$

其中 $n_{\boldsymbol{k}}=\langle b_{\boldsymbol{k}}^+b_{\boldsymbol{k}}\rangle$.

本来可以取位移算符 $\boldsymbol{q}$ 为自由声子場算符．但是为了以后討論金属中的电声子作用时(见§8)更方便,我們把定义略加改变:

$$\tilde{\varphi}(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\sqrt{\frac{\omega_0(\boldsymbol{k})}{2}}\{b_{\boldsymbol{k}}e^{i[\boldsymbol{kr}-\omega_0(\boldsymbol{k})t]}+b_{\boldsymbol{k}}^+e^{-i[\boldsymbol{kr}-\omega_0(\boldsymbol{k})t]}\}. \tag{7.13}$$

如果对 $\boldsymbol{k}$ 求和时加上限制条件 $|\boldsymbol{k}|<k_D$,这就是德拜模型(见§1)中縱声子的公式．

再強調一次,声子場算符是实的,因为它們相应于晶格原子的实位移． 当考虑了声子之間以及它們和其它粒子的相互作用时,

这个性质也显然不变。

声子格林函数通常用字母 $D$ 表示。它的定义和(7.1)式相似：

$$D(x, x') = -i\langle T(\tilde{\varphi}(x)\tilde{\varphi}(x'))\rangle. \tag{7.14}$$

将(7.13)式的自由算符作为 $\tilde{\varphi}(x)$ 代入，并注意基态没有声子，就得到

$$D^{(0)}(x) = -\frac{i}{V}\sum_{k}\frac{\omega_0(k)}{2}\begin{cases} e^{i[kr-\omega_0(k)t]}, & t>0, \\ e^{-i[kr-\omega_0(k)t]}, & t<0. \end{cases} \tag{7.15}$$

对 $r$ 和 $t$ 取这个表达式的傅立叶分量，有

$$D^{(0)}(k, \omega) = \frac{\omega_0(k)}{2}\left[\frac{1}{\omega-\omega_0(k)+i\delta} - \frac{1}{\omega+\omega_0(k)-i\delta}\right] =$$

$$= \frac{\omega_0^2(k)}{\omega^2-\omega_0^2(k)+i\delta}. \tag{7.16}$$

**2. 解析性质.** 现在討論相互作用粒子系統格林函数的一般性質。从費米系統开始。变换成薛定格算符，我們得到：

$$G(r-r', t-t') = -i\langle e^{iHt}\psi(r)e^{-iH(t-t')}\psi^+(r')e^{-iHt'}\rangle =$$

$$= -i\sum_{s}\langle \Phi_H^{0*} e^{iHt}\psi(r)e^{-iHt}\Phi_s\rangle\langle \Phi_s^* e^{iHt'}\psi^+(r')e^{-iHt'}\Phi_H^0\rangle =$$

$$= -i\sum_{s}\psi_{0s}(r)\psi_{s0}^+(r')e^{-i(E_s-E_0)(t-t')}, \qquad t>t',$$

$$G(r-r', t-t') = i\sum_{s'}\psi_{0s'}^+(r')\psi_{s'0}(r)e^{i(E_{s'}-E_0)(t-t')}, \qquad t<t'.$$

对于均匀系統矩陣元 $\psi_{nm}(r)$ 和 $\psi_{nm}^+(r)$ 与坐标关系是：

$$\psi_{nm}(r) = \psi_{nm}(0)e^{-ip_{nm}r}, \quad \psi_{nm}^+(r) = \psi_{nm}^+(0)e^{-ip_{nm}r},$$

其中 $p_{nm} = p_n - p_m$，而 $p_n$ 和 $p_m$ 是系統在状态 $n$ 和 $m$ 中的动量[1]。令 $p_0 = 0$；得

$$G(r-r', t-t') = -i\sum_{s}|\psi_{0s}(0)|^2 e^{ip_s(r-r')}e^{-i(E_s-E_0)(t-t')}, \quad t>t',$$

1) 这是因为根据量子力学（見[16]，第58頁）空間平移算符是 $e^{ipr}$（$p$ 是动量算符）。因此 $\psi(r) = e^{-ipr}\psi(0)e^{ipr}$。順便指出，如果将 $\psi(r)$ 表示为 $\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum a_p e^{ipr}$，則显然得到 $\psi_{nm}(0) = \frac{1}{\sqrt{V}}(a_{-p_{nm}})_{nm}$。



$$G(r-r', t-t') = i\sum_{s'}|\psi_{s'0}(0)|^2 e^{-ip_{s'}(r-r')}e^{i(E_{s'}-E_0)(t-t')},$$
$$t<t'. \tag{7.17}$$

算符 $\psi^+(r)$ 使粒子数增加一个。因此 $t>t'$ 时对 $s$ 的求和是按粒子数为 $N+1$ 的态进行，而 $t<t'$ 时对 $s'$ 的求和是按粒子数为 $N-1$ 的态进行。引入符号

$$E_s - E_0(N) = \varepsilon_s + \mu, \tag{7.18}$$

其中

$$\varepsilon_s = E_s - E_0(N+1) \tag{7.19}$$

是系統的激发能，它根据定义应为正量，而 $\mu = E_0(N+1) - E_0(N)$ 是 $T=0$ 时的化学势。与此类似

$$E_{s'} - E_0(N) = E_{s'} - E_0(N-1) -$$
$$- [E_0(N) - E_0(N-1)] = \varepsilon_{s'} - \mu'. \tag{7.18'}$$

最后一式中的 $\varepsilon_{s'}$ 和 $\mu'$ 是对粒子数为 $N-1$ 的系統引入的。然而可以認为 $\varepsilon_s = \varepsilon_{s'}$，$\mu = \mu'$。这样带来的誤差約为 $\frac{1}{N}$。

再引入函数

$$A(p, E)dE = (2\pi)^3\sum_{s}|\psi_{0s}(0)|^2\delta(p-p_s), \quad E<\varepsilon_s<E+dE,$$

$$B(p, E)dE = (2\pi)^3\sum_{s'}|\psi_{s'0}(0)|^2\delta(p+p_{s'}), \quad E<\varepsilon_{s'}<E+dE. \tag{7.20}$$

现在把函数 $G$ 展成傅立叶积分[1]：

$$G(p, \omega) = \int_0^\infty dE\left\{\frac{A(p, E)}{\omega-E-\mu+i\delta} + \frac{B(p, E)}{\omega+E-\mu-i\delta}\right\}. \tag{7.21}$$

这个公式中的系数 $A$ 和 $B$ 是正实数。利用积分表示(7.21)可以研究函数 $G(p, \omega)$ 的解析性质。

分开函数 $G$ 的实部和虛部，就得到

$$\mathrm{Re}\ G(p, \omega) = \int_0^\infty dE\left\{\frac{A(p, E)}{\omega-E-\mu} + \frac{B(p, E)}{\omega+E-\mu}\right\}, \tag{7.22}$$

1) Lehmann[38] 首先在量子場論中得出这类公式。

$$\operatorname{Im} G(\boldsymbol{p}, \omega) = \begin{cases} -\pi A(\boldsymbol{p}, \omega - \mu), & \omega > \mu, \\ \pi B(\boldsymbol{p}, \mu - \omega), & \omega < \mu \end{cases} \tag{7.23}$$

($\fint$表示积分主值). 由此看出,格林函数的虚部在 $\omega = \mu$ 点变号.

比較(7.23)式和(7.22)式就可以得到虚部与实部之間的关系如下:

$$\operatorname{Re} G(\boldsymbol{p}, \omega) = \frac{1}{\pi}\fint_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} G(\boldsymbol{p}, \omega')\operatorname{sign}(\omega' - \mu)}{\omega' - \omega} d\omega'. \tag{7.24}$$

从公式(7.21)和(7.20)可以求出 $\omega \to \infty$ 时函数 $G$ 的渐近式:

$$G(\boldsymbol{p}, \omega) \to \frac{1}{\omega}\int_0^{\infty} dE[A(\boldsymbol{p}, E) + B(\boldsymbol{p}, E)] =$$

$$= \frac{1}{\omega}\Big\{(2\pi)^3 \sum_s |\psi_{0s}(0)|^2 \delta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_s) +$$

$$+ (2\pi)^3 \sum_{s'} |\psi_{s'0}(0)|^2 \delta(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}_{s'})\Big\}.$$

不难看出,$\frac{1}{\omega}$的系数等于反对易关系

$$\psi(\boldsymbol{r})\psi^+(\boldsymbol{r}') + \psi^+(\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}) = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')$$

的傅立叶分量,即等于 1. 为此只須将此反对易关系对基态求平均(其数值当然不因此改变),再作类似(7.17)式的变换,并对 $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$ 取傅立叶分量. 这样就得到:

$$G(\boldsymbol{p}, \omega) \to \frac{1}{\omega} \text{ 当 } \omega \to \infty. \tag{7.21'}$$

将 $G$ 作为复变数 $\omega$ 的函数,研究其性质. 从(7.24)式可知,$G(\boldsymbol{p}, \omega)$不是解析函数. 对于在上半平面解析的函数,要在(7.24)式中把 $\operatorname{sign}(\omega' - \mu)$换成 1,才是其实部与虚部之間的关系;而对于在下半平面解析的函数,应把 $\operatorname{sign}(\omega' - \mu)$换成$-1$.

与 $G$ 同时,我們再討論两个函数 $G_R$ 和 $G_A$,它們分别在上半平面和下半平面是解析的. 它們的定义为($\omega$ 是实数):

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} G &= \operatorname{Re} G_R = \operatorname{Re} G_A, \\ \operatorname{Im} G_R &= \operatorname{Im} G \operatorname{sign}(\omega - \mu), \\ \operatorname{Im} G_A &= -\operatorname{Im} G \operatorname{sign}(\omega - \mu). \end{aligned} \tag{7.25}$$



由(7.25)看出,在实半軸 $\omega - \mu < 0$ 上,$G_R$ 与 $G^*$ 重合,而在 $\omega - \mu > 0$ 时,$G_A$ 与 $G^*$ 重合. 因此可以写出:

$$\begin{aligned} G_R(\boldsymbol{p}, \omega) &= \begin{cases} G(\boldsymbol{p}, \omega), & \omega > \mu, \\ G^*(\boldsymbol{p}, \omega), & \omega < \mu, \end{cases} \\ G_A(\boldsymbol{p}, \omega) &= \begin{cases} G^*(\boldsymbol{p}, \omega), & \omega > \mu, \\ G(\boldsymbol{p}, \omega), & \omega < \mu. \end{cases} \end{aligned} \tag{7.25'}$$

从(7.25')得知,$G_R$ 乃是函数 $G$ 从半軸 $\omega > \mu$ 的解析延拓,而 $G_A$ 是 $G$ 从半軸 $\omega < \mu$ 的解析延拓.

在坐标表象中函数 $G_R$ 和 $G_A$ 定义如下:

$$\left.\begin{aligned} G_R(x - x') &= \begin{cases} -i\langle\tilde{\psi}(x)\tilde{\psi}^+(x') + \tilde{\psi}^+(x')\tilde{\psi}(x)\rangle & (t > t'), \\ 0 & (t < t'), \end{cases} \\ G_A(x - x') &= \begin{cases} 0 & (t > t'), \\ i\langle\tilde{\psi}^+(x')\tilde{\psi}(x) + \tilde{\psi}(x)\tilde{\psi}^+(x')\rangle & (t < t'). \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{7.26}$$

只要在上式中完成推导(7.21)式时所作的运算,就得到:

$$G_R(\boldsymbol{p}, \omega) = \int_0^{\infty} dE\left\{\frac{A(\boldsymbol{p}, E)}{\omega - E - \mu + i\delta} + \frac{B(\boldsymbol{p}, E)}{\omega + E - \mu + i\delta}\right\}, \tag{7.27}$$

$$G_A(\boldsymbol{p}, \omega) = G_R^*(\boldsymbol{p}, \omega).$$

将 $G_R$ 和 $G_A$ 的实部和虚部与(7.22)、(7.23)式比较,容易看出,这些函数满足关系式(7.25). $G_R$ 和 $G_A$ 分别称为推迟和超前格林函数.

現在討論声子. 声子場算符是实的,即 $\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\chi}(x) + \tilde{\chi}^+(x)$. 此外应当注意到,化学势 $\mu = 0$(見 §1),并且在基态不存在声子. 和前面相似地得到:

$$D(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}', t - t') =$$

$$= \begin{cases} -i\sum_s |\chi_{0s}(0)|^2 e^{-i(E_s - E_0)(t - t')} e^{i\boldsymbol{k}_s(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}, & t > t', \\ -i\sum_s |\chi_{0s}(0)|^2 e^{i(E_s - E_0)(t - t')} e^{-i\boldsymbol{k}_s(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}, & t < t'. \end{cases} \tag{7.28}$$

引入函数

$$P(\boldsymbol{k}, E)dE = (2\pi)^3 \sum_s |\chi_{0s}(0)|^2 \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_s) =$$

$$= (2\pi)^3 \sum_s |\chi_{0s}(0)|^2 \delta(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}_s),$$

其中对 $s$ 的求和涉及能量 $E_s$ 处于区間 $E < E_s - E_0 < E + dE$ 内的状态. 将(7.28)展成傅立叶积分,就得出:

$$D(\boldsymbol{k},\omega) = \int_0^\infty P(\boldsymbol{k}, E)\left\{\frac{1}{\omega - E + i\delta} - \frac{1}{\omega + E - i\delta}\right\}dE. \quad (7.29)$$

这个函数的虚部永远是負的:

$$\operatorname{Im} D(\boldsymbol{k}, \omega) = -\pi P(\boldsymbol{k}, |\omega|). \quad (7.30)$$

实部和虚部之間的关系,同函数 $G(\boldsymbol{p}, \omega)$ 一样. 由此可見,声子格林函数的解析性質与 $\mu = 0$ 的费米系統格林函数相同.

因此可以构成两个满足关系式(7.25)($\mu = 0$)的解析函数 $D_R$ 和 $D_A$. 它們在坐标表象中的形式为

$$D_R(x - x') = \begin{cases} -i\langle\tilde{\varphi}(x)\tilde{\varphi}(x') - \tilde{\varphi}(x')\tilde{\varphi}(x)\rangle, & t > t', \\ 0, & t < t', \end{cases}$$

$$D_A(x - x') = \begin{cases} 0, & t > t', \\ -i\langle\tilde{\varphi}(x')\tilde{\varphi}(x) - \tilde{\varphi}(x)\tilde{\varphi}(x')\rangle, & t < t'. \end{cases} \quad (7.31)$$

**3. 極点的物理意义** 我們已經指出过,知道了格林函数,就可以求得系統的許多物理特性. 其应用之一,就是确定元激发譜.

討論费米系統,它在初始时刻 $t'$ 由波函数

$$\Psi_0(t') = \psi_p^+(t')\Phi_i(t') \quad (7.32)$$

描述,其中 $\psi_p^+(t')$是相互作用表象中动量为 $\boldsymbol{p}$ 的粒子的产生算符,即 $a_p^+ e^{i\varepsilon(p)t'}$, 而 $\Phi_i(t')$是在相互作用表象中粒子系統的基态波函数. 在时刻 $t > t'$, 系統的波函数为

$$\Psi(t) = S(t, t')\psi_p^+(t')\Phi_i(t').$$

求状态 $\Psi_0(t)$ 的几率幅度. 它等于

$$\langle\Psi_0^*(t)\Psi(t)\rangle = \langle\Phi_i^*(t)\psi_p(t)S(t,t')\psi_p^+(t')\Phi_i(t')\rangle =$$

$$= \langle\Phi_H^{0*}S^{-1}(t)\psi_p(t)S(t,t')\psi_p^+(t')S(t')\Phi_H^0\rangle =$$

$$= \langle\tilde{\psi}_p(t)\tilde{\psi}_p^+(t')\rangle = iG(\boldsymbol{p}, t - t'), t - t' > 0. \quad (7.33)$$



这里已經从相互作用表象变换到海森堡表象.

为了求得函数 $G(\boldsymbol{p}, t)$, 必須計算积分

$$G(\boldsymbol{p}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} G(\boldsymbol{p}, \omega)e^{-i\omega t}. \quad (7.34)$$

由于 $G(\boldsymbol{p}, \omega)$ 不是解析函数,我們把积分分成两部分: 从 $-\infty$ 到 $\mu$, 从 $\mu$ 到 $+\infty$. 第一个积分里 $G$ 和解析函数 $G_A$ 重合, 在第二个积分里和 $G_R$ 重合. 前面已經指出,函数 $G_A$ 在下半平面沒有奇异点. 因此,在第一个积分里可以变换积分路綫(图 2). 如果将此路綫水平部分推向下半平面足够远处,则积分值由于因子 $e^{-i\omega t}$ 而变得很小,結果只剩下积分 $\int_{\mu-i\infty}^{\mu} \frac{d\omega}{2\pi} G_A e^{-i\omega t}$. 再看第二个积分. 一般地說,函数 $G_R$ 在下半平面內是有奇异点的. 假定在复变数 $\omega - \mu$ 平面第四象限内距实軸最近的奇异点,是位于 $\omega = \varepsilon(\boldsymbol{p}) - i\gamma$ 处的簡单极点,并且 $\gamma \ll \varepsilon(\boldsymbol{p}) - \mu$. 令积分路綫变形如图 3 所示. 这个路綫的水平部分当然应高于下一个奇异点,因而不能推移到 $-i\infty$ 去. 然而可取足够长的时間 $t$, 使得这个积分很小. 这样,就剩下了沿垂直路綫以及环繞极点的积分:

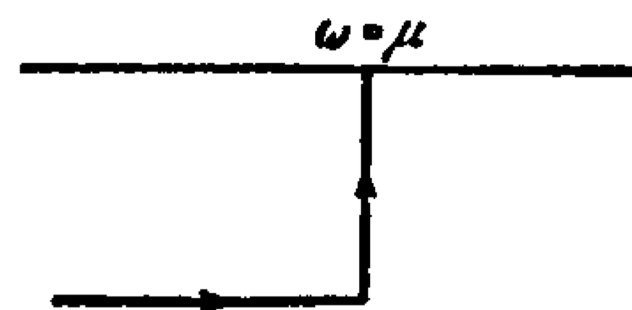


图 2

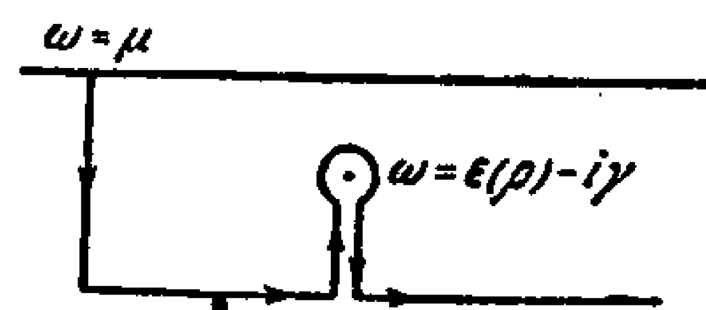


图 3

$$\int_{\mu}^{\mu - i\infty} \frac{d\omega}{2\pi} G_R e^{-i\omega t} - iae^{-i\varepsilon(p)t - \gamma t},$$

其中 $a$ 是 $G_R$ 在极点上的留数. 以后我們将証明,当 $t \gg [\varepsilon(\boldsymbol{p}) - \mu]^{-1}$ 时,图 2 和图 3 上两个沿垂直路綫的积分的貢献都很小. 因此,对时間很长的极限情况,我們得到:

$$iG(\boldsymbol{p}, t) \approx ae^{-i\varepsilon(p)t - \gamma t}. \quad (7.35)$$

如果在初始状态只有一个动量为 $\boldsymbol{p}$、能量为 $\varepsilon_0(\boldsymbol{p})$ 的自由粒子,则类似(7.33)的量应为 $e^{-i\varepsilon_0(p)(t-t')}$. 由此可知,在(7.32)所描述的状态中存在着波包,它相当于能量为 $\varepsilon(\boldsymbol{p})$、并按 $e^{-\gamma(t-t')}$ 律随

时間衰減的准粒子。因此，准粒子的能量和衰減，由函数 $G_R$ 在下半平面的极点的实部和虚部决定。波包的幅度则与函数 $G_R$ 在极点的留数有关。

现在我們証明，积分中省略了的部分，在动量相当于 $\varepsilon(p)\approx\mu$ 的范围內确是小量。回想 $G_A=G_R^*$，求得图 2 和图 3 上沿垂直部分的积分之和为：

$$\int_\mu^{\mu-i\infty}(G_R-G_R^*)e^{-i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi}=2i\int_\mu^{\mu-i\infty}\mathrm{Im}\,G_R e^{-i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi}.$$

根据 §2 所述的唯象討論，条件 $\gamma\ll\varepsilon(p)-\mu$ 只在 $\varepsilon(p)\approx\mu$ 附近成立[1]。因而认定 $t\gg\dfrac{1}{\varepsilon(p)-\mu}$ 后，就可以把 $G_R$ 换成

$$\frac{a}{\omega-\varepsilon(p)+i\gamma}.$$

引入新变量 $i(\omega-\mu)=u$，得到：

$$-\frac{2\gamma a e^{-i\mu t}}{2\pi}\int_0^\infty\frac{du e^{-ut}}{\gamma^2+[\varepsilon(p)-\mu+iu]^2}.$$

由于 $t\gg[\varepsilon(p)-\mu]^{-1}$，这个积分等于

$$-\frac{\gamma a e^{-i\mu t}}{\pi t[\varepsilon(p)-\mu]^2}.$$

如果令 $t$ 不比 $1/\gamma$ 大許多，則这个値比图 3 中极点的貢献小得多。

波函数为

$$\Psi_0'(t)=\psi_p(t)\Phi_i(t) \qquad (7.36)$$

的状态也可以类似地加以考慮。討論在較迟的时刻 $t'$ 的这个状态，就得到：

$$\langle\Psi_0'^*(t')\Psi'(t')\rangle=-iG(p,t-t') \text{ 当 } t-t'<0.$$

既然 $t<0$，則按(7.34)式計算 $G(p,t)$时，重要的是函数 $G_A(p,\omega)$ 在上半平面中的极点。当 $|t|\gg|\varepsilon(p)-\mu|^{-1}$ 时，与以前相似地得：

$$-iG(p,t)\approx ae^{-i\varepsilon(p)t-\gamma t},$$

其中 $\varepsilon(p)<\mu$，$\gamma<0$。我們得到了相当于空穴 $\varepsilon(p)<\mu$ 的波包。由此可知，空穴的能量和衰減由函数 $G_A(p,\omega)$在上半平面的极点决定。还須指出，"粒子"和"空穴"的 $\gamma$ 符号相反。

对于声子，这些結果也是成立的。不难从(7.29)式看出，这时函数 $D_R(k,\omega)$ 在下半平面的每个极点，对应于函数 $D_A(k,\omega)$ 在上半平面的一个极点，它們的位置对 $\omega=0$ 点是对称的。因而两种决定激发譜的方法給出同一結果。

除了能譜以外，还可以借助格林函数求单位体积粒子数和化学势的关系，求基态能量和粒子按动量的分布，(当然，这一切都是对費米粒子而言，我們在本节初就作了这种限制)。

从格林函数的定义(7.1)本身得：

$$\frac{N}{V}=\langle\tilde\psi_\alpha^+(x)\tilde\psi_\alpha(x)\rangle=$$

$$=-i\lim_{\substack{r=r'\\t'\to t+0}}G_{\alpha\alpha}(x-x')=-2i\lim_{\substack{r=r'\\t'\to t+0}}G(x-x'),$$

其中

$$G_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}G.$$

变换到 $G$ 的动量表象，就有：

$$\frac{N}{V}=-2i\lim_{t\to+0}\int\frac{dpd\omega}{(2\pi)^4}G(p,\omega)e^{i\omega t}. \qquad (7.37)$$

既然(7.37)式中的积分只与 $\mu$ 有关，我們就求得了 $N(\mu)$关系。反过来表示成 $\mu(N)$，再利用公式 $\mu=\left(\dfrac{\partial E_0}{\partial N}\right)_V$，可由此得基态能量。的确，这个方法实际运用起来不是最方便的。我們在 §10 中还要再回到基态能量問題。

为了求粒子的动量分布，只須計算

$$N_{\frac12}(p)=N_{-\frac12}(p)=\langle\Phi_0^* a_{p\frac12}^+ a_{p\frac12}\Phi_0\rangle=\langle a_{p\frac12}^+ a_{p\frac12}\rangle,$$

其中 $\Phi_0=e^{-iE_0t}\Phi_H^0$ 是系統基态的薛定格波函数。和(7.17)式比較(参看第 56 頁上的附注)，就得到：

$$N_{\frac12}(p)=N_{-\frac12}(p)=-i\lim_{t\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}G(p,\omega)e^{i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi}. \qquad (7.38)$$

从(7.38)式可以得到动量分布的一个有趣性质（А. Б. Миг.

1) $\varepsilon(p)-\mu\to0$ 时 $\gamma\ll\varepsilon(p)-\mu$ 这一假定的正确性，曾在許多具体例子中严格証明(見 §21 和 §22)。

дал[29]). 以方程式 $\varepsilon(p_0)=\mu$ 定义激发的边界費米动量 $p_0$. 在 $|\boldsymbol{p}|=p_0$ 附近研究 $N(\boldsymbol{p})$. 根据 §2 中的假定，費米液体的激发是动量在 $p_0$ 附近的"粒子"和"空穴". 这些准粒子的衰減比 $|\varepsilon(\boldsymbol{p})-\mu|$ 小. 利用这些知識就可以确定函数 $G_A$ 和 $G_R$ 的极点. 当 $|\boldsymbol{p}|<p_0$ 时，函数 $G_A$ 在上半平面靠近实軸处有一极点，而当 $|\boldsymbol{p}|>p_0$ 时，这个极点消失，然而在下半平面出现函数 $G_R$ 的极点. 将(7.38)式中的积分分别表示成 $G_A$ 和 $G_R$ 的两个迴路积分，就象对(7.34)式的积分所作的那样. 图 2 和图 3 上积分路綫的水平部分，我們移入下半平面，并令其到实軸的距离远大于 $\varepsilon(\boldsymbol{p})-\mu$. 这时沿这段路径的积分对动量 $\boldsymbol{p}$ 的微小变化已不敏感. 沿垂直路径的积分可以合并成

$$2\int_{\mu}^{\mu-iL}\operatorname{Im}G_R(\boldsymbol{p},\omega)\frac{d\omega}{2\pi}.$$

这个积分可以分成两部分，即在 $\varepsilon=\mu$ 点附近区域的积分，和与該点距离大于 $\varepsilon(\boldsymbol{p})-\mu$ 的区域的积分. $|\boldsymbol{p}|$ 的变化对远处的积分影响不大，而在近处的积分中可代入 $G_R\approx\dfrac{a}{\omega-\varepsilon(\boldsymbol{p})+i\gamma}$，于是可以看出它小到能够忽略 $\left(\sim\dfrac{\gamma}{\varepsilon(\boldsymbol{p})-\mu}\right)$. 由此可知，$|\boldsymbol{p}|<p_0$ 和 $|\boldsymbol{p}|>p_0$ 时 $N(\boldsymbol{p})$ 的表达式(7.38)的全部差别在于，第一种情况下沒有图 3 中繞极点的积分，第二种情况下它出现了. 因此有

$$N_{\frac{1}{2}}(p_0-0)-N_{\frac{1}{2}}(p_0+0)=a. \tag{7.39}$$

根据(7.21)，常数 $a$ 必为正数. 这样我們就得出結論：粒子的动量分布和激发的分布在同一点 $|\boldsymbol{p}|=p_0$ 具有跃变. 根据費米液体理論的基本假定，激发的費米边界动量 $p_0$ 与粒子数密度的关系是(2.1)式(这个假定的正确性将在第四章中証明). 因此，有相互作用的粒子和无相互作用的粒子的动量分布跃变发生在同一点. 由于 $0\leqslant N_{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{p})\leqslant 1$，对跃变值有

$$0\leqslant a\leqslant 1. \tag{7.40}$$

§5 中得到的稀薄費米气体粒子动量分布就是一例.



**4. 系統在外場中的格林函数.** 現在我們討論处于和时間无关的外場中的系統. 这时格林函数的变量是 $t-t'$，$\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$. 代替(7.17)式的是：

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')=-i\sum_s(\psi(\boldsymbol{r})_{0s}\psi^*_{0s}(\boldsymbol{r}'))e^{-i(E_s-E_0)(t-t')},\quad t>t', \tag{7.41}$$
$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')=i\sum_s(\psi^*(\boldsymbol{r}')_{s0}\psi_{s0}(\boldsymbol{r}))e^{i(E_s-E_0)(t-t')},\quad t<t'.$$

其中 $\psi(\boldsymbol{r})$ 和 $\psi(\boldsymbol{r}')$ 是薛定格算符. 如果象在无外場时那样进行运算，我們就会得到(7.21)型的公式，其中 $A$, $B$ 是复函数. 为避免这种不便，可以引入对称組合：

$$\frac{1}{2}[G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')+G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r},t-t')]. \tag{7.42}$$

如果只論与 $\omega$ 的关系，則这个函数的傅立叶分量具有无外場时函数 $G$ 的全部性質. 全部公式(7.21)——(7.27)对它都成立，差别只是代替参数 $\boldsymbol{p}$，所有量将和参数 $\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{r}'$ 有关.

討論在外場中的彼此不作用的費米粒子时，最好将算符 $\psi(\boldsymbol{r})$ 取为 $\psi(\boldsymbol{r})=\sum_s a_s\varphi_s(\boldsymbol{r})$，其中 $\varphi_s(\boldsymbol{r})$ 是一个粒子在外場中的本征函数. 这时，代替(7.17)式有

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')=-i\sum_s\varphi_s^*(\boldsymbol{r}')\varphi_s(\boldsymbol{r})e^{-i\varepsilon_s(t-t')}\begin{cases}(1-n_s), & t>0,\\(-n_s), & t<0,\end{cases}$$

其中

$$n_s=\begin{cases}1, & \varepsilon_s<\mu,\\0, & \varepsilon_s>\mu,\end{cases} \tag{7.43}$$

这里 $\varepsilon_s$ 表示粒子在状态 $\varphi_s$ 的能量. 取时間傅立叶分量，得：

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega)=\sum_{\varepsilon_s>\mu}\frac{\varphi_s^*(\boldsymbol{r}')\varphi_s(\boldsymbol{r})}{\omega-\varepsilon_s+i\delta}+\sum_{\varepsilon_s<\mu}\frac{\varphi_s^*(\boldsymbol{r}')\varphi_s(\boldsymbol{r})}{\omega-\varepsilon_s-i\delta}. \tag{7.44}$$

現在引入类似(7.20)式中 $A$ 和 $B$ 的量：

$$A(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',E)dE=\sum_s\varphi_s^*(\boldsymbol{r}')\varphi_s(\boldsymbol{r}),\quad E<\varepsilon_s<E+dE.$$

令 $\mathbf{r}=\mathbf{r}'$，将此关系式对 $dV$ 积分．这时由于函数 $\varphi_i$ 的归一条件，我們在右端得到能量間隔 $dE$ 內的能級数目 $dN$．于是

$$\int d\mathbf{r} A(\mathbf{r}, \mathbf{r}, E) = \frac{dN(E)}{dE}.$$

(7.44)式借助 $A$ 表示成：

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \int dE \frac{A(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E)}{\omega - E + i\delta \text{sign}(E-\mu)}.$$

由此知道，$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega)$ 的虛部($\mathbf{r}=\mathbf{r}'$ 时 $A$ 是正实数)等于

$$\text{Im}\, G(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega) = \begin{cases} -\pi A(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega), & \omega > \mu, \\ \pi A(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega), & \omega < \mu. \end{cases}$$

从而得到：

$$\frac{dN(E)}{dE} = -\frac{1}{\pi} \text{sign}(E-\mu) \int \text{Im} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}, E) d\mathbf{r}; \quad (7.45)$$

## § 8. 图解法的基本原則

**1. 从变量 $N$ 到变量 $\mu$ 的变换．** 計算格林函数之前，先变换到新的变量．迄今我們討論了粒子数一定的系統．今后更方便的作法，是認为粒子数是变量，而給定化学势．实际上我們对声子已使用了这种变量，那里 $\mu=0$，而系統內的粒子数不定．然而对于費米系統，我們正是給定了粒子数，公式中的化学势 $\mu$，应視为粒子数的函数．实际計算中最好認为 $\mu$ 是独立变量，而在最終結果中回到一定粒子数．

从一个变量到另一个变量的变換可按如下方式完成．系統的波函数和能級可以得自变分原則

$$\langle \Psi^* \hat{H} \Psi \rangle = \min \quad (8.1)$$

其条件为

$$\langle \Psi^* \hat{N} \Psi \rangle = \text{常数}, \quad (8.2)$$

这里 $\hat{H}$ 和 $\hat{N}$ 是哈密頓量和粒子数算符．另一作法是利用拉格朗日不定乘子法，而求下式的絕对极小値：

$$\langle \Psi^* (\hat{H} - \mu \hat{N}) \Psi \rangle,$$



其中常数 $\mu$ 以后由条件(8.2)式决定．这样，从給定 $N$ 到給定 $\mu$ 的变換，归結为将哈密頓量換成算符 $\hat{H}-\mu\hat{N}$．由于算符 $\hat{N}$ 和哈密頓量对易，极易求得算符 $\tilde{\psi}(x)$ 的变換公式：

$$\tilde{\psi}_\mu(x) = e^{-i\mu\hat{N}t} \tilde{\psi}_N(x) e^{i\mu\hat{N}t} = e^{i\mu t} \tilde{\psi}_N(x), \quad (8.3)$$

这里注意到了算符 $\tilde{\psi}_N$ 使粒子数減少一个．类似地对算符 $\tilde{\psi}^+_\mu(x)$ 有：

$$\tilde{\psi}^+_\mu(x) = e^{-i\mu t} \tilde{\psi}^+_N(x). \quad (8.4)$$

格林函数定义为：

$$G_\mu(x, x') = G_N(x, x') e^{i\mu(t-t')}. \quad (8.5)$$

由此可見，只須作变換

$$\omega_{(N)} \to \omega_{(\mu)} + \mu. \quad (8.6)$$

前节里的全部結論就都对 $G_\mu$ 成立．

既然为了計算粒子数及其动量分布，只須知道 $G$ 在 $t=t'$ 时的値，則相应的(7.37)和(7.38)式显然不变．新格林函数的极点則給出从化学势算起的元激发能量．

我們已經講过，在实际計算中应用函数 $G_\mu$ 更为方便．因此，今后我們通常就这样定义格林函数，并用字母 $G$ 表示．有时为了分析函数 $G$ 的一般性質，須認为粒子数是給定的(如在上节中)，这将特別說明．

**2. 維克(Wick)定理．** 现在我們就轉而計算格林函数．借助§6 中所得到的变換到相互作用表象的公式(6.32)，可将微扰論級数簡单紧凑地表出．应用(6.32)式于格林函数，有

$$G(x, x') = \frac{-i\langle T\psi(x)\psi^+(x') S(\infty) \rangle}{\langle S(\infty) \rangle}, \quad (8.7)$$

其中

$$S(\infty) = T\left(e^{-i\int_{-\infty}^{\infty} H_{int} dt}\right). \quad (8.8)$$

再強調一次，(8.7)式(以及 $H_{int}$)中的算符 $\psi$ 遵从无相互作用粒子的方程．

将(8.7)式分子中的 $S(\infty)$ 按 $H_{int}$ 的冪展开．这就得到：

$$S(\infty) = 1 - i\int_{-\infty}^{\infty} H_{int} dt +$$

$$+ \frac{(-i)^2}{2} \iint_{-\infty}^{\infty} T[H_{int}(t_1)H_{int}(t_2)] dt_1 dt_2 + \cdots,$$

$$G(x, x') = -\frac{i}{\langle S(\infty)\rangle} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots dt_n \times$$

$$\times \langle T[\psi(x)\psi^+(x')H_{int}(t_1)\cdots H_{int}(t_n)]\rangle. \tag{8.9}$$

分母中的$\langle S(\infty)\rangle$我們暂不展开. 通常相互作用哈密頓量$H_{int}$是若干算符$\psi$的乘积对空間变量,有时还对时間变量的积分(以后会見到具体例子). 这样, 級数(8.9)中的每一項都包含着几个相互作用表象中粒子場算符編时乘积的平均值. 因而我們首先应当討論如下的表达式:

$$\langle T(ABCD\cdots XYZ)\rangle,$$

其中 $A, B, \cdots, X, Y, Z$ 是相互作用表象中的場算符, (再提醒一次, 它們和相应无相互作用粒子算符是一样的).

每个場算符可分成兩項之和. 其中一項作用于基态波函数, 給出零. 这部分可称作"消灭算符". 在声子算符(7.13)式中这是系数为 $b_k$ 的和, 而在費米子算符(6.14)式中就是 $|\boldsymbol{p}| > p_0$ 的那部分的和. 另一部分可称为"产生算符", 它的性質是: 其厄米共軛算符作用到基态上給出零. 我們定义正規乘积

$$N(AB\cdots XYZ),$$

其中所有"产生算符"位于"消灭算符"左面, 而乘积的符号由費米算符置換数的奇偶决定. 其次, 我們将差数

$$A^cB^c = T(AB) - N(AB).$$

称为两个算符的"收縮".

現在証明, $T$-乘积永远可以表示为一系列$N$-乘积之和, 其中包括了一切可能方式的算符收縮, 即:

$$T(ABCD\cdots XYZ) = N(ABCD\cdots XYZ) +$$
$$+ N(A^cB^cCD\cdots XYZ) + N(A^cBC^cD\cdots XYZ) + \cdots$$
$$\cdots + N(A^aB^aC^a\cdots X^cY^bZ^b). \tag{8.10}$$



这个关系式就叫作維克定理(見[25])[1].

首先指出, 在等式(8.10)两端同时置換算符并不破坏这个关系式. 因此可以假定, (8.10)式中算符的排列与它們的时間順序一致而不影响普遍性. 为了从$T$乘积得到$N$乘积, 須依次把所有产生算符置換到消灭算符左面. 这时我們就得到如(8.10)式中写出的$N$乘积之和. 但是这个和中只包含了那些在$T$乘积和$N$乘积中順序不同的算符的收縮. 然而由于对两处順序全同的算符, 其收縮等于零, 我們还是可以认为(8.10)式右端的$N$乘积包括了一切可能方式的收縮. 这样, 关系式(8.10)得証.

利用(6.14)和(7.13)式不难看出, 費米算符$\psi^+(x')$ 和 $\psi(x)$, 以及两个声子算符 $\varphi(x)$ 和 $\varphi(x')$ 的收縮, 乃是普通数, 而所有其它的收縮等于零. 例如:

$$\psi^{+c}(x')\psi^c(x) = \frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'} \{a^+_{\boldsymbol{p}'}a_{\boldsymbol{p}} - \underset{|\boldsymbol{p}|>p_0}{a^+_{\boldsymbol{p}'}a_{\boldsymbol{p}}} + \underset{|\boldsymbol{p}|<p_0}{a_{\boldsymbol{p}}a^+_{\boldsymbol{p}'}}\} \times$$
$$\times e^{i[\boldsymbol{pr}-\boldsymbol{p}'\boldsymbol{r}'-\varepsilon_0(\boldsymbol{p})t+\varepsilon_0(\boldsymbol{p}')t']} =$$
$$= \frac{1}{V}\sum_{|\boldsymbol{p}|<p_0} e^{i\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')-i\varepsilon_0(\boldsymbol{p})(t-t')} \text{ 当 } t' > t,$$

$$\psi^{+c}(x')\psi^c(x) = \frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'} \{-a_{\boldsymbol{p}}a^+_{\boldsymbol{p}'} - \underset{|\boldsymbol{p}|>p_0}{a^+_{\boldsymbol{p}'}a_{\boldsymbol{p}}} + \underset{|\boldsymbol{p}|<p_0}{a_{\boldsymbol{p}}a^+_{\boldsymbol{p}'}}\} \times$$
$$\times e^{i[\boldsymbol{pr}-\boldsymbol{p}'\boldsymbol{r}'-\varepsilon_0(\boldsymbol{p})t+\varepsilon_0(\boldsymbol{p}')t']} =$$
$$= -\frac{1}{V}\sum_{|\boldsymbol{p}|>p_0} e^{i\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')-i\varepsilon_0(\boldsymbol{p})(t-t')} \text{ 当 } t' < t.$$

由正規乘积的定义知道, 它对基态的平均值为零. 因此

$$A^cB^c = \langle T(AB)\rangle.$$

在(8.10)式两端取对基态的平均值, 得

$$\langle T(ABCD\cdots XYZ)\rangle = \langle T(AB)\rangle\langle T(CD)\rangle\cdots\langle T(YZ)\rangle \pm$$
$$\pm \langle T(AC)\rangle\langle T(BD)\rangle\cdots\langle T(YZ)\rangle \pm \cdots \tag{8.11}$$

这样, 左端的平均值就分成了各种可能的成对算符对基态平均值的乘积之和. 每一項前面的符号由費米算符的置換次数的奇

1) 参閱[78]第190頁. ——譯者注.

偶决定．由(8.11)式还得出，算符乘积 $A\cdot B\cdot C\cdots$ 中每种場的算符都应为偶数个．注意到格林函数的定义(7.1)式，我們就得出結論：**任何数目場算符 $T$ 乘积的平均値，都可表示为自由粒子格林函数乘积之和．**

**3．費曼图．** 現在回到(8.9)式．由于 $H_{int}$ 是算符 $\psi$ 乘积的积分，則(8.9)和中的每一項都可以按(8.11)式变换． 所得的結果可以借助所謂費曼图表示成做为直观的形式． 最好以具体例子示之．假設我們討論的系統由全同的費米粒子組成，它們之間存在着与自旋无关的双粒子相互作用．根据 §6，$H_{int}$ 的形状是：

$$H_{int}=\frac{1}{2}\int\psi_\alpha^+(\boldsymbol{r}_1)\psi_\beta^+(\boldsymbol{r}_2)U(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\psi_\beta(\boldsymbol{r}_2)\psi_\alpha(\boldsymbol{r}_1)d\boldsymbol{r}_1d\boldsymbol{r}_2.\quad(8.12)$$

如果引入 $V(x_1-x_2)=U(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\delta(t_1-t_2)$，則算符 $\int H_{int}\,dt$ 包含两个四維积分．

討論(8.9)中諸項． 和的第一項是无相互作用的粒子的格林函数．下一項是

$$\delta G^{(1)}=-\frac{1}{2\langle S(\infty)\rangle}\int d^4x_1d^4x_2\times$$

$$\times\langle T(\psi_\alpha(x)\psi_\beta^+(x')\psi_\gamma^+(x_1)\psi_\delta^+(x_2)\psi_\delta(x_2)\psi_\gamma(x_1))\rangle V(x_1-x_2).$$

根据(8.11)式，积分下的矩陣元等于

$$\begin{aligned}&\langle T(\psi_\alpha(x)\psi_\gamma^+(x_1))\rangle\langle\psi_\delta^+(x_2)\psi_\delta(x_2)\rangle\langle T(\psi_\gamma(x_1)\psi_\beta^+(x'))\rangle-\\&-\langle T(\psi_\alpha(x)\psi_\gamma^+(x_1))\rangle\langle\psi_\delta^+(x_2)\psi_\gamma(x_1)\rangle\langle T(\psi_\delta(x_2)\psi_\beta^+(x'))\rangle+\\&+\langle T(\psi_\alpha(x)\psi_\delta^+(x_2))\rangle\langle\psi_\gamma^+(x_1)\psi_\gamma(x_1)\rangle\langle T(\psi_\delta(x_2)\psi_\beta^+(x'))\rangle-\\&-\langle T(\psi_\alpha(x)\psi_\delta^+(x_2))\rangle\langle\psi_\gamma^+(x_1)\psi_\delta(x_2)\rangle\langle T(\psi_\gamma(x_1)\psi_\beta^+(x'))\rangle+\\&+\langle T(\psi_\alpha(x)\psi_\beta^+(x'))\rangle\langle\psi_\gamma^+(x_1)\psi_\gamma(x_1)\rangle\langle\psi_\delta^+(x_2)\psi_\delta(x_2)\rangle-\\&-\langle T(\psi_\alpha(x)\psi_\beta^+(x'))\rangle\langle\psi_\gamma^+(x_1)\psi_\delta(x_2)\rangle\langle\psi_\delta^+(x_2)\psi_\gamma(x_1)\rangle.\end{aligned}$$

注意格林函数的定义(7.1)式，可将此式写成：

$$\begin{aligned}&iG_{\alpha\gamma}^{(0)}(x,x_1)G_{\delta\delta}^{(0)}(x_2,x_2)G_{\gamma\beta}^{(0)}(x_1,x')-\\&-iG_{\alpha\gamma}^{(0)}(x,x_1)G_{\gamma\delta}^{(0)}(x_1,x_2)G_{\delta\beta}^{(0)}(x_2,x')+\\&+iG_{\alpha\delta}^{(0)}(x,x_2)G_{\gamma\gamma}^{(0)}(x_1,x_1)G_{\delta\beta}^{(0)}(x_2,x')-\\&-iG_{\alpha\delta}^{(0)}(x,x_2)G_{\delta\gamma}^{(0)}(x_2,x_1)G_{\gamma\beta}^{(0)}(x_1,x')-\\&-iG_{\alpha\beta}^{(0)}(x,x')G_{\gamma\gamma}^{(0)}(x_1,x_1)G_{\delta\delta}^{(0)}(x_2,x_2)+\\&+iG_{\alpha\beta}^{(0)}(x,x')G_{\delta\gamma}^{(0)}(x_2,x_1)G_{\gamma\delta}^{(0)}(x_1,x_2).\end{aligned}\quad(8.13)$$



这样，所討論的式子就成为若干項之和，其中每一項包括三个不相互作用粒子格林函数．

費曼指出，每个这种項可以和一定图形对照． 画图的原則如下．表达式中算符 $\psi$ 的时空坐标和自旋投影用平面上的点表示．然后将相应同一函数 $G^{(0)}$ 的变量的点用实綫連接起来，而函数 $V(x_1-x_2)$ 内的 $x_1$，$x_2$ 两点用波紋綫連起来．这时 $\delta G^{(1)}$ 就对应图 4 [1]所示的六个图形． 每个这种图形有两个外坐标 $x$ 和 $x'$．对内

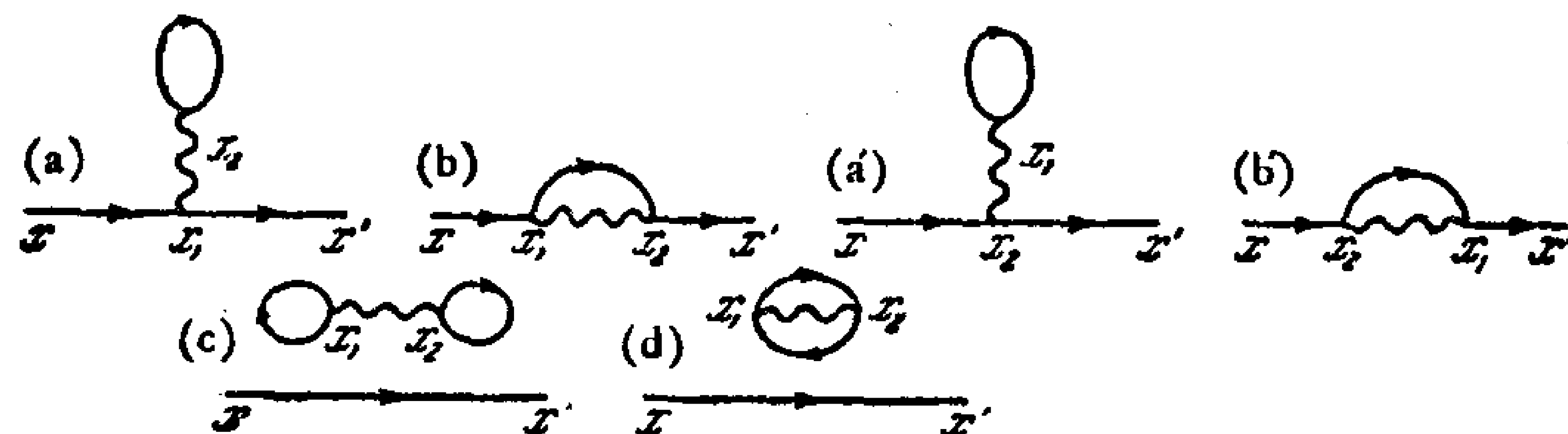



图 4

点的坐标进行积分，同时对內自旋变量求和． 在微扰論的高級近似下，以及对于其它形式的相互作用哈密頓量，公式和图形之間也存在着类似的对应关系．这种图形就叫作費曼图．

每个費曼图对应一定的解析表达式．微扰論級数的計算就归結为：画出一切可能的費曼图并計算相应的积分． 画图和写式子的規則，与相互作用的具体形式有关． 然而有一条共同規律却是在一切情况下都成立的，它使計算大为簡化． 我們現在就闡明这条規律．

所有函数 $G$ 的費曼图可分成两种——相連图形和不相連图形． 相連图形中一切点都以某种綫与外端点連結． 例如图 4 中 $a$，$a'$，$b$，$b'$ 是相連图形，而 $c$，$d$ 是不相連图形． 在一般情况下，微扰論級数(8.9)式中的某一項，凡是 $\psi(x)$ 和 $H_{int}(t_{p_k})$ 中的 $\psi^+$ 收

1) 为了簡单，图上未标出自旋变量．

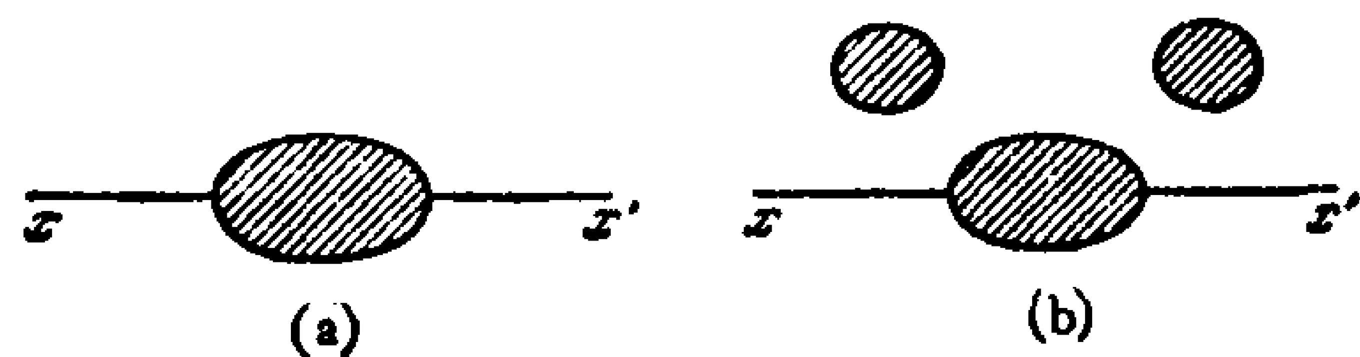



图 5

縮,而 $H_{int}(t_{p_1})$ 中的 $\psi$ 又与 $H_{int}(t_{p_2})$ 中的 $\psi^+$ 收縮，如此不空过任何一个 $H_{int}$ 而达到 $\psi^+(x')$,所得到的就是相連图形(图 5, a). 所有其它图形中都有一个或几个算符 $H_{int}$ 未与 $\psi(x)$ 和 $\psi^+(x')$ 或与之相連的 $H_{int}$ 中場算符收縮,它們是不相連的(图 5, b).

討論对应于某个不相連图的格林函数修正項. 它显然由两个因子构成. 第一个因子包括所有与 $\psi(x)$ 和 $\psi^+(x')$ 发生联系的 $H_{int}$;換言之,它包括对应于图 5b 中有外綫的相連分图. 第二个因子描述图中其它部分. 因此所討論的修正項表达式为:

$$-i\,\frac{(-i)^n}{n!}\int\cdots\int dt_1\cdots$$
$$\cdots dt_m\langle T(\psi(x)\psi^+(x')H_{int}(t_1)\cdots H_{int}(t_m))\rangle_c\times$$
$$\times\int\cdots\int dt_{m+1}\cdots dt_n\langle T(H_{int}(t_{m+1})\cdots H_{int}(t_n))\rangle.$$

这里 $\langle\cdots\rangle_c$ 和 $\langle\cdots\rangle$ 表示某种一定的、根据維克定理将乘积分为成对算符 $\psi,\psi^+$ 的方式. 符号 $\langle\cdots\rangle_c$ 着重指出,这个式子中的收縮給出相連图形.

不难看出,有些图形的貢献全同. 其实只要变換收縮的順序,使得各 $H_{int}$ 重新分配于两个括弧 $\langle\cdots\rangle_c$ 和 $\langle\cdots\rangle$ 間,这只等于改写积分变量,并不改变修正項的数值. 这种图形的数目显然等于 $n$ 个算符 $H_{int}$ 分成各含 $m$ 和 $n-m$ 个算符的两組的組合数，即

$$\frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

所有这种图形的总貢献为:

$$(-i)\frac{(-i)^m}{m!}\int\cdots\int dt_1\cdots$$



$$\cdots dt_m\langle T(\psi(x)\psi^+(x')H_{int}(t_1)\cdots H_{int}(t_m))\rangle_c\times$$
$$\times\frac{(-i)^{n-m}}{(n-m)!}\int\cdots\int dt_{m+1}\cdots dt_n\langle T(H_{int}(t_{m+1})\cdots H(t_n))\rangle.$$

我們把包含一定相連部分和任意不相連部分的各級图形的貢献都加起来. 結果显然是:

$$(-i)\frac{(-i)^m}{m!}\int\cdots\int dt_1\cdots$$
$$\cdots dt_m\langle T(\psi(x)\psi^+(x')H_{int}(t_1)\cdots H_{int}(t_m))\rangle_c\times$$
$$\times\Big\{1-i\int_{-\infty}^{\infty}dt_{m+1}\langle H_{int}(t_{m+1})\rangle-$$
$$-\frac{1}{2}\iint dt_{m+1}dt_{m+2}\langle T(H_{int}(t_{m+1})H_{int}(t_{m+2}))\rangle+\cdots$$
$$\cdots+\frac{(-i)^k}{k!}\int\cdots\int dt_{m+1}\cdots dt_{m+k}\times$$
$$\times\langle T(H_{int}(t_{m+1})\cdots H_{int}(t_{m+k}))\rangle+\cdots\Big\}.$$

回到最初的(8.7)式. 如果把分母中的 $\langle S(\infty)\rangle$ 按 $H_{int}$ 的冪展开,我們恰好得到上式中圓括弧中的級数. 因此:

$$\langle T(\psi(x)\psi^+(x')S(\infty))\rangle=\langle T(\psi(x)\psi^+(x')S(\infty))\rangle_c\langle S(\infty)\rangle$$

而根据(8.7)式有:

$$G(x,x')=-i\langle T(\psi(x)\psi^+(x')S(\infty))\rangle_c. \qquad (8.14)$$

所得的規則不仅对格林函数成立. 它对任何形如(6.32)式,包括任意多場算符的表达式都成立. 这个結果对以后的討論很重要. 在实际計算中,这里建立的規則使我們可以省去(8.9)式分母中的 $\langle S(\infty)\rangle$,同时不考慮不相連图形的貢献.

在表达式

$$-i\,\frac{(-i)^m}{m!}\int\cdots\int dt_1\cdots$$
$$\cdots dt_m\langle T(\psi(x)\psi^+(x')H_{int}(t_1)\cdots H_{int}(t_m))\rangle_c,$$

中,各种收縮的差別仅在于 $H_{int}$ 的順序的置換. 因而我們可以进一步簡化,省去因子 $1/m!$, 只考慮导致拓扑不等价图形的各种收

縮，即不能仅借助算符 $H_{int}$ 的置换求得的諸收縮．每个这种图形的貢献已經不含有与图形級别 $m$ 密切相关的因子．結果每个图形又可分解成諸元素，其中每一元素都可以单独看成是对某种格林函数的修正．因子 $\lambda^m$，其中 $\lambda$ 是常数，显然是无关紧要的．这样的因子并不妨碍把图形分解成元素．相反，如果出現了 $\frac{1}{m}$ 型的因子，它就要妨碍图形的分解和各部分的独立求和．

## §9. 各种类型相互作用的构图规則

**1. 坐标空間中的图解法．举例．** 現在我們詳細叙述各种情况下費曼图的构图規則．任何一个图的基础都是表示費米粒子或声子格林函数的綫．我們以实綫表示前者，以虛綫表示后者．每条綫上以箭头标出方向：从坐标为 $x$、自旋投影为 $\alpha$ 的点走向坐标为 $x'$、自旋投影为 $\beta$ 的点．这样，图 6a 的綫表示格林函数

$$G^{(0)}_{\alpha\beta}(x, x') \equiv G^{(0)}_{\alpha\beta}(x - x'),$$

而图 6b 表示格林函数

$$G^{(0)}_{\beta\alpha}(x', x) \equiv G^{(0)}_{\beta\alpha}(x' - x).$$

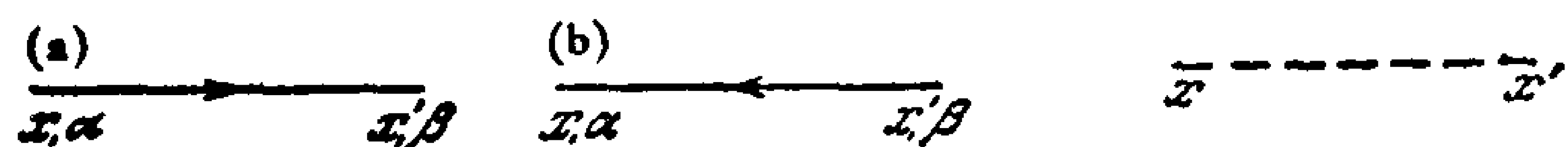



图 6　　图 7

声子綫(图 7)上可不标出箭头，因为我們在 §7 中已看到，$D^{(0)}$ 是 $x - x'$ 的偶函数．对綫条所連各点的坐标要进行积分(按整个空間和从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的时間)．此外还要对这些頂点的自旋变量求和．

下面分析各种具体情况．

A. 双粒子相互作用．

前面为了闡明图形和公式的对应关系，我們已討論了这种相互作用下最簡单的費曼图(图 4)．已經說明，不相連图形和因子 $\langle S(\infty)\rangle^{-1}$ 可以一齐省去．这样，第一級近似下就剩下了图 4 的 a, a′, b, b′．然而因为 $x_1$ 和 $x_2$ 是积分变量(而对相应的自旋变量要求和)，则图 a′ 等于图 a，图 b′ 等于图 b．这就抵消了 $H_{int}$ 中的因子 1/2．高級近似下也是如此．这样就得出如下作法：不写这个因子，同时只討論拓扑不等价图形(例如 a 和 b)．

此外还須注意以下情况．前面已經指出，每个图形的正負号取决于費米算符 $\psi$ 置换次数的奇偶．不难看出，图形上出現封閉环时才变号．因此图形的符号由因子 $(-1)^F$ 决定，其中 $F$ 是封閉环的数目．

还有一种情况值得注意，这就是某个函数 $G^{(0)}$ 中两个变量的时間重合．只有同一个哈密頓量 $H_{int}$ 中两个算符收縮时，才发生这种情况．由于 $H_{int}$ 中算符順序已經給定(所有 $\psi^+$ 位于 $\psi$ 之左)，这类 $G^{(0)}$ 应理解为极限 $\lim\limits_{\delta\to+0} G(t, t+\delta) \equiv \lim\limits_{\delta\to 0} G(-\delta) = i\langle\psi^+(r_1)\psi(r_2)\rangle$．

現在列出計算任何一級修正項的規則．

(1) 画出所有具有 $2n$ 个頂点和两条外綫的拓扑不等价图形．每个頂点連以两条实綫和一条波紋綫．

(2) 每条实綫对应格林函数 $G^{(0)}_{\alpha\beta}(x, x')$ ($x, \alpha$ 是起点坐标，$x', \beta$ 是終点坐标)．

(3) 每条波紋綫对应势 $V(x - x') = U(r - r')\delta(t - t')$．

(4) 对所有頂点的坐标积分 ($d^4x = dr\,dt$)，对所有內部自旋变量 $\alpha$ 求和．

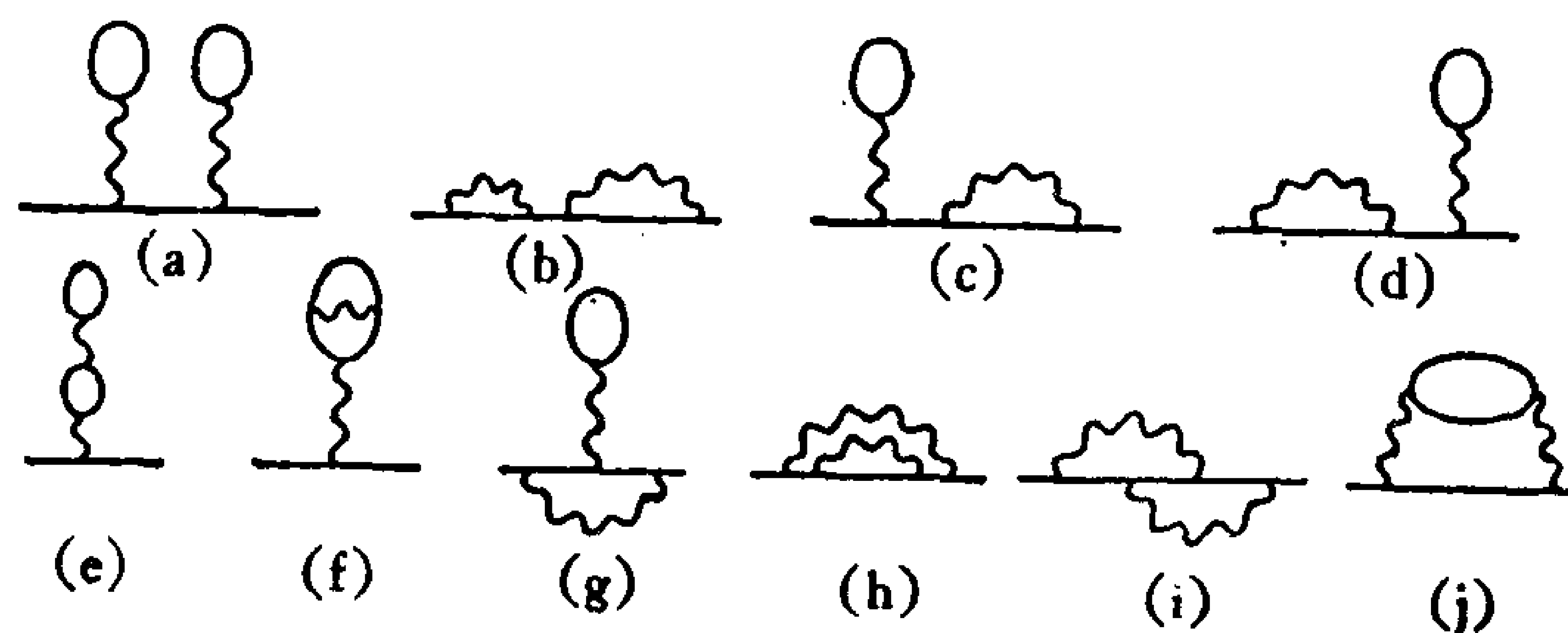



图 8

(5) 所得的表达式乘以 $i^n(-1)^F$，其中 $F$ 是封閉环的数目.

(6) 如果遇見时間变量为零的函数 $G^{(0)}$，則作为极限 $G^{(0)}(-0)$ 看待.

試以二級修正項为例. 相应的拓扑不等价相連图形示于图 8 中.

根据上述規則，它們对应的解析式是:

$$-\int d^4x_1d^4x_2d^4x_3d^4x_4G^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-x_1)G^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(x_1-x_2)\times$$
$$\times G^{(0)}_{\gamma_2\beta}(x_2-x')G^{(0)}_{\gamma_3\gamma_3}(0)G^{(0)}_{\gamma_4\gamma_4}(0)V(x_1-x_3)V(x_2-x_4), \quad \text{(a)}$$

$$-\int d^4x_1\cdots d^4x_4G^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-x_1)G^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(x_1-x_2)G^{(0)}_{\gamma_2\gamma_3}(x_2-x_3)\times$$
$$\times G^{(0)}_{\gamma_3\gamma_4}(x_3-x_4)G^{(0)}_{\gamma_4\beta}(x_4-x')V(x_1-x_2)V(x_3-x_4), \quad \text{(b)}$$

$$+\int d^4x_1\cdots d^4x_4G^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-x_1)G^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(x_1-x_2)G^{(0)}_{\gamma_2\gamma_3}(x_2-x_3)\times$$
$$\times G^{(0)}_{\gamma_3\beta}(x_3-x')G^{(0)}_{\gamma_4\gamma_4}(0)V(x_1-x_4)V(x_2-x_3), \quad \text{(c)}$$

$$+\int d^4x_1\cdots d^4x_4G^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-x_1)G^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(x_1-x_2)G^{(0)}_{\gamma_2\gamma_3}(x_2-x_3)\times$$
$$\times G^{(0)}_{\gamma_3\beta}(x_3-x')G^{(0)}_{\gamma_4\gamma_4}(0)V(x_1-x_2)V(x_3-x_4), \quad \text{(d)}$$

$$-\int d^4x_1\cdots d^4x_4G^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-x_1)G^{(0)}_{\gamma_1\beta}(x_1-x')G^{(0)}_{\gamma_2\gamma_3}(x_2-x_3)\times$$
$$\times G^{(0)}_{\gamma_3\gamma_2}(x_3-x_2)G^{(0)}_{\gamma_4\gamma_4}(0)V(x_1-x_2)V(x_3-x_4), \quad \text{(e)}$$

$$+\int d^4x_1\cdots d^4x_4G^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-x_1)G^{(0)}_{\gamma_1\beta}(x_1-x')G^{(0)}_{\gamma_2\gamma_3}(x_2-x_3)\times$$
$$\times G^{(0)}_{\gamma_3\gamma_4}(x_3-x_4)G^{(0)}_{\gamma_4\gamma_2}(x_4-x_2)V(x_1-x_2)V(x_3-x_4), \quad \text{(f)}$$

$$+\int d^4x_1\cdots d^4x_4G^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-x_1)G^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(x_1-x_2)G^{(0)}_{\gamma_2\gamma_3}(x_2-x_3)\times$$
$$\times G^{(0)}_{\gamma_3\beta}(x_3-x')G^{(0)}_{\gamma_4\gamma_4}(0)V(x_1-x_3)V(x_2-x_4), \quad \text{(g)}$$

$$-\int d^4x_1\cdots d^4x_4G^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-x_1)G^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(x_1-x_2)G^{(0)}_{\gamma_2\gamma_3}(x_2-x_3)\times$$
$$\times G^{(0)}_{\gamma_3\gamma_4}(x_3-x_4)G^{(0)}_{\gamma_4\beta}(x_4-x')V(x_1-x_4)V(x_2-x_3), \quad \text{(h)}$$

$$-\int d^4x_1\cdots d^4x_4G^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-x_1)G^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(x_1-x_2)G^{(0)}_{\gamma_2\gamma_3}(x_2-x_3)\times$$
$$\times G^{(0)}_{\gamma_3\gamma_4}(x_3-x_4)G^{(0)}_{\gamma_4\beta}(x_4-x')V(x_1-x_3)V(x_2-x_4), \quad \text{(i)}$$



$$+\int d^4x_1\cdots d^4x_4G^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-x_1)G^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(x_1-x_2)G^{(0)}_{\gamma_2\beta}(x_2-x')\times$$
$$\times G^{(0)}_{\gamma_3\gamma_4}(x_3-x_4)G^{(0)}_{\gamma_4\gamma_3}(x_4-x_3)V(x_1-x_3)V(x_2-x_4). \quad \text{(j)}$$

对于双粒子相互作用，可将微扰論表示成另一种更对称的形式. 当相互作用与自旋有关时，它更为便利. 此时相互作用哈密頓量为:

$$H_{int}=\frac{1}{2}\int\psi^+_\alpha(\boldsymbol{r}_1)\psi^+_\beta(\boldsymbol{r}_2)U_{\alpha\beta\gamma\delta}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\psi_\delta(\boldsymbol{r}_2)\psi_\gamma(\boldsymbol{r}_1)d\boldsymbol{r}_1d\boldsymbol{r}_2. \tag{9.1}$$

算符 $S$ 中的积分 $\int H_{int}dt$ 我們表示成以下对各变量都对称的形式:

$$\int H_{int}dt=$$
$$=\frac{1}{4}\int\cdots\int d^4x_1\cdots d^4x_4\psi^+_{\gamma_1}(x_1)\psi^+_{\gamma_2}(x_2)\Gamma^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}(x_1x_2,x_3x_4)\times$$
$$\times\psi_{\gamma_4}(x_4)\psi_{\gamma_3}(x_3). \tag{9.2}$$

由于算符 $\psi$ 的反对易性，可以認为函数 $\Gamma^{(0)}$ 对置换 $x_1\gamma_1\rightleftarrows x_2\gamma_2$ 和 $x_3\gamma_3\rightleftarrows x_4\gamma_4$ 是反对称的. 从表达式

$$U_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\delta(t_1-t_2)\delta(x_1-x_3)\delta(x_2-x_4)$$

中減去在其中置换了变量 3 和 4 [1]的类似的式子，就可以得到函数 $\Gamma^{(0)}$.

計算格林函数的一級修正項:

$$\delta G^{(1)}=-\frac{1}{4}\int d^4x_1\cdots d^4x_4\Gamma^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}(x_1x_2,x_3x_4)\times$$
$$\times\langle T(\psi_\alpha(x)\psi^+_\beta(x')\psi^+_{\gamma_1}(x_1)\psi^+_{\gamma_2}(x_2)\psi_{\gamma_4}(x_4)\psi_{\gamma_3}(x_3))\rangle$$

(以后在求平均符号 $\langle\cdots\rangle$ 中都省去表示相連图的角标). 由于 $\Gamma^{(0)}$ 对其变量的反对称性，我們只得出一項:

$$i\int d^4x_1d^4x_2d^4x_3d^4x_4G^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-x_1)G^{(0)}_{\gamma_3\gamma_2}(x_3-x_2)\times$$
$$\times G^{(0)}_{\gamma_4\beta}(x_4-x')\Gamma^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2;\gamma_3\gamma_4}(x_1x_2;x_3x_4).$$

---

1) 对于这种写法，相当于"跃迁" $x_1\gamma_1\to x_3\gamma_3$, $x_2\gamma_2\to x_4\gamma_4$ 的項取«+»号. 以后决定图形的符号时必須記住这点.

我們在图上将以空心方框記 $\Gamma^{(0)}$. 这样，一級近似的图就如图 9 所示。

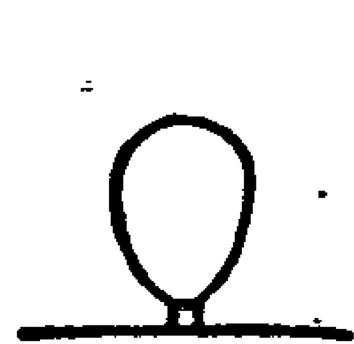


图 9

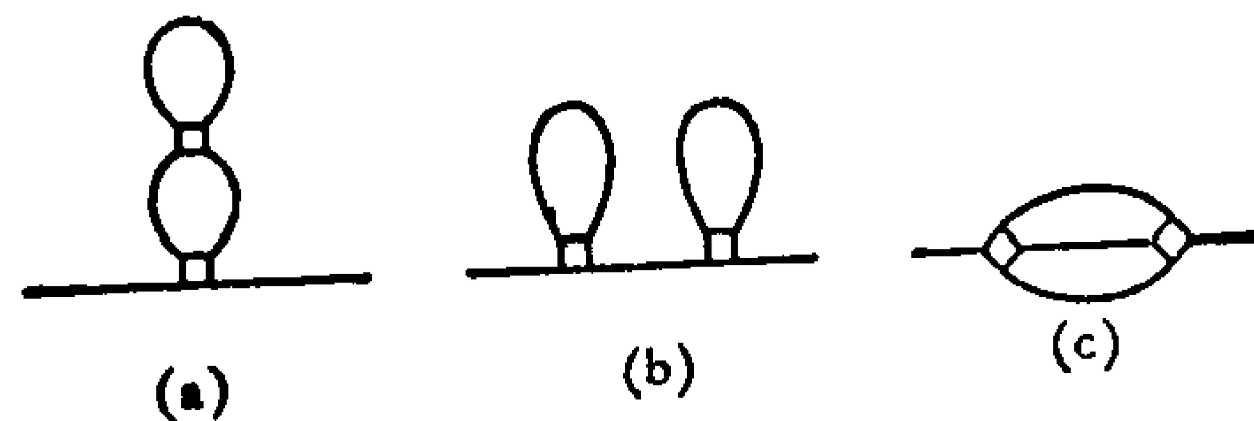



图 10

第二級近似有三个相連的拓扑不等价图（图 10）. 相应的表达式是：

$$-\int d^4x_1\cdots d^4x_8 G^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-x_1)G^{(0)}_{\gamma_3\beta}(x_3-x')G^{(0)}_{\gamma_4\gamma_5}(x_4-x_5)\times$$
$$\times G^{(0)}_{\gamma_7\gamma_2}(x_7-x_2)G^{(0)}_{\gamma_8\gamma_6}(x_8-x_6)\Gamma^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}(x_1x_2,\ x_3x_4)\times$$
$$\times \Gamma^{(0)}_{\gamma_5\gamma_6,\gamma_7\gamma_8}(x_5x_6,\ x_7x_8), \tag{a}$$

$$-\int d^4x_1\cdots d^4x_8 G^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-x_1)G^{(0)}_{\gamma_3\gamma_5}(x_3-x_5)G^{(0)}_{\gamma_7\beta}(x_7-x')\times$$
$$\times G^{(0)}_{\gamma_4\gamma_2}(x_4-x_2)G^{(0)}_{\gamma_8\gamma_6}(x_8-x_6)\Gamma^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}(x_1x_2,\ x_3x_4)\times$$
$$\times \Gamma^{(0)}_{\gamma_5\gamma_6,\gamma_7\gamma_8}(x_5x_6,\ x_7x_8) \tag{b}$$

$$-\frac{1}{2}\int d^4x_1\cdots d^4x_8 G^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-x_1)G^{(0)}_{\gamma_3\gamma_5}(x_3-x_5)\times$$
$$\times G^{(0)}_{\gamma_7\gamma_2}(x_7-x_2)G^{(0)}_{\gamma_8\beta}(x_8-x')G^{(0)}_{\gamma_4\gamma_6}(x_4-x_6)\times$$
$$\times \Gamma^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}(x_1x_2,\ x_3x_4)\Gamma^{(0)}_{\gamma_5\gamma_6,\gamma_7\gamma_8}(x_5x_6,\ x_7x_8). \tag{c}$$

注意最后一项含有因子 1/2.

$n$ 級修正項的計算規則是：

(1) 画出全部拓扑不等价图形（交換四角形頂点而得的图形是拓扑等价的）.

(2) 每条綫对应格林函数 $G^{(0)}_{\alpha\beta}(x-x')$.

(3) 每个四角形对应函数 $\Gamma^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}(x_1x_2,\ x_3x_4)$.

(4) 对所有四角形頂点坐标积分，对自旋变量求和.



(5) 每个图形乘以 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-\frac{m}{2}}(i)^n$. $m$ 等于本图形在不对称图解法中所对应的图形数目. 图形的符号也从与不对称图解法比較而定.

最后一条可以由下列討論看出. 例如取图 10a. 在不对称图解法中它对应于图 8 e, f, g, h. 所以 $m=4$. 至于图 10 c，則它只对应两个图，卽图 8i 和 j，因而 $m=2$，相应的表达式有系数 1/2[1].

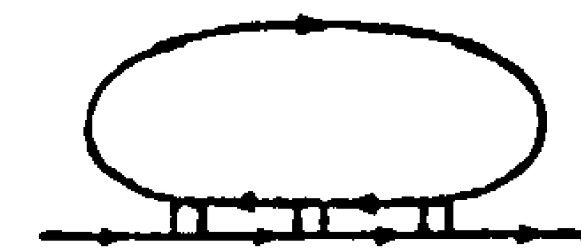


图 11

仍以图 10a 为例，說明如何选取符号. 我們将原来点 3 和点 1 重合，而点 2 和点 4 重合的表达式，进行反对称化而得 $\Gamma^{(0)}$. 如果在相应于图 10a 的表达式中令这些坐标重合，立刻就得出图 8e，它有两个封閉环，系数是 $(i)^2$. 实际計算时最好先写出各 $\Gamma^{(0)}$ 的变量，再参照图 8 中某个图形，写出諸 $G^{(0)}$ 的变量.

根据上述規則，图 11 上的三級图形对应着表达式：

$$-\frac{(i)^3}{2}\int d^4x_1\cdots d^4x_{12}G^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-x_1)G^{(0)}_{\gamma_3\gamma_5}(x_3-x_5)\times$$
$$\times G^{(0)}_{\gamma_7\gamma_9}(x_7-x_9)G^{(0)}_{\gamma_{11}\beta}(x_{11}-x')G^{(0)}_{\gamma_4\gamma_{10}}(x_4-x_{10})\times$$
$$\times G^{(0)}_{\gamma_{12}\gamma_6}(x_{12}-x_6)G^{(0)}_{\gamma_8\gamma_2}(x_8-x_2)\Gamma^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}(x_1x_2,\ x_3x_4)\times$$
$$\times \Gamma^{(0)}_{\gamma_5\gamma_6,\gamma_7\gamma_8}(x_5x_6,\ x_7x_8)\Gamma^{(0)}_{\gamma_9\gamma_{10},\gamma_{11}\gamma_{12}}(x_9x_{10},\ x_{11}x_{12}).$$

显而易見，如果将 $\Gamma^{(0)}$ 代以它通过势 $U_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)$ 的表达式，則上面的全部公式都成为不对称理論中的相应公式.

对于和自旋无关的点作用，卽势

$$U_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)=\lambda\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}\delta(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2).$$

各表达式的形状最为簡单. 这时 $\Gamma^{(0)}$ 为：

$$\Gamma^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}=\lambda(\delta_{\gamma_1\gamma_3}\delta_{\gamma_2\gamma_4}-\delta_{\gamma_1\gamma_4}\delta_{\gamma_2\gamma_3})\times$$
$$\times\delta(x_1-x_2)\delta(x_1-x_3)\delta(x_1-x_4)=\lambda L_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}\times$$

---

1) 在复杂图形中这样办法难以实行. 这时直接从(8.14)式得解析式最为簡单，而图形仅用以指示各种收缩方式.

$$\times\,\delta(x_1-x_2)\delta(x_1-x_3)\delta(x_1-x_4). \qquad (9.3)$$

图 9 和图 10 上空心四角形四个頂点的积分中只剩下一个．因此这些四角形可以换成点．例如图 9，图 10(c) 和图 11 将如图 12 所示，而相应的表达式是：

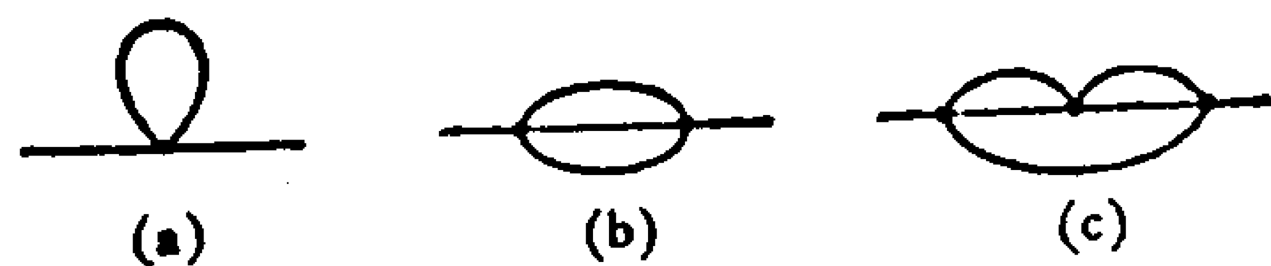



图 12

$$i\lambda L_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}G^{(0)}_{\gamma_3\gamma_2}(0)\int d^4x_1 G^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-x_1)G^{(0)}_{\gamma_4\beta}(x_1-x'), \qquad (a)$$

$$-\frac{\lambda^2}{2}L_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}L_{\gamma_5\gamma_6,\gamma_7\gamma_8}\int d^4x_1 d^4x_2 G^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-x_1)G^{(0)}_{\gamma_3\gamma_5}(x_1-x_2)\times$$
$$\times\, G^{(0)}_{\gamma_7\gamma_2}(x_2-x_1)G^{(0)}_{\gamma_8\beta}(x_2-x')G^{(0)}_{\gamma_4\gamma_6}(x_1-x_2), \qquad (b)$$

$$-\frac{i\lambda^3}{2}L_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}L_{\gamma_5\gamma_6,\gamma_7\gamma_8}L_{\gamma_9\gamma_{10},\gamma_{11}\gamma_{12}}\int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 G^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-x_1)\times$$
$$\times\, G^{(0)}_{\gamma_3\gamma_5}(x_1-x_2)G^{(0)}_{\gamma_7\gamma_9}(x_2-x_3)G^{(0)}_{\gamma_{11}\beta}(x_3-x')\times$$
$$\times\, G^{(0)}_{\gamma_4\gamma_{10}}(x_1-x_3)G^{(0)}_{\gamma_{12}\gamma_6}(x_3-x_2)G^{(0)}_{\gamma_8\gamma_2}(x_2-x_1). \qquad (c)$$

**B. 費米粒子和声子相互作用．**

考虑到以后的应用，我們将叙述各向同性金属模型中的电声子作用．相互作用的机构在于介質的振动导致极化．結果电子能量的改变值为

$$-e\int n(\boldsymbol{r})K(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\operatorname{div}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{r}', \qquad (9.4)$$

其中 $n(\boldsymbol{r})$ 是点 $\boldsymbol{r}$ 处的电子密度，$\boldsymbol{P}$ 是极化矢量，而 $K(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ 是相互作用函数．当 $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ 小于晶格常数时，$K(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\approx\dfrac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$．在更大的距离上，由于极化电荷被电子屏蔽，$K(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ 迅速減小到零．因而可能把 $K(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ 换成 $a^2\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$，其中 $a$ 是数量級为晶格周期的常数．极化矢量正比于介質位移：

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) = C\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}),$$



其中 $C$ 是常数，其数量級为 $Ze\dfrac{N}{V}\left(\dfrac{N}{V}\right.$——单位体积內之离子数，$Ze$——离子电荷$\left.\right)$．

既然电子和晶格振动的相互作用能中出現的是 $\operatorname{div}\boldsymbol{P}=C\operatorname{div}\boldsymbol{q}$，可見电子只和縱振动发生作用．根据 (9.4) 式可以把相互作用能量算符写成

$$ea^2C\int\psi^+(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r})\operatorname{div}\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}.$$

由于算符 $q_k$ 通过产生和消灭算符表示时要引进某个比例系数，我們自然可在定义場算符时适当选择附加因子，使得算符 $H_{int}$ 的形状最为簡单．不难看出，按(7.13)式选取算符 $\varphi(x)$ 时，电声子作用哈密頓量就成为

$$H_{int} = g\int\psi^+_\alpha(\boldsymbol{r})\psi_\alpha(\boldsymbol{r})\varphi(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}, \qquad (9.5)$$

其中相互作用常数 $g$ 等于

$$g = \frac{ea^2C}{u_0\sqrt{\rho}}$$

$\left(u_0=\dfrac{\omega_0(\boldsymbol{k})}{|\boldsymbol{k}|}\text{为声速}\right)$．如果将各常数的数量級通过电子参数表示，并代入上式，我們就得到：

$$g^2 = \frac{2\pi^2\zeta}{p_0 m}, \qquad (9.6)$$

其中 $m$ 是电子質量．这样的定义中 $\zeta$ 是无量綱常数，和实驗数据比較，可知对于金属它的数量級为一．

求格林函数时只須在 $S(\infty)$ 对 $H_{int}$ 的展开式中考虑偶次項．由于对电子和声子算符可彼此无关地作平均，电子格林函数的图形就与双費米子相互作用一样．唯一的改变是把波紋綫换成对应声子格林函数的虛綫，而在相应的表达式中作代换：

$$V(x_1-x_2)\to g^2D^{(0)}(x_1-x_2).$$

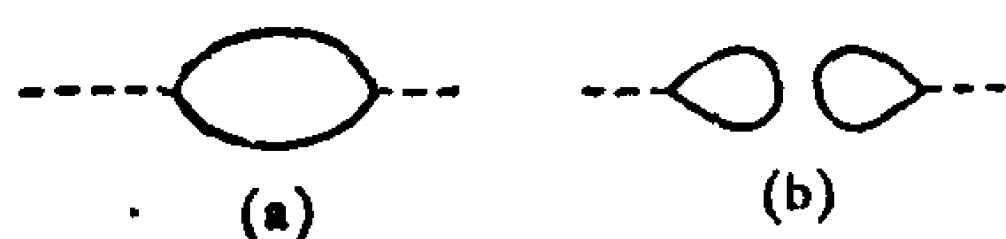
現在討論声子格林函数．它的不为零的最低級修正項来自对 $H_{int}$ 的二級項，其图解示于图 13 中．相应的式子是：

$$-g^2 i\int d^4x_1 d^4x_2 D^{(0)}(x-x_1)D^{(0)}(x_2-x')\times$$
$$\times G^{(0)}_{\alpha\beta}(x_1-x_2)G^{(0)}_{\beta\alpha}(x_2-x_1), \qquad \text{(a)}$$
$$+g^2 i\int d^4x_1 d^4x_2 D^{(0)}(x-x_1)D^{(0)}(x_2-x')\times$$
$$\times G^{(0)}_{\alpha\alpha}(0)G^{(0)}_{\beta\beta}(0). \qquad \text{(b)}$$

**我們証明,应令式中第二項等于零.** 根据函数 $D^{(0)}$ 的定义,其中的 $\boldsymbol{\varphi}$ 正比于 div$\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{q}$ 是位移矢量. 由此可知函数 $D^{(0)}(x-x_1)$ 正比于

$$\langle T(\boldsymbol{\varphi}(x), \text{div}\boldsymbol{q}(x_1))\rangle = \text{div}_{\boldsymbol{r}_1}\langle T(\varphi(x)\boldsymbol{q}(x_1))\rangle.$$

既然图 13(b) 的表达式中坐标 $\boldsymbol{r}_1$ 只进入 $D^0(x-x_1)$, 而后者又是一个散度,則对 $d\boldsymbol{r}_1$ 的积分可变換成表面积分; 无論假定边界上的位移为零,或是引入周期性边界条件,表面积分都等于零. 由于同样的原因,所有外綫被分离开的 $D$ 函数的图形都等于零.


(a)

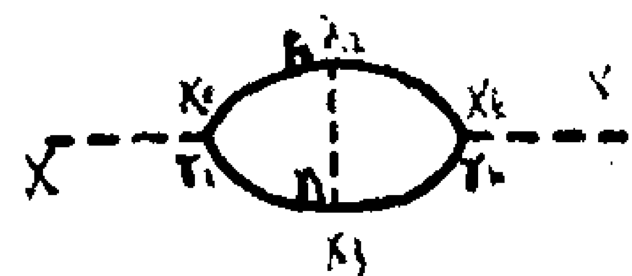

(b)

图 13

图 14

計算电子和声子格林函数修正項的共同規則可表述如下. 为了計算 $2n$ 級修正,必須

(1) 画出所有具有 $2n$ 个頂点的拓扑不等价相連图形,(形如图 13(b) 的图也不包括在内);

(2) 每条实綫对应函数 $G^{(0)}_{\alpha\beta}(x-x')$, 而虛綫对应函数 $D^{(0)}(x-x')$;

(3) 对所有頂点的坐标积分、自旋求和;

(4) 将所得結果乘以 $g^{2n}(-1)^F(i)^n$, 其中 $F$ 是費米子 $G^{(0)}$綫所构成的封閉环数目.

例如,对图 14 上的图形写出的式子就是:

$$g^4\int d^4x_1\cdots d^4x_4 D^{(0)}(x-x_1)D^{(0)}(x_2-x_3)D^{(0)}(x_4-x')\times$$
$$\times G^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(x_1-x_2)G^{(0)}_{\gamma_3\gamma_4}(x_2-x_4)G^{(0)}_{\gamma_4\gamma_3}(x_4-x_3)G^{(0)}_{\gamma_3\gamma_1}(x_3-x_1).$$

C. 外場.



我們要討論的最后一例,是粒子与外場的相互作用. 根据§6, 相互作用哈密頓量为

$$H_{int} = \int\psi^+_\alpha(\boldsymbol{r})V_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r},t)\psi_\beta(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}. \qquad (9.7)$$

考虑外磁場对粒子自旋的影响时,势 $V$ 具有角标 $\alpha\beta$. 这时 $V_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r},t) = \mu_0\sigma_{\alpha\beta}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$, 其中 $\mu_0$ 是粒子的磁矩,而 $\boldsymbol{\sigma}$ 是泡利矩陣.

容易看出,这种情况下所有的图形都具有图 15 所示的簡单形状. 图上斜十字表示位势 $V_{\alpha\beta}(x)$. 例如图 15(b) 的表达式就是

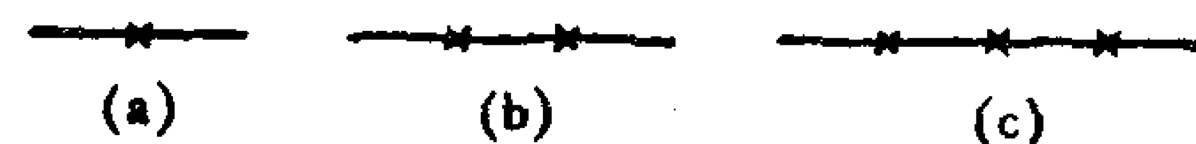



图 15

$$\int d^4x_1 d^4x_2 G^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-x_1)G^{(0)}_{\gamma_2\gamma_3}(x_1-x_2)\times$$
$$\times G^{(0)}_{\gamma_4\beta}(x_2-x')V_{\gamma_1\gamma_2}(x_1)V_{\gamma_3\gamma_4}(x_2).$$

画图和写表达式的規則也一目了然. 各級图形的系数都等于一. 唯一应指出的是,空間和时間的均匀性被破坏. 結果格林函数将分別与 $x$ 和 $x'$ 有关,而不只是差 $x-x'$ 的函数.

**2. 动量空間中的图解法. 举例.** 上述图解法使我們不难把微扰論級数的任何項写成积分形式. 然而由于 $G^{(0)}$ 和 $D^{(0)}$ 是时間变量的不連續函数,积分的計算就十分困难. 計算格林函数的修正項时, 須把对时間的积分分成許多区間, 其数目在近似的阶数增加时急剧增加. 避免这个困难的办法是把各量都展成傅立叶积分.

首先从双粒子相互作用开始討論.

A. 双費米粒子相互作用.

考虑相应于图 4(b) 的表达式:

$$i\int G^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-x_1)G^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(x_1-x_2)G^{(0)}_{\gamma_2\beta}(x_2-x')\times$$
$$\times V(x_1-x_2)d^4x_1 d^4x_2.$$

把所有的函数都展成傅立叶积分:

$$G^{(0)}_{\alpha\gamma}(x_1-x_2)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}G^{(0)}_{\alpha\gamma}(p)e^{ip(x_1-x_2)},$$

$$V(x_1-x_2)=\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}V(q)e^{iq(x_1-x_2)},$$

其中 $p$ 和 $q$ 是四維矢量 $p=(\mathbf{p},\omega)$, $q=(\mathbf{q},\omega)$,而乘积 $p(x_1-x_2)$ 等于 $\mathbf{p}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)-\omega(t_1-t_2)$. 在 §7 中已求得了自由費米粒子格林函数 $G^{(0)}_{\alpha\gamma}(p)$ 的表达式(在(7.7)式中将 $\omega$ 換成 $\omega+\mu$). 将这些展开式代入上面的修正項,就有

$$i(2\pi)^{-16}\int G^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(p_1)G^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(p_2)G^{(0)}_{\gamma_2\beta}(p_3)V(q)e^{ip_1(x-x_1)+ip_2(x_1-x_2)}\times$$
$$\times e^{ip_3(x_2-x')+iq(x_1-x_2)}d^4p_1d^4p_2d^4p_3d^4q\,d^4x_1d^4x_2.$$

对 $d^4x_1$ 和 $d^4x_2$ 积分,得到:

$$i(2\pi)^{-8}\int G^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(p_1)G^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(p_2)G^{(0)}_{\gamma_2\beta}(p_3)V(q)\delta(p_1-p_2-q)\times$$
$$\times\delta(p_2+q-p_3)e^{ip_1x-ip_3x'}d^4p_1d^4p_2d^4p_3d^4q.$$

再对 $x$ 和 $x'$ 取此积分的傅立叶分量. 結果有:

$$\delta G^{(1)}_{\alpha\beta}(p,p')=i\int G^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(p)G^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(p_2)G^{(0)}_{\gamma_2\beta}(p')V(q)\times$$
$$\times\delta(p-p_2-q)\delta(p_2+q-p')d^4p_2d^4q.$$

和图 4(b) 比較之后看到,现在每条实綫对应 $G^{(0)}(p)$, 波紋綫对应 $V(q)$, 每个頂点对应表示能量和动量守恆的 $\delta$-函数 $\delta(\Sigma p)=\delta(\Sigma\mathbf{p})\delta(\Sigma\omega)$, 并且对內綫的动量进行积分. 完成对 $d^4p_2$ 的积分, 并注意 $G^{(0)}_{\alpha\beta}(p)=G^{(0)}(p)\delta_{\alpha\beta}$, 得:

$$\delta G^{(1)}_{\alpha\beta}(p,p')=\delta G^{(1)}(p)\delta(p-p')(2\pi)^4\delta_{\alpha\beta},$$

$$\delta G^{(1)}(p)=iG^{(0)}(p)\int G^{(0)}(p-q)V(q)\frac{d^4q}{(2\pi)^4}G^{(0)}(p).$$

所得的表达式 $\delta G^{(1)}(p)$ 乃是函数 $G(x-x')$ 对变量 $x-x'$ 的傅立叶分量的修正项,它使我們能很直观地解释費曼图所代表的过程. 可以設想一个动量为 $p$ 的粒子, 在运动过程中放出一个动量为 $q$ 的"相互作用量子",本身动量成为 $p-q$. 隔一段时間之后粒子再吸收这个量子,动量仍成为 $p$.

其它的图形中也可以作类似的变换. 例如,图 4(a) 对应的修



正项 $\delta G^{(1')}(p)$ 是:

$$\delta G^{(1')}=-2iG^{(0)}(p)V(0)\int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}G^{(0)}(p_1)e^{i\omega t}G^{(0)}(p),$$

其中 $t\to+0$. 积分下引入因子 $e^{i\omega t}$, 是因为在坐标表象中此处的函数 $G$ 的两个变量重合, 应定义为极限 $G^{(0)}(-0)$. 系数 2 来自对自旋取陣迹. 图 16 中画出了动量表象中 $\delta G^{(1)}$ 和 $\delta G^{(1')}$ 的图形.

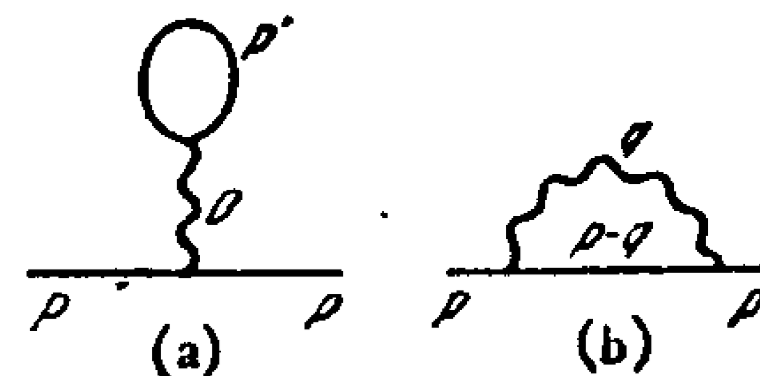



图 16

討論任意的 $n$ 級图, 它有 $n$ 个頂点, $2n+1$ 条实綫和 $n$ 条波紋綫. 如果代入 $G^{(0)}$ 和 $V$ 的傅立叶变换, 对 $2n$ 个頂点坐标积分,我們就得到 $2n$ 个表示守恆律的 $\delta(\Sigma p)$型因子. 守恆律之一使外綫的动量相等, 結果 $G(x,x')$ 的微扰展开所有各項都只和 $x-x'$ 有关,这乃是空間均匀性的显然后果. 剩下的 $2n-1$ 个 $\delta$ 函数使得 $3n-1$ 个对內綫(实綫和波紋綫都算在內)四維动量的积分只留下 $n$ 个.

現在列出按一定图形写表达式的一般規則.

(1) 每条綫带有一个四維动量. 两条外綫具有相同的外动量,而內綫的动量应在各頂点滿足守恆律.

(2) 每条实綫表示

$$G^{(0)}_{\alpha\beta}(p)=\frac{\delta_{\alpha\beta}}{\omega-\xi(\mathbf{p})+i\delta\,\mathrm{sign}\,\xi(\mathbf{p})},$$

其中

$$\xi(\mathbf{p})=\varepsilon_0(\mathbf{p})-\mu=\frac{p^2}{2m}-\mu,\quad\delta\to+0.$$

(3) 每条波紋綫表示:

$$V(q)=U(\mathbf{q}).$$

(4) 对 $n$ 个相互无关的四維动量积分.

(5) 在所得表达式前置以因子 $(i)^n(2\pi)^{-4n}(-1)^F$, 其中 $F$ 为封閉环数.

按这些規則不难写出格林函数的任意修正项. 例如图 17 表

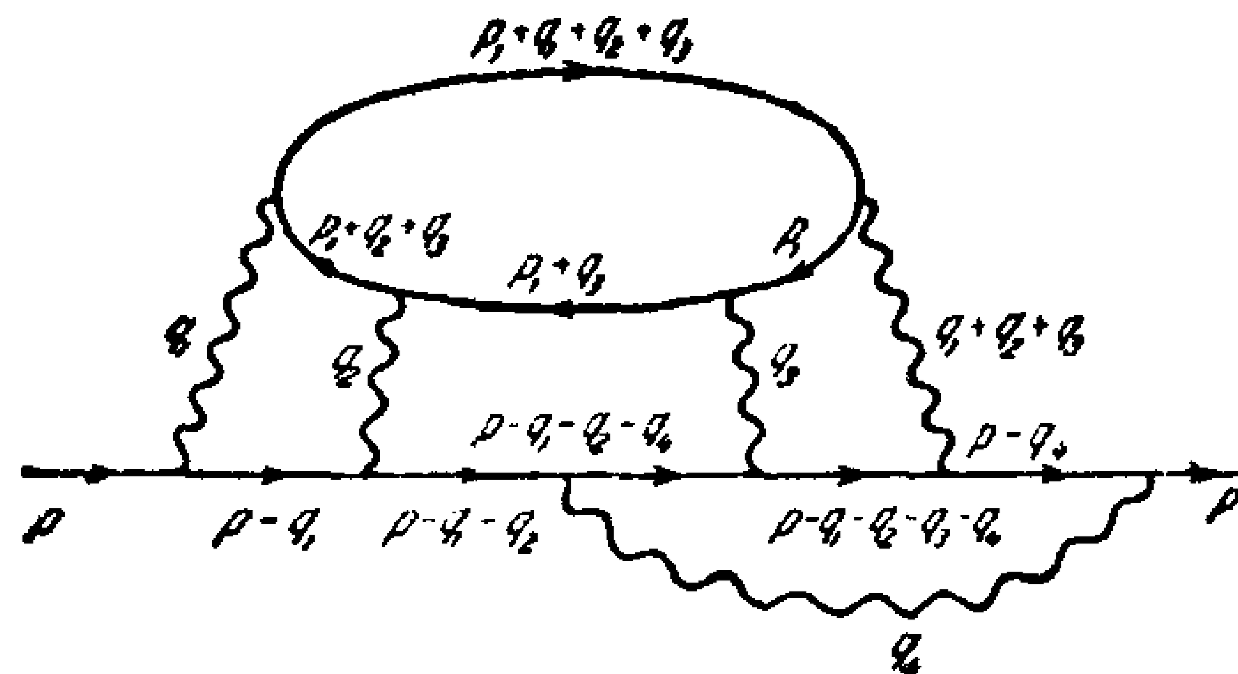


图 17

示的修正項等于

$$-i\delta_{\alpha\beta}G^{(0)2}(p)(2\pi)^{-20}\int d^4q_1\cdots d^4q_4U(q_1)U(q_2)U(q_3)\times$$

$$\times U(q_1+q_2+q_3)U(q_4)G^{(0)}(p-q_1)G^{(0)}(p-q_1-q_2)\times$$

$$\times G^{(0)}(p-q_1-q_2-q_4)G^{(0)}(p-q_1-q_2-q_3-q_4)\times$$

$$\times G^{(0)}(p-q_4)\int d^4p_1G^{(0)}(p_1)G^{(0)}(p_1+q_3)G^{(0)}(p_1+q_2+q_3)\times$$

$$\times G^{(0)}(p_1+q_1+q_2+q_3).$$

現在討論双粒子相互作用的对称图解法．前面已引入了对称化了的量 $\Gamma^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}(x_1x_2;x_3x_4)$． 根据定义 $\Gamma^{(0)}$ 就只和坐标的差有关．因此其傅立叶分量必含有 $\delta(p_1+p_2-p_3-p_4)$． 所以最好直接将 $\Gamma^{(0)}$ 的傅立叶分量定义成

$$(2\pi)^4\delta(p_1+p_2-p_3-p_4)\Gamma^{(0)}(p_1,p_2;p_3,p_1+p_2-p_3)=$$

$$=\int d^4x_1\cdots d^4x_4\Gamma^{(0)}(x_1x_2,x_3x_4)e^{-ip_1x_1-ip_2x_2+ip_3x_3+ip_4x_4}.$$

图 9 所示的一級修正項的傅立叶变换为:

$$-iG^{(0)2}(p)\int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\Gamma_{\alpha\gamma,\beta\gamma}(pp_1;pp_1)G^{(0)}(p_1).$$

动量空間中的图形示于图 18 中． 一般构图規則和前面沒有任何差別． 例如，$n$ 級图的系数与坐标表象中的系数只差一因子 $(2\pi)^{-4n}$．

B. 电声子相互作用．

电子或声子格林函数 $2n$ 級图解的一般規則为:



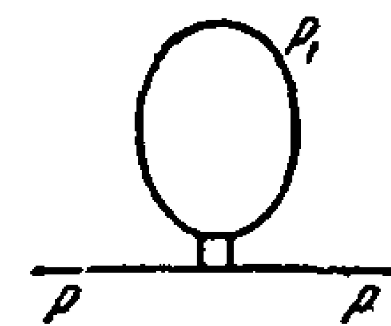


图 18

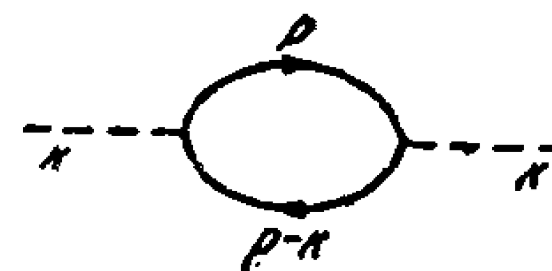


图 19

(1) 每条实綫表示

$$G^{(0)}(\boldsymbol{p})=\frac{1}{\omega-\xi(p)+i\delta\,\mathrm{sign}\,\xi(p)},$$

其中 $\delta\to+0$;

(2) 每条声子綫(虛綫)表示(見(7.16))

$$D_0(k)=\frac{\omega_0^2(\boldsymbol{k})}{\omega^2-\omega_0^2(\boldsymbol{k})+i\delta},$$

其中 $\delta\to+0$;

(3) 对 $n$ 个相互无关的动量进行积分;

(4) 积分結果乘以因子

$$g^{2n}(2\pi)^{-4n}(i)^n(-1)^F,$$

其中 $F$ 是封閉电子环的数目．

例如，图 19 所示的二級图对应表达式

$$-2[D^{(0)}(k)]^2g^2i\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}G^{(0)}(p)G^{(0)}(p-k).$$

C. 外場．

前面已經指出，有外場存在时空間不再是均匀的，$G(x,x')$ 也不再只是差 $x-x'$ 的函数．因此我們將討論 $G_{\alpha\beta}(x,x')$ 对两个变量所作的傅立叶变换 $G_{\alpha\beta}(p,p')$:

$$G_{\alpha\beta}(x,x')=\int G_{\alpha\beta}(p,p')e^{ipx-ip'x'}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{d^4p'}{(2\pi)^4}.$$

将图 15(a) 的表达式

$$\int dx_1G^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-x_1)G^{(0)}_{\gamma_2\beta}(x_1-x')V_{\gamma_1\gamma_2}(x_1),$$

作傅立叶变换，得

$$G^{(0)}(p)V_{\alpha\beta}(p-p')G^{(0)}(p'),$$

其中 $V_{\alpha\beta}(p)$ 是 $V_{\alpha\beta}(x)$ 的傅立叶分量：

$$V_{\alpha\beta}(x)=\int V_{\alpha\beta}(p)e^{ipx}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}.$$

动量空間中的相应图形示于图 20(a)． 图 20(b) 所示的下一級近似图对应表达式：

$$G^{(0)}(p)\int V_{\alpha\gamma}(p-p_1)G^{(0)}(p_1)V_{\gamma\beta}(p_1-p')\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}G^{(0)}(p').$$

因此，在 $G(p,p')$ 的 $n$ 級图中：

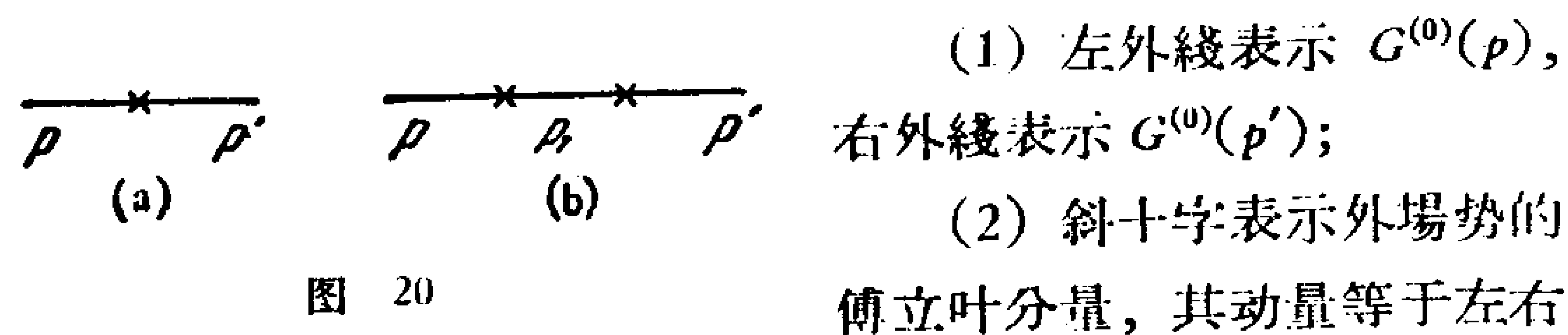



图 20

(1) 左外綫表示 $G^{(0)}(p)$，右外綫表示 $G^{(0)}(p')$；

(2) 斜十字表示外場势的傅立叶分量，其动量等于左右二条$G^{(0)}$ 綫的动量差；

(3) 对除了两条外綫以外的所有 $G^{(0)}$ 綫动量积分，对所有 $V$ 的自旋变量(外端点除外)求和；

(4) 积分与求和之后乘以系数$(2\pi)^{-4(n-1)}$.

## § 10. 戴逊方程．頂角部分．多粒子格林函数

**1. 图形求和．戴逊方程．** 在量子統計的多数問題中，通常不能只限于考虑微扰論級数的前几項．这时須把对应所謂“主要”图形的无限序列求和，这些图形由于問題所給的条件，有同数量級的貢献． 上述格林函数图解法的优越性，就在于微扰論級数某个无限(或有限)項集合的求和，可与独特的“图形求和”相对应． 每个表示这种和的图形，由諸元素构成，其中每个元素自己又是求和的結果． 例如，这种图形的綫就可以表示格林函数微扰論无限序列的和(图形的“和”)．图形与表达式的对比按照和微扰論中相同的規則進行：每条綫代表相应的图形和等等．

图形求和的可能性基于前面所述的按相应图形計算格林函数修正項的規則． 只要略加审視即可看出，图形及其表达式好象是由个別的砖块——格林函数和頂角算符——构成，而起連接作用的元素(“水泥”)则是对坐标(或动量)的积分．这就使我們可能不从最簡单的元素、即零級格林函数 $G^{(0)}$ 和簡单頂角开始构图，而立即取由大量簡单元素构成的整块結构．

試以图 21(a) 为例．我們可以按图解法規則写出相应的表达式．現在换一种作法．先算出图中以虛綫标出的部分图形的貢献，而后写出对应图 21(b)的表达式，但是其中以短綫标出的綫不对应于$G^{(0)}$，而对应于前面算出的更复杂的綫．不难借直接計算驗証，两种作法的結果相同．

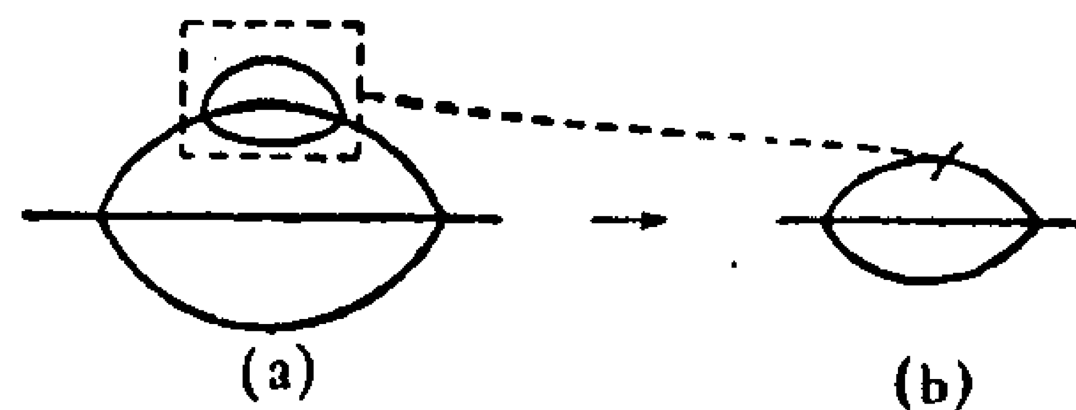



图 21

这个結果具有完全普遍的意义．我們总可以从 $G$ 的图形中分出不含外綫而与其它部分仅以两条 $G^{(0)}$ 綫相連的部分，算出它的貢献，再利用“簡化”图形写出整个图的表达式，这时图中相应的綫要代以前面分出部分的貢献．

图形中任何与其它部分以两条 $G^{(0)}$ (或 $D^{(0)}$) 綫相連的部分我們將称为自能部分．如果它不能再分成以一条 $G^{(0)}$ 綫相連的两部分，就称为不可約自能部分．例如，图 9、10(a) 和 10(c) 所示的自能部分是不可約的，而图 10(b) 是可約的． 函数 $G$ 和 $D$ 的一切图形都是一条基本不可約自能部分綫，其上串着許多不可約自能部分，它們可按任意順序重复无穷次．

在一般情况下不可能将格林函数的全部图形求和．然而可以进行部分求和，使得在此求和后，剩下的只是对不可約自能部分求和．

考虑 $G$ 函数的任一图形．它从 $G^{(0)}$ 綫开始．然后是某个不可約自能部分．如果将这两个元素分离，则剩下的图形还是从$G^{(0)}$綫开始而且可以包括任何数量的任意自能部分． 因此，剩下的还是完全 $G$ 函数．由此得到 $G$ 的如下方程

$$G=G^{(0)}+G^{(0)}\Sigma G$$

或者，同样地：

$$G^{-1}=G^{(0)-1}-\Sigma, \tag{10.1}$$

其中

$$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\cdots \tag{10.2}$$

乃是各种不可約自能部分之和．数量 $\Sigma$ 我們将称作完全不可約自能部分或質量算符．

$\Sigma$ 也可借助图形計算，它与 $G$ 的图形的差别只是沒有两条外 $G^{(0)}$ 綫．然而，在不能只限于計算前几个图形，而必須将无穷級数求和的情况下，通常更方便的作法是把 $\Sigma$ 通过另一个图形集合表示，后者我們称为頂角部分．这步手續随相互作用的具体形状而异，我們仍以 §9 中討論过的几种相互作用为例．

A. 双粒子相互作用．

这时最好利用对称形式的理論．$\Sigma$ 的一級项对应于沒有外 $G^{(0)}$ 綫的图 9．从所有高級项中我們首先分出自能部分仅以一个空心方框 $\Gamma^{(0)}$ 和基本 $G$ 綫相連的图形．例子是图10(a)．显然 $\Sigma$ 中所有这类图形可得自一級图，只須在图中內 $G^{(0)}$ 綫上加上各种可能的自能部分．这时內綫就变成了完全 $G$ 綫．因此，$\Sigma$ 中一切与基本 $G$ 綫以一个方框 $\Gamma^{(0)}$ 相連的图形总合等于



图 22

$$\Sigma^{(1)}_{\alpha\beta}(p)=i\int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\Gamma^{(0)}_{\alpha\gamma;\delta\beta}(p,p_1;p_1,p)G_{\delta\gamma}(p_1). \tag{10.3}$$

我們規定以粗綫表示完全 $G$ 函数．这时 $\Sigma^{(1)}$ 可用图 22 所示的图形表示．

这个序列中未能包括的最簡图形，是图 10(c) 所示的自能部分．在它的內 $G^{(0)}$ 綫中加入自能部分，可以得到某些更复杂的图形．但是用这种方法得不到图 11．然而它还是可以看成图 10(c) 的某种复杂化的結果．如果我們切断从图 11 左端方框 $\Gamma^{(0)}$ 中伸出的三条內 $G^{(0)}$ 綫，則可以看出，它是把图10(c) 右端方框代以图 23 所示的图形的結果．

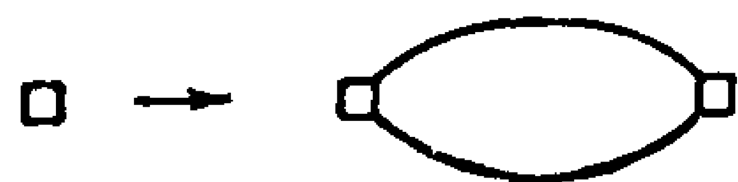


图 23



不难看出，在图 10(c)[1] 的內 $G^{(0)}$ 綫中插入自能部分，并把右端方框代以有四个端点的相連图形之集合，就可以得到所有未包括在(10.3)式中的 $\Sigma$ 的图形．这种有四个端点的集合，我們称为頂角部分，并記为 $\Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1p_2;p_3p_4)$，在图上用实心方框表示．和 $\Gamma^{(0)}$ 一样，$\Gamma$ 中的四維动量应滿足守恆律：$p_1+p_2=p_3+p_4$．



图 24

这样，$\Sigma$ 的第二部分以图 24 表示，并且等于

$$\Sigma^{(2)}_{\alpha\beta}=-\frac{1}{2}\int\Gamma^{(0)}_{\alpha\xi,\eta\delta}(p,p_1;p_2,p+p_1-p_2)G_{\eta\mu}(p_2)G_{\nu\xi}(p_1)\times$$
$$\times G_{\delta\gamma}(p+p_1-p_2)\Gamma_{\mu\gamma,\nu\beta}(p_2,p+p_1-p_2;p_1,p)\frac{d^4p_1d^4p_2}{(2\pi)^8}. \tag{10.4}$$

把 $\Sigma=\Sigma^{(1)}+\Sigma^{(2)}$ 代入方程式(10.1)，得到：

$$[\omega-\xi(p)]G_{\alpha\beta}(p)-i\int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\Gamma^{(0)}_{\alpha\xi,\eta\gamma}(pp_1;p_1p)G_{\eta\xi}(p_1)G_{\gamma\beta}(p)+$$
$$+\frac{1}{2}\int\Gamma^{(0)}_{\alpha\xi,\eta\delta}(p,p_1;p_2,p_1+p-p_2)G_{\eta\mu}(p_2)G_{\nu\xi}(p_1)\times$$
$$\times G_{\delta\gamma}(p+p_1-p_2)\times$$
$$\times\Gamma_{\mu\gamma,\nu\rho}(p_2,p+p_1-p_2;p_1,p)\frac{d^4p_1d^4p_2}{(2\pi)^8}G_{\rho\beta}(p)=\delta_{\alpha\beta}. \tag{10.5}$$

这个联系 $G$ 函数和頂角部分的方程称为戴逊方程．这里是用图形求和法得到这个方程的．以后要給出戴逊方程的解析推导，并更仔細地研究頂角部分．

B. 电声子作用．

电子格林函数中 $\Sigma$ 的最簡单图形如图 25(a)．完全和前面类似地可証明，这是唯一的骨架图形，也就是說，在它的內 $G^{(0)}$ 和 $D^{(0)}$ 綫上插入自能部分，并把右頂点换成所謂頂角部分，就可以得到全部更




图 25

1) 图 9 和图 10(c) 是构成更复杂的图形的基础，它們有时称为骨架图形．

复杂的图形，这里頂角部分指的是一切具有一个声子端和两个电子端的图形总和，記为$\Gamma(p, p-k; k)$，在图上用实心三角形表示。

因此对于电声子相互作用，电子的完全不可約自能部分$\Sigma$用图 25(b) 表示，它等于

$$\Sigma = ig\int G(p-k)D(k)\Gamma(p-k, p; k)\frac{d^4k}{(2\pi)^4} \quad (10.6)$$

(式中已令 $G_{\alpha\beta} = G\delta_{\alpha\beta}$)。

将上式代入(10.1)式，得戴逊方程式：

$$[\omega - \xi(p)]G(p) - ig\int G(p-k)D(k) \times$$
$$\times \Gamma(p-k, p; k)\frac{d^4k}{(2\pi)^4}G(p) = 1. \quad (10.7)$$

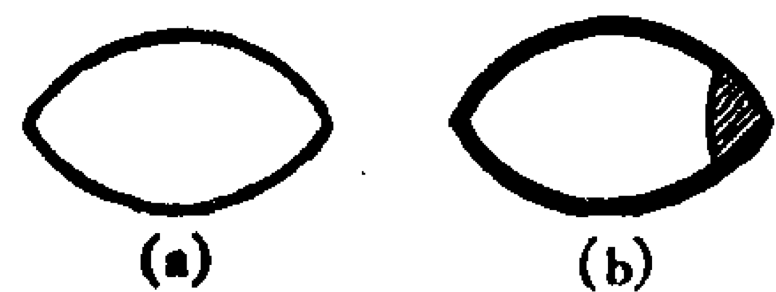


图 26

声子自能部分我們記作$\Pi$，它可以类似地从图 26(a) 所示的骨架图形得到，为此只須将电子$G^{(0)}$綫換成完全$G$綫，并把一个常数$g$代成頂角部分。这时图 26(a) 变成 26(b)，它等于

$$\Pi(k) = -2ig\int G(p)G(p-k)\Gamma(p, p-k; k)\frac{d^4p}{(2\pi)^4}. \quad (10.8)$$

这种情况下戴逊方程式的形状是

$$[\omega_0^2(\boldsymbol{k})]^{-1}[\omega^2 - \omega_0^2(\boldsymbol{k})]D(k) +$$
$$+ 2ig\int G(p)G(p-k)\Gamma(p, p-k; k)\frac{d^4p}{(2\pi)^4}D(k) = 1. \quad (10.9)$$

C. 外場.

对处于外場中的費米粒子系統，也可以写出戴逊方程型的方程。注意到$G$的所有的图形都是如图 15 所示的鏈，我們看出，势$V_{\alpha\beta}$的傅立叶分量就起着$\Sigma$的作用。这时戴逊方程式是

$$[\omega - \xi(\boldsymbol{p})]G_{\alpha\beta}(p,p') - \int V_{\alpha\gamma}(p-p_1)G_{\gamma\beta}(p_1, p')\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (10.10)$$



**2. 頂角部分．多粒子格林函数．** 戴逊方程式可以直接得自海森堡算符的运动方程式

$$i\frac{\partial\tilde{\psi}_\alpha}{\partial t} = [\tilde{\psi}_\alpha(x), \hat{H} - \hat{N}\mu].$$

$$\hat{H} = -\int\psi_\alpha^+(\boldsymbol{r})\frac{\Delta}{2m}\psi_\alpha(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r} + H_{int}.$$

算符$\hat{H}$和$\hat{N}$旣可通过薛定格算符$\psi_\alpha(\boldsymbol{r})$表示、也可通过海森堡算符$\tilde{\psi}_\alpha(\boldsymbol{r}, t)$表示，反正在两个表象中它們的形状是相同的。

从$\hat{H} - \mu\hat{N}$中分出$H_{int}$，并利用算符$\tilde{\psi}$和$\tilde{\psi}^+$在同一时刻的对易关系，得：

$$i\frac{\partial\tilde{\psi}_\alpha}{\partial t} = \left(-\frac{\Delta}{2m} - \mu\right)\tilde{\psi}_\alpha(x) + [\tilde{\psi}_\alpha(x), H_{int}].$$

对第一个时間变量微分$G$函数：

$$i\frac{\partial}{\partial t}G_{\alpha\beta}(x, x') = \frac{\partial}{\partial t}\langle T(\tilde{\psi}_\alpha(x)\tilde{\psi}_\beta^+(x'))\rangle.$$

再把$T(\cdots)$表示为

$$\theta(t-t')\tilde{\psi}_\alpha(x)\tilde{\psi}_\beta^+(x') - \theta(t'-t)\tilde{\psi}_\beta^+(x')\tilde{\psi}_\alpha(x),$$

其中

$$\theta(t) = \begin{cases}1, & t > 0,\\ 0, & t < 0.\end{cases}$$

这时就有：

$$i\frac{\partial}{\partial t}G_{\alpha\beta}(x, x') =$$
$$= \theta(t-t')\frac{\partial\tilde{\psi}_\alpha(x)}{\partial t}\tilde{\psi}_\beta^+(x') - \theta(t'-t)\tilde{\psi}_\beta^+(x')\frac{\partial\tilde{\psi}_\alpha(x)}{\partial t} +$$
$$+ \delta(t-t')(\tilde{\psi}_\alpha(\boldsymbol{r}, t)\tilde{\psi}_\beta(\boldsymbol{r}', t) + \tilde{\psi}_\beta^+(\boldsymbol{r}', t)\tilde{\psi}_\alpha(\boldsymbol{r}, t)) =$$
$$= \left\langle T\left(\frac{\partial\tilde{\psi}_\alpha(x)}{\partial t}\tilde{\psi}_\beta^+(x')\right)\right\rangle + \delta(x-x')\delta_{\alpha\beta}.$$

这里已經利用了对易规則．最終結果是：

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\Delta}{2m} + \mu\right)G_{\alpha\beta}(x, x') =$$

$$= \delta(x-x')\delta_{\alpha\beta} - i\langle T([\tilde{\psi}_\alpha(x)H_{int}], \tilde{\psi}^+_\beta(x'))\rangle. \qquad (10.11)$$

右端的形状随具体的相互作用而不同，因此我們轉而討論几种特例．

A．双粒子相互作用．

算符 $H_{int}$ 由(9.2)式給定． 完成計算并将結果化成对称形式(如推导(9.3)式时所作)，我們得到(10.11)式最后一項为：

$$-\frac{i}{2}\int d^4x_2d^4x_3d^4x_4\Gamma^{(0)}_{\alpha\gamma_2;\gamma_3\gamma_4}(xx_2;x_3x_4)\times$$

$$\times\langle T(\tilde{\psi}^+_{\gamma_2}(x_2)\tilde{\psi}_{\gamma_4}(x_4)\tilde{\psi}_{\gamma_3}(x_3)\tilde{\psi}^+_\beta(x'))\rangle.$$

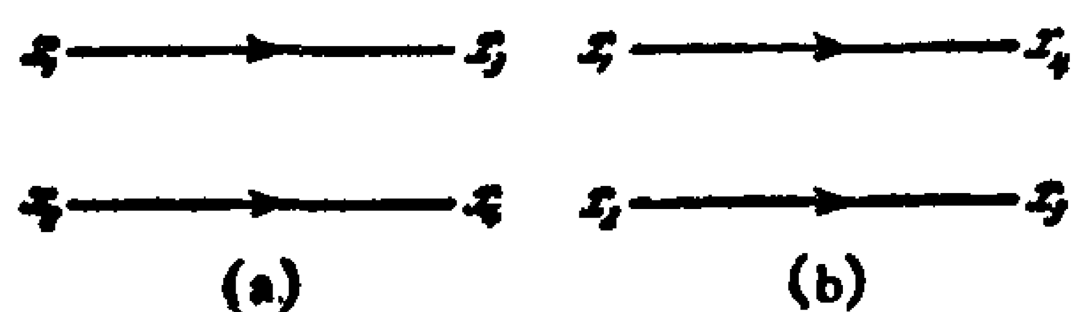
于是問題就归結为計算四个 $\psi$ 算符編时乘积的平均值．这个量我們将称为双粒子格林函数：

$$G^{II}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(x_1x_2;x_3x_4)=\langle T(\tilde{\psi}_\alpha(x_1)\tilde{\psi}_\beta(x_2)\tilde{\psi}^+_\gamma(x_3)\tilde{\psi}^+_\delta(x_4))\rangle. \qquad (10.12)$$

根据(6.32)式，$G^{II}$ 可以通过相互作用表象的 $\psi$ 算符表示：

$$G^{II}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(x_1x_2;\ x_3x_4) = \frac{\langle T(\psi_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_2)\psi^+_\gamma(x_3)\psi^+_\delta(x_4))S(\infty)\rangle}{\langle S(\infty)\rangle}. \qquad (10.13)$$

这个式子的計算和格林函数的計算完全相似． 分子中的算符 $S(\infty)$ 按 $H_{int}$ 的冪展成級数． 然后利用維克定理，可将級数的每一項表示成含有 $G^{(0)}$ 函数乘积的若干項之和．每个这种項对应一个费曼图．这些图形与格林函数图形的差别，在于有四个外端点．和从前一样容易看出，只須考虑相連图形，即沒有与端点不連結部分的图形；同时应省去分母中的 $S(\infty)$． 另一条規則也是成立的，即所有表达式与图形級別的关系都包含在形如 $\lambda^n$ 的因子中．因此有可能处理分图并进行部分求和．



(a) (b)

图 27

所有 $G^{II}$ 的相連图形又分为两类．一类图形中 $x_1$ 点通过一系列收縮和 $x_3$ 点相連，而 $x_2$ 点和 $x_4$ 点相連，但是例如 $x_1$ 和 $x_4$ 点就是彼此隔离的． 这种图形分解成两个彼此无任何綫相連的部分．



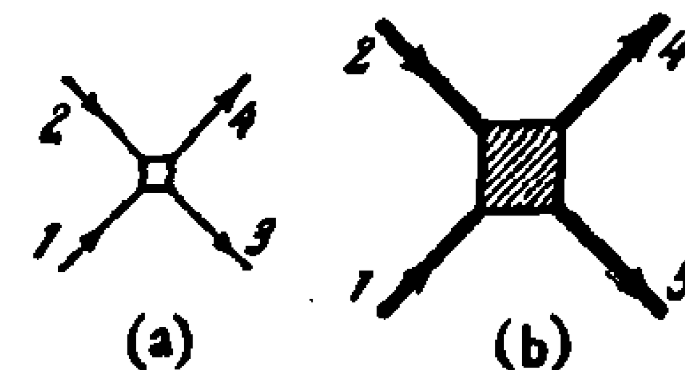
$x_1$ 和 $x_4$ 相連，$x_2$ 和 $x_3$ 相連，而 $x_1$ 和 $x_3$ 之間无任何联系的图形，也属于这一点．

最簡单的这类图形出現于 $H_{int}$ 的零級近似，它們示于图27中．其表达式为：

$$G^{(0)}_{\alpha\gamma}(x_1-x_3)G^{(0)}_{\beta\delta}(x_2-x_4), \qquad (a)$$

$$-G^{(0)}_{\alpha\delta}(x_1-x_4)G^{(0)}_{\beta\gamma}(x_2-x_3). \qquad (b)$$

不难看出，只須在 $G^{(0)}$ 綫上加入自能部分，就可以得到所有更复杂的这类图形，換言之，只要将細的 $G^{(0)}$ 綫换成粗的 $G$ 綫即可．



(a) (b)

图 28

另一类包括所有不能分解成独立部分的图形． 最簡单的这类图形出現于 $H_{int}$ 的一級近似，形如图 28(a) 所示．它对应表达式：

$$i\int G^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x_1-x_1')G^{(0)}_{\beta\gamma_2}(x_2-x_2')G^{(0)}_{\gamma_3\gamma}(x_3'-x_3)G^{(0)}_{\gamma_4\delta}(x_4'-x_4)\times$$

$$\times\Gamma^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}(x_1'x_2';\ x_3'x_4')d^4x_1'd^4x_2'd^4x_3'd^4x_4'.$$

令图 28(a) 的外 $G^{(0)}$ 綫复杂化，并把方框换成更复杂的四端結构，如图 23 之类，就得出更高級的图形． 这时上式中 $G^{(0)}$ 换成 $G$，而 $\Gamma^{(0)}$ 成为代表一切四端图总合的 $\Gamma$，也就是說，图 28(a) 变成图 28(b)．

从以上討論得出，最好将 $G^{II}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(x_1x_2;\ x_3x_4)$ 表示成：

$$G^{II}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(x_1x_2;\ x_3x_4) = G_{\alpha\gamma}(x_1-x_3)G_{\beta\delta}(x_2-x_4)$$

$$-G_{\alpha\delta}(x_1-x_4)G_{\beta\gamma}(x_2-x_3)$$

$$+i\int d^4x_1'\cdots d^4x_4'G_{\alpha\gamma_1}(x_1-x_1')G_{\beta\gamma_2}(x_2-x_2')\times$$

$$\times G_{\gamma_3\gamma}(x'-x_3)G_{\gamma_4\delta}(x_4'-x_4)\Gamma_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}(x_1'x_2';\ x_3'x_4'), \qquad (10.14)$$

这里 $\Gamma$ 就是前面引入的頂角部分．

方程(10.11)最后一項等于

$$\frac{i}{2}\int d^4x_2d^4x_3d^4x_4\Gamma^{(0)}_{\alpha\gamma_2;\gamma_3\gamma_4}(xx_2;\ x_3x_4)G^{II}_{\gamma_3\gamma_4;\gamma_2\beta}(x_3x_4,\ x_2x').$$

根据(10.14)式展开 $G^{\text{II}}_{\gamma_3\gamma_4;\gamma_2\beta}$，并注意 $\Gamma^{(0)}$ 对角标 3 和 4 的反对称性，就从方程式(10.11)得到：

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}-H_0+\mu\right)G_{\alpha\beta}(x-x')-i\int d^4x_2d^4x_3d^4x_4\times$$
$$\times\Gamma^{(0)}_{\alpha\gamma_2;\gamma_3\gamma_4}(xx_2;\,x_3x_4)G_{\gamma_3\gamma_2}(x_3-x_2)G_{\gamma_4\beta}(x_4-x')+$$
$$+\frac{1}{2}\int d^4x_2\cdots d^4x_8\Gamma^{(0)}_{\alpha\gamma_2;\gamma_3\gamma_4}(xx_2;\,x_3x_4)\times$$
$$\times G_{\gamma_4\gamma_6}(x_4-x_6)G_{\gamma_3\gamma_5}(x_3-x_5)G_{\gamma_7\gamma_2}(x_7-x_2)G_{\gamma_8\beta}(x_8-x')\times$$
$$\times\Gamma_{\gamma_5\gamma_6,\,\gamma_7\gamma_8}(x_5x_6;\,x_7x_8)=\delta(x-x')\delta_{\alpha\beta}. \tag{10.15}$$

由于空間的均匀性，$\Gamma$ 和 $G^{\text{II}}$ 只和三个坐标差有关。因此这些量的傅立叶分量最好仿照 $\Gamma^{(0)}$ 定义。例如：

$$\Gamma_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}(p_1,\,p_2;\,p_3,\,p_1+p_2-p_3)(2\pi)^4\delta(p_1+p_2-p_3-p_4)=$$
$$=\int\Gamma_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}(x_1x_2;\,x_3x_4)e^{-ip_1x_1-ip_2x_2+ip_3x_3+ip_4x_4}d^4x_1\cdots d^4x_4. \tag{10.16}$$

由(10.14)，$G^{\text{II}}$ 和 $\Gamma$ 的傅立叶分量之間的关系由方程式

$$G^{\text{II}}_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}(p_1,\,p_2;\,p_3,\,p_1+p_2-p_3)=G_{\alpha\gamma}(p_1)G_{\beta\delta}(p_2)\times$$
$$\times\delta(p_1-p_3)(2\pi)^4-G_{\alpha\delta}(p_1)G_{\beta\gamma}(p_2)\delta(p_2-p_3)(2\pi)^4+$$
$$+iG_{\alpha\gamma_1}(p_1)G_{\beta\gamma_2}(p_2)G_{\gamma_3\gamma}(p_3)G_{\gamma_4\delta}(p_1+p_2-p_3)\times$$
$$\times\Gamma_{\gamma_1\gamma_2;\,\gamma_3\gamma_4}(p_1,\,p_2;\,p_3,\,p_1+p_2-p_3) \tag{10.17}$$

决定。

对方程式(10.15)作傅立叶变换，就得到方程式(10.5)。这样就解析地导出了戴逊方程式，并得到决定其中 $\Gamma$ 的关系式(10.12)、(10.17)和(10.16)。

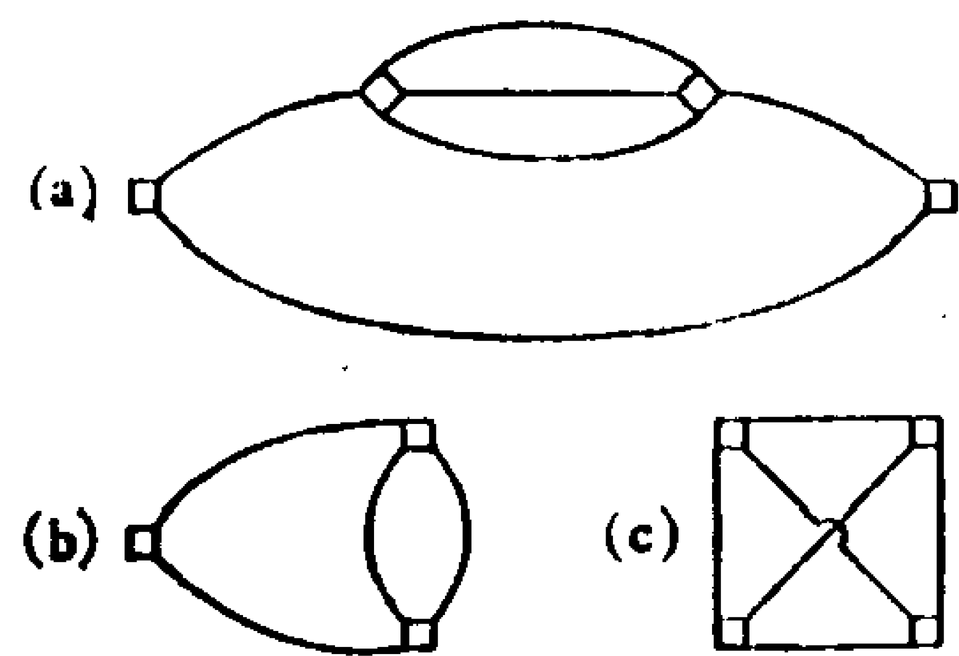


图 29

$\Gamma$ 可借图形求和計算。图形的例子見图 23，以及图 29(a)、(b)、(c)。仅仅由于 $\Gamma$ 的图形可以看成 $G$ 函数图形的某种部分，就知道构图和写表达式的对应規則仍与計算 $G$ 时一样。这一点也可以直接驗証，为此只須取 $\Gamma$ 的解析定义并完成与上节中完全相似的运算。



通常計算 $\Gamma$ 时，宜預先进行个别分图的部分求和。为此我們引入紧致图形（компактиал диаграмма）概念。我們将以此称呼不包含自能部分的图形。例如，图 23 和图 29(b)，(c) 是紧致的，而图 29(a)是非紧致的。在紧致图形内 $G^{(0)}$ 綫上加入自能部分，即将 $G^{(0)}$ 綫換成完全 $G$ 綫，可得 $\Gamma$ 的全部图形。因此为了計算 $\Gamma$，只須画出所有紧致图形，并令图中每条实綫对应完全 $G$ 函数。

B. 电子和声子相互作用。

取(9.5)式的 $H_{int}$，得到方程式(10.11)的最后一項：

$$-ig\langle T(\tilde{\psi}_\alpha(x)\tilde{\psi}^+_\beta(x')\tilde{\varphi}(x))\rangle.$$

函数

$$P_{\alpha\beta}(x_1x_2;\,x_3)=\langle T(\tilde{\psi}_\alpha(x_1)\tilde{\psi}^+_\beta(x_2)\tilde{\varphi}(x_3))\rangle \tag{10.18}$$

也可以对应于具有一个声子端和两个电子端的貲叠图集合。微扰論一級近似給出最簡图形(图 30(a))，它等于：

$$-g\delta_{\alpha\beta}\int d^4yG^{(0)}(x_1-y)G^{(0)}(y-x_2)D^{(0)}(y-x).$$

通过和前面一样的論述，我們可令 $P_{\alpha\beta}$ 与图 30(b) 对应，它等于：

$$P_{\alpha\beta}(x_1x_2;x_3)=\delta_{\alpha\beta}P(x_1x_2;x_3)=$$
$$=-\delta_{\alpha\beta}\int d^4x_1'd^4x_2'd^4x_3'G(x_1-x_1')G(x_2'-x_2)D(x_3'-x_3)\times$$
$$\times\Gamma(x_1'x_2';\,x_3'). \tag{10.19}$$

函数 $\Gamma$ 代表所有具备三条外綫（一条声子綫和两条电子綫）的图形。由此可見，$\Gamma$ 乃是电声子相互作用的頂角部分。由于空間的均匀性，$\Gamma$ 和 $P$ 只与两个坐标差有关。因此 $\Gamma$ 可如下地变成傅立叶积分：

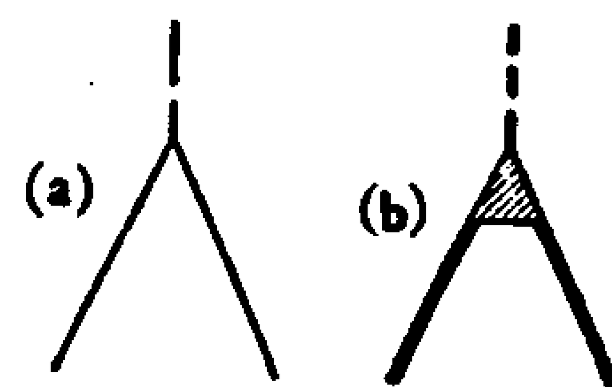


图 30

$$\Gamma(p,\,p-k;\,k)(2\pi)^4\delta(p-p'-k)=$$
$$=\int d^4x_1d^4x_2d^4x_3\Gamma(x_1x_2;\,x_3)e^{-ipx_1+ip'x_2+ikx_3}. \tag{10.20}$$

$\Gamma$ 和 $P$ 的傅立叶分量的关系是：

$$P(p, p-k; k) = -G(p)G(p-k)D(k)\Gamma(p, p-k; k). \tag{10.21}$$

将电声子相互作用的方程式(10.11)最末項通过(10.18)和(10.19)表示，就得到坐标空間中 $G$ 的方程式。借助(10.20)式完成傅立叶变換，我們就求得戴逊方程式(10.7)。

所有关于計算双粒子相互作用頂角部分的論述，这时也都成立。为了計算 $\Gamma$，須画出所有的紧致图形，并按照与計算 $G$ 一样的規則写出解析式。每条实綫代表完全 $G$ 函数，每条虛綫代表完全 $D$ 函数。一些例子示于图 31 中。

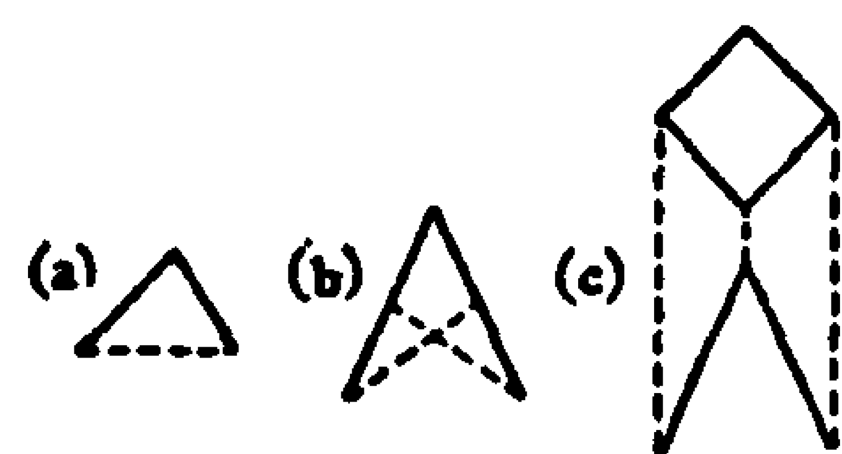


图 31

我們再探討一下推导戴逊方程式时引入的函数 $G^{II}$ 和 $P$ 的意义。这些函数，以及其它更多場算符編时乘积的平均值，通称为多粒子格林函数。而函数 $G$ 与 $D$ 就称为单粒子格林函数。多粒子格林函数和单粒子格林函数一样，决定系統的宏观性質。例如，双粒子格林函数 $G^{II}$ 决定电子系統在外电磁場中的行为(第六章)。由于它們是多变量函数，其解析性质的分析頗为困难。当某些变量相等时，情形較簡单。如在函数 $G^{II}$ 中令 $x_1 = x_3$, $x_2 = x_4$，则它对变量 $x_1 - x_2$ 的傅立叶分量的解析性质，同于声子格林函数 $D(\omega, \boldsymbol{k})$。由于通常有意义的正是这些特例，故比較簡单的作法是不研究一般情况，只决定具体格林函数的解析性质。

多粒子格林函数傅立叶分量的极点，和 $G(p)$ 与 $D(k)$ 的极点一样，决定系統的激发能譜，而且其中必然包括了 $G(p)$ 和 $D(k)$ 的所有极点。然而除此之外，还会出現新的，对应于激发能譜其它支的极点。我們对此問題不作一般分析。第四章 §19 将討論一个具体例子；那里得出了費米粒子双粒子格林函数极点的方程，并証明这些极点給出激发能譜的玻色支。

为了計算多粒子格林函数，原則上可以写出与戴逊方程类似的方程，它把这些函数和更高阶的函数联系起来。然而实际上这种手續給不出有益的結果，还是直接求和图形比較簡便。这时常常会发現，一定的图形序列最为重要。通常这种情况下图形求和并不很困难。

这里再強調一次，函数 $G^{II}$ 与 $P$ 和頂角部分之間存在着簡单联系。

**3. 基态能量.** 本节末尾再推导几个公式，它們有助于計算粒子相互作用对基态能量的修正項。

从方程式(10.11)中減去相应的函数 $G^{(0)}$ 的方程式。这就得到：

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\Delta}{2m} + \mu\right)[G_{\alpha\beta}(x-x') - G^{(0)}_{\alpha\beta}(x-x')] =$$
$$= -i\langle T([\tilde{\psi}_\alpha(x), H_{int}], \tilde{\psi}^+_\beta(x'))\rangle.$$

令 $\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r}'$, $t' \to t+0$。然后将两端对 $\boldsymbol{r}$ 积分。这时求得：

$$\nu\langle H_{int}\rangle = -i\int d\boldsymbol{r} \lim_{\substack{\boldsymbol{r}'\to\boldsymbol{r}\\ t'\to t+0}}\left(i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\Delta}{2m} + \mu\right)\times$$
$$\times [G_{\alpha\alpha}(x-x') - G^{(0)}_{\alpha\alpha}(x-x')],$$

其中 $\nu$ 是 $H_{int}$ 中算符 $\psi^+$ 的数目。假定相互作用哈密頓量正比于某个常数 $g$(这样的常数总可以引入)。基态能量(更确切些，热力学势 $\Omega = E - \mu N$)作为 $\mu$ 的函数就等于 $\Omega = \langle \hat{H} - \mu\hat{N}\rangle$。由熟知的統計公式(見兰道和 Лифшиц 的书[1])得：

$$\frac{\partial\Omega}{\partial g} = \left\langle\frac{\partial}{\partial g}(\hat{H} - \mu\hat{N})\right\rangle = \frac{1}{g}\langle H_{int}\rangle.$$

对 $dg$ 从 0 到 $g$ 积分此式，得：

$$\Omega - \Omega_0 = \int_0^g \frac{dg_1}{g_1}\langle H_{int}\rangle, \tag{10.22}$$

其中 $\Omega_0$ 是无相互作用粒子的热力学势。将前面求得的 $\langle H_{int}\rangle$ 通过格林函数的表达式代入，就有：

$$\Omega - \Omega_0 = -\frac{i}{\nu}\int_0^g \frac{dg_1}{g_1}\int d\boldsymbol{r} \lim_{\substack{\boldsymbol{r}'\to\boldsymbol{r}\\ t'\to t+0}}\left(i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\Delta}{2m} + \mu\right)\times$$
$$\times [G_{\alpha\alpha}(x-x') - G^{(0)}_{\alpha\alpha}(x-x')].$$

令 $G_{\alpha\beta}(x-x')=\delta_{\alpha\beta}G(x-x')$ 并轉到动量表象，再利用 $G^{(0)}$ 的方程，最終求得：

$$\Omega-\Omega_0=-\frac{2i}{v}V\int_0^g\frac{dg_1}{g_1}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\times \times G^{(0)-1}(p)[G(p)-G^{(0)}(p)]e^{i\omega t}, \tag{10.23}$$

其中 $t\to+0$，$V$ 为系統的体积.

从以下关系(見[1])

$$\left(\frac{\partial\Omega}{\partial m}\right)_{T,V,\mu}=\left\langle\frac{\partial\hat{H}}{\partial m}\right\rangle,$$

还可以得到一个有益公式．由于

$$\frac{\partial\hat{H}}{\partial m}=\frac{1}{2m^2}\int\psi_\alpha^+(\boldsymbol{r})\Delta\psi_\alpha(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r},$$

則

$$\frac{\partial\Omega}{\partial m}=-\frac{i}{2m^2}\int\left[\Delta_x\underset{\substack{\vec{r}'\to\vec{r}\\ t'\to t+0}}{G_{\alpha\alpha}}(x-x')\right]d\boldsymbol{r}.$$

变换到傅立叶分量，得到：

$$\frac{\partial\Omega}{\partial m}=\frac{iV}{m^2}\int p^2G(p)e^{i\omega t}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}, \tag{10.24}$$

其中 $t\to+0$.

最后，还应再提到 §7 中求得的公式：

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}=-N=iV\int G(p)e^{i\omega t}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}. \tag{10.25}$$



# 第三章　$T>0$ 时的图解法[1]

## §11. 温度格林函数

**1. 一般性質．** 迄今我們研究了多粒子系統在絕对温度零度时的性質．温度高于零度时間題就复杂多了．

統計物理的普通"經典"方法，是直接計算系統的热力学量(作为温度和密度的函数)．然而由于任何这类問題都不能准确解决，答案常表示成某个小参数的冪級数．应用普通热力学微扰論(参閱兰道和 Лифшиц 的书[1])，容易写出自由能 $F$ 微扰展开的前两項：

$$F=F_0+\sum_n V_{nn}e^{\frac{F_0-E_n^{(0)}}{T}}+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{n,m}\frac{|V_{nm}|^2}{E_n^{(0)}-E_m^{(0)}}\left[e^{\frac{F_0-E_n^{(0)}}{T}}-e^{\frac{F_0-E_m^{(0)}}{T}}\right]+$$
$$+\frac{1}{2T}\left(\sum_n V_{nn}e^{\frac{F_0-E_n^{(0)}}{T}}\right)^2+\cdots$$

可是要写出以后諸項，就已是頗不容易的事，更談不上直接計算了．而級数的某个无穷項序列的求和就更无希望．量子場論图解方法运用格林函数，可以直观地表示出任何一級近似的結构与特性，因此在温度大于零的統計問題中就特别引人注意．

前一章所述的图解法不能直接推广到温度大于零的情形．对特殊的量——温度格林函数，可以建立温度大于零的图解法．温

1) 本章中的討論和推导在相当程度上与第二章重复．由于这两章对今后很重要，我們以为保留这种平行叙述是适宜的．熟悉量子場論方法、而仅对温度图解法感兴趣的讀者，可以直接从第三章开始閱讀本书．

度格林函数与前面討論过的和时間 $t$ 有关的格林函数不同，依賴于虛"时間" $-i\tau$，它在从 $-\frac{i}{T}$ 到零的区間內变化(松原武生[30])．

和 $T=0$ 时的方法一样，松原方法中不是計算热力学量本身，而是計算前面提及的温度格林函数 $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r},\tau)$．它的微扰論級数的任何一項由相应的費曼图描述，并按費曼規則計算：图中每条綫代表自由粒子温度格林函数 $\mathfrak{G}^{(0)}(\boldsymbol{r},\tau)$，每个頂点代表相互作用算符等等．唯一和 $T=0$ 情况的不同在于，在每个頂点不是对时間 $t$ 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 积分，而是对 $\tau$ 从 0 积分到 $1/T$．

$T\neq 0$ 的图解法中的温度格林函数 $\mathfrak{G}$ 定义为：

$$\mathfrak{G}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_1,\tau_1;\boldsymbol{r}_2,\tau_2)=$$
$$=\begin{cases}-\mathrm{Sp}\left[e^{\frac{\Omega+\mu\hat{N}-\hat{H}}{T}}e^{(\hat{H}-\mu\hat{N})(\tau_1-\tau_2)}\psi_\alpha(\boldsymbol{r}_1)e^{-(\hat{H}-\mu\hat{N})(\tau_1-\tau_2)}\psi_\beta^+(\boldsymbol{r}_2)\right], & \tau_1>\tau_2;\\ \pm\mathrm{Sp}\left[e^{\frac{\Omega+\mu\hat{N}-\hat{H}}{T}}e^{-(\hat{H}-\mu\hat{N})(\tau_1-\tau_2)}\psi_\beta^+(\boldsymbol{r}_2)e^{(\hat{H}-\mu\hat{N})(\tau_1-\tau_2)}\psi_\alpha(\boldsymbol{r}_1)\right], & \tau_1<\tau_2.\end{cases}\tag{11.1}$$

这里 $\psi_\alpha(\boldsymbol{r})$ 和 $\psi_\alpha^+(\boldsymbol{r})$ 是系統的薛定格算符，而«+»号和«−»号分别对应費米和玻色粒子．运算 Sp 表示取矩陣对角元之和．这时既对系統中的粒子数求和，又对給定粒子数时系統一切可能的狀态求和．因此，$\mathfrak{G}$ 根据定义乃是温度 $T$ 和化学势 $\mu$ 的函数．(11.1)式中指数上的 $\Omega$ 是变量为 $T,V,\mu$ 的热力学势 $(d\Omega=-SdT-PdV-Nd\mu)$．提醒一下，运算 $\mathrm{Sp}\{e^{(\Omega+\mu\hat{N}-\hat{H})/T}\cdots\}$ 正是普通的吉布斯統計平均；以后我們将記之为 $\langle\cdots\rangle$．

声子温度格林函数 $\mathfrak{D}$ 由类似的关系式定义：

$$\mathfrak{D}(\boldsymbol{r}_1,\tau_1;\boldsymbol{r}_2,\tau_2)=$$
$$=\begin{cases}-\mathrm{Sp}\left[e^{\frac{\Omega-\hat{H}}{T}}e^{\hat{H}(\tau_1-\tau_2)}\varphi(\boldsymbol{r}_1)e^{-\hat{H}(\tau_1-\tau_2)}\varphi(\boldsymbol{r}_2)\right], & \tau_1>\tau_2,\\ -\mathrm{Sp}\left[e^{\frac{\Omega-\hat{H}}{T}}e^{-\hat{H}(\tau_1-\tau_2)}\varphi(\boldsymbol{r}_2)e^{\hat{H}(\tau_1-\tau_2)}\varphi(\boldsymbol{r}_1)\right], & \tau_1<\tau_2,\end{cases}\tag{11.2}$$

其中 $\varphi(\boldsymbol{r})$——声子場的薛定格算符．

从定义(11.1)、(11.2)立即看出，温度格林函数只和"时間"的



差 $\tau_1-\tau_2$ 有关．如果系統同时又是孤立和均匀的，則它們自然仅依賴于空間坐标之差：$\mathfrak{G}=\mathfrak{G}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2,\tau_1-\tau_2)$．$\mathfrak{G}(\tau)$ 是变量 $\tau$ 的不連續函数，它在 $\tau=0$ 处有一跃变．跃变值可以直接从 $\mathfrak{G}$ 的定义算出．对費米粒子

$$\mathfrak{G}(\tau)-\mathfrak{G}(-\tau)|_{\tau\to+0}=$$
$$=-\mathrm{Sp}\left\{e^{\frac{\Omega+\mu\hat{N}-\hat{H}}{T}}[\psi_\alpha(\boldsymbol{r}_1)\psi_\beta^+(\boldsymbol{r}_2)+\psi_\beta^+(\boldsymbol{r}_2)\psi_\alpha(\boldsymbol{r}_1)]\right\}$$

而根据 $\psi$ 和 $\psi^+$ 的对易关系有：

$$\Delta\mathfrak{G}=-\delta_{\alpha\beta}\delta(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2).$$

玻色粒子 $\mathfrak{G}$ 函数的跃变值和費米情况相同．

可以将(11.1)和(11.2)表示成类似温度零度时格林函数定义的形式．为此按以下公式引入与"时間" $\tau$ 有关的粒子的"海森堡"算符[1)]：

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_\alpha(\boldsymbol{r},\tau)&=e^{\tau(\hat{H}-\mu\hat{N})}\psi_\alpha(\boldsymbol{r})e^{-\tau(\hat{H}-\mu\hat{N})},\\ \bar{\tilde{\psi}}_\alpha(\boldsymbol{r},\tau)&=e^{\tau(\hat{H}-\mu\hat{N})}\psi_\alpha^+(\boldsymbol{r})e^{-\tau(\hat{H}-\mu\hat{N})},\\ \tilde{\varphi}(\boldsymbol{r},\tau)&=e^{\tau\hat{H}}\varphi(\boldsymbol{r})e^{-\tau\hat{H}}.\end{aligned}\tag{11.3}$$

借助这些算符可将(11.1)型的繁复表达式写成(比較(7.1)和(7.14))：

$$\mathfrak{G}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_1,\tau_1;\boldsymbol{r}_2,\tau_2)=-\mathrm{Sp}\left\{e^{\frac{\Omega+\mu\hat{N}-\hat{H}}{T}}T_\tau(\tilde{\psi}_\alpha(\boldsymbol{r}_1,\tau_1)\bar{\tilde{\psi}}_\beta(\boldsymbol{r}_2,\tau_2))\right\}\equiv$$
$$\equiv-\langle T_\tau(\tilde{\psi}_\alpha(\boldsymbol{r}_1,\tau_1)\bar{\tilde{\psi}}_\beta(\boldsymbol{r}_2,\tau_2))\rangle.\tag{11.4}$$

(11.4)中的符号 $T_\tau$ 表示前一章中已見过的 $T$-編时运算．$T_\tau$ 乘积中的算符自左至右按"时間" $\tau$ 的遞減序排列(我們为 $T$ 乘积符号加上足标 $\tau$，以区別于温度 $T$)．对于費米粒子

$$T_\tau(\psi_1\psi_2\cdots)=\delta_P\psi_{i_1}\psi_{i_2}\cdots,$$

其右端算符 $\psi$ 按时序排列，而 $\delta_P$ 等于−1或+1，視置換

$$1,2,\cdots\to i_1,i_2,\cdots$$

的奇偶而定．具体有：

$$T_\tau(\tilde{\psi}(1)\bar{\tilde{\psi}}(2))=\tilde{\psi}(1)\bar{\tilde{\psi}}(2),\quad \tau_1>\tau_2,$$

1) 立刻要指出，$\psi$ 和 $\bar{\tilde{\psi}}$ 已不再彼此厄米共軛．

$$T_\tau(\tilde{\psi}(1)\bar{\tilde{\psi}}(2)) = -\bar{\tilde{\psi}}(2)\tilde{\psi}(1), \quad \tau_1 < \tau_2.$$

松原方法中的多粒子格林函数也以类似关系式定义. 例如双粒子温度格林函数是:

$$\mathfrak{G}^{11}_{\alpha\beta;\gamma\delta}(1, 2; 3, 4) = -\langle T_\tau(\tilde{\psi}_\alpha(1)\tilde{\psi}_\beta(2)\bar{\tilde{\psi}}_\gamma(3)\bar{\tilde{\psi}}_\delta(4))\rangle. \quad (11.5)$$

如何推广到变量数目更多的格林函数,不叙自明.

原则上函数 $\mathfrak{G}$ 决定系統的全部热力学性质. 例如,自 $\mathfrak{G}$ 的定义以及 $N = \int \psi^+_\alpha(\boldsymbol{r})\psi_\alpha(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}$, 可直接得公式

$$N = \pm \int \mathfrak{G}_{\alpha\alpha}(\boldsymbol{r}, \tau; \boldsymbol{r}, \tau + 0)d\boldsymbol{r}, \quad (11.6)$$

利用此式可以計算粒子数作为化学势 $\mu$ 的函数, 而从(11.6)式解出 $\mu$, 可求得化学势作为温度和密度 $n = N/V$ 的函数. 然后对熟知的热力学关系 $\frac{\partial f}{\partial n} = \mu(n, T)$ 积分,就能求得单位体积的自由能 $f(n, T)$.

如果系統內只存在着由哈密頓量

$$\hat{H} = -\frac{1}{2m}\int \psi^+_\alpha(\boldsymbol{r})\Delta\psi_\alpha(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r} +$$

$$+ \frac{1}{2}\iint d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}_2 \psi^+_\alpha(\boldsymbol{r}_1)\psi^+_\beta(\boldsymbol{r}_2)U(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)\psi_\beta(\boldsymbol{r}_2)\psi_\alpha(\boldsymbol{r}_1),$$

描述的粒子間成对相互作用, 則其能量可通过双粒子温度格林函数表达:

$$E(\mu, T) = \langle \hat{H} \rangle = \mp \frac{1}{2m}\int \Delta\boldsymbol{r}_1 \mathfrak{G}_{\alpha\alpha}(1, 2)\Big|_{\substack{\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_2 \\ \tau_2=\tau_1+0}} d\boldsymbol{r}_1 -$$

$$- \frac{1}{2}\iint U(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)\mathfrak{G}^{11}_{\alpha\beta;\beta\alpha}(1, 2; 3, 4)\Big|_{\substack{\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_4=\boldsymbol{r}_1 \\ \tau_3=\tau_4+0, \tau_4=\tau_1+0 \\ \tau_1=\tau_2+0}} d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}_2.$$

以后还要导出若干联系温度格林函数和热力学量的公式.

能够借助温度格林函数解决的問題不限于热力学問題. 格林函数还决定系統的各种关联性质,它們表現于凝聚物体和中子、伦琴射綫等的相互作用中. 例如,双粒子格林函数和密度关联函数之間有明显的关系:

$$F(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \overline{n(\boldsymbol{r}_1)n(\boldsymbol{r}_2)} = \langle \psi^+_\alpha(\boldsymbol{r}_1)\psi_\alpha(\boldsymbol{r}_1)\psi^+_\beta(\boldsymbol{r}_2)\psi_\beta(\boldsymbol{r}_2)\rangle,$$

它决定伦琴射綫和中子的弹性散射. 此外我們以后还要建立温度格林函数和相应的时間格林函数的关系, 进而可能研究各种非平衡現象.

現在指出温度格林函数 $\mathfrak{G}$ 的一个重要性质. 前面已提及,温度格林函数依賴于"时間"之差 $\tau_1 - \tau_2 = \tau$, 并因而給定在区間 $-\frac{1}{T}$ 到 $\frac{1}{T}$ 上. 在 $\mathfrak{G}(\tau < 0)$的(11.1)式求陣迹符号下作算符的循环置換[1]:

$$\mathfrak{G}(\tau < 0) = \pm \mathrm{Sp}\left\{e^{\frac{\Omega}{T}}e^{(\hat{H}-\mu\hat{N})\tau}\psi(\boldsymbol{r}_1)e^{-(\hat{H}-\mu\hat{N})(\tau+\frac{1}{T})}\psi^+(\boldsymbol{r}_2)\right\} =$$

$$= \pm \mathrm{Sp}\left\{e^{\frac{\Omega+\mu\hat{N}-H}{T}}e^{(\hat{H}-\mu\hat{N})(\tau+\frac{1}{T})}\psi(\boldsymbol{r}_1)e^{-(\hat{H}-\mu\hat{N})(\tau+\frac{1}{T})}\psi^+(\boldsymbol{r}_2)\right\}. \quad (11.7)$$

将(11.7)式和 $\mathfrak{G}$ 在 $\tau > 0$ 时的式子比較, 并注意 $0 < \tau + \frac{1}{T} < \frac{1}{T}$ $(\tau < 0)$,就得到:

$$\mathfrak{G}(\tau < 0) = \mp \mathfrak{G}\left(\tau + \frac{1}{T}\right), \quad (11.8)$$

这是 $\mathfrak{G}$ 在負"时間"和 $\tau > 0$ 的值之間的关系. 自然:

$$\mathfrak{D}(\tau < 0) = \mathfrak{D}\left(\tau + \frac{1}{T}\right). \quad (11.8a)$$

声子 $\mathfrak{D}$ 函数显然是实函数(算符 $\varphi(\boldsymbol{r})$ 是实数!), 由此得出另一有用的关系式. 形式地計算 $\mathfrak{D}^*(\tau < 0)$:

$$\mathfrak{D}(\tau < 0) = \mathfrak{D}^*(\tau < 0) = -\mathrm{Sp}\{e^{\Omega/T}\varphi(\boldsymbol{r}_1)e^{\hat{H}\tau}\varphi(\boldsymbol{r}_2)e^{-\hat{H}\tau}e^{-\hat{H}/T}\}$$

将所得式子和 $\mathfrak{D}(\tau > 0)$ 比較,我們看出声子的温度格林函数是 $\tau$

---

[1]) 直接根据若干算符乘积的陣迹的定义可以看出这种置換的可能性:

$$\mathrm{Sp}(ABC\cdots DF) = \sum_{i,k,\cdots} A_{ik}B_{kl}C_{lm}\cdots D_{np}F_{pi} =$$

$$= \sum_{i,k,\cdots} B_{kl}C_{lm}\cdots D_{np}F_{pi}A_{ik} = \mathrm{Sp}(BC\cdots DFA).$$

的偶函数：

$$\mathfrak{D}(\tau)=\mathfrak{D}(-\tau). \tag{11.9}$$

这个結論对任何实数場的格林函数都是正确的。

**2. 自由粒子溫度格林函数.** 在基于图解法的微扰論中，自由粒子格林函数起着重要作用。沒有相互作用存在时，(11.1)式中对每个粒子的状态独立地进行統計平均。系統的能級 $E_n$（以及热力学势 $\Omega$）表示成个别粒子能量之和，它們处于具有一定动量 $\boldsymbol{p}$ 和自旋投影 $\alpha$ 的状态中：

$$E_n^{(0)}=\sum_{p,\alpha}n_{p\alpha}\varepsilon_0(\boldsymbol{p}),\ \Omega_0=\sum_{p,\alpha}\Omega_{p\alpha}^{(0)}.$$

由于泡利原理、費米統計情形下状态填充数只能是 0 或 1.

利用定义(11.1)計算自由粒子格林函数最为方便。将薛定格算符 $\psi$ 的傅立叶展开式

$$\psi_\alpha(\boldsymbol{r}_1)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{p_1}a_{p_1\alpha}e^{ip_1r_1},\psi_\beta^+(\boldsymbol{r}_2)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{p_2}a_{p_2\beta}^+e^{-ip_2r_2}.$$

代入，就有：

$$\mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(0)}(\tau>0)=-\frac{1}{V}\sum_{p_1p_2}e^{i(p_1r_1-p_2r_2)}\times$$

$$\times\,\mathrm{Sp}\left\{e^{\frac{\Omega_0+\mu\hat{N}-\hat{H}_0}{T}}e^{\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}a_{p_1\alpha}e^{-\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}a_{p_2\beta}^+\right\}.$$

再注意到动量表象中哈密頓量 $\hat{H}$ 为

$$\hat{H}_0=\sum_{p\alpha}\hat{n}_{p\alpha}\varepsilon_0(\boldsymbol{p}),\ \hat{N}=\sum_{p\alpha}\hat{n}_{p\alpha},$$

容易証明以下恆等式：

$$\begin{aligned}e^{\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}a_{p\alpha}e^{-\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}&=a_{p\alpha}e^{-\tau(\varepsilon_0(p)-\mu)},\\e^{\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}a_{p\alpha}^+e^{-\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}&=a_{p\alpha}^+e^{\tau(\varepsilon_0(p)-\mu)},\end{aligned}\tag{11.10}$$

为此只须計算出左右端唯一不为零的矩陣元。因此，

$$\mathfrak{G}^{(0)}(\tau>0)=-\frac{1}{V}\sum_{p_1p_2}e^{i(p_1r_1-p_2r_2)-\tau(\varepsilon_0(p_1)-\mu)}\times$$

$$\times\,\mathrm{Sp}\left\{e^{\frac{\Omega_0+\mu\hat{N}-\hat{H}_0}{T}}a_{p_1\alpha}a_{p_2\beta}^+\right\}.$$

只有 $\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{p}_2,\ \alpha=\beta$ 时，乘积 $a_{p_1\alpha}a_{p_2\beta}^+$ 才具有不为零的对角矩陣元，故有：

$$\mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(0)}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2,\tau>0)=-\delta_{\alpha\beta}\frac{1}{V}\sum_p e^{ip(r_1-r_2)-\tau(\varepsilon_0(p)-\mu)}\langle a_{p\alpha}a_{p\alpha}^+\rangle.$$

数值 $\langle a_{p\alpha}a_{p\alpha}^+\rangle$ 通过与温度和化学势有关的平衡填充数 $n(\boldsymbol{p})$ 表示。对遵从費米統計的粒子：

$$\langle a_{p\alpha}a_{p\alpha}^+\rangle=1-n(\boldsymbol{p}),\ \ n(\boldsymbol{p})=\left[e^{\frac{\varepsilon_0(p)-\mu}{T}}+1\right]^{-1};\tag{11.11}$$

而对玻色粒子：

$$\langle a_{p\alpha}a_{p\alpha}^+\rangle=1+n(\boldsymbol{p}),\ \ n(\boldsymbol{p})=\left[e^{\frac{\varepsilon_0(p)-\mu}{T}}-1\right]^{-1}.\tag{11.12}$$

現在令体积 $V$ 趋向无穷大，按一般方式把对动量求和变成积分。最終得：

$$\mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(0)}(\boldsymbol{r},\tau>0)=-\delta_{\alpha\beta}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\boldsymbol{p}\,e^{ipr-\tau(\varepsilon_0(p)-\mu)}(1\mp n(\boldsymbol{p})),\tag{11.13a}$$

上面的符号对应費米粒子，下面的符号对应玻色粒子。$\tau<0$ 时的 $\mathfrak{G}^{(0)}$ 最好借助关系式(11.8)計算：

$$\mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(0)}(\boldsymbol{r},\tau<0)=\mp\mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(0)}\left(\boldsymbol{r},\tau+\frac{1}{T}\right)=$$

$$=\pm\delta_{\alpha\beta}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\boldsymbol{p}\,e^{ipr-\tau(\varepsilon_0(p)-\mu)}n(\boldsymbol{p}).\tag{11.13b}$$

自由声子格林函数也可类似地計算。将算符 $\varphi(\boldsymbol{r})$ 的傅立叶展开式

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k\sqrt{\frac{\omega_0(\boldsymbol{k})}{2}}(b_k e^{ikr}+b_k^+e^{-ikr}),$$

（其中 $\omega_0(\boldsymbol{k})$ 是声子能量）代入(11.2)式，計算給出：

$$\mathfrak{D}^{(0)}(\boldsymbol{r},\tau)=-\frac{1}{2(2\pi)^3}\int d\boldsymbol{k}\,\omega_0(\boldsymbol{k})\{(N(\boldsymbol{k})+1)e^{ikr-\omega_0(k)|\tau|}+$$

$$+N(\boldsymbol{k})e^{ikr+\omega_0(k)|\tau|}\},\tag{11.14}$$

$$N(\boldsymbol{k})=\left[e^{\frac{\omega_0(k)}{T}}-1\right]^{-1}.$$

和(11.9)式一致，$\mathfrak{D}^{(0)}$ 是 $\tau$ 的偶函数。

## §12. 微扰論

**1. 相互作用表象.** 如果組成系統的粒子并不是自由的，則在温度格林函数的(11.1)式中可变换到独特的相互作用表象，它很象量子場論的相互作用表象(松原[30])。引入和場論 $S$ 矩陣相似的矩陣 $\mathfrak{S}(\tau)\left(0<\tau<\frac{1}{T}\right)$，它由以下关系式定义：

$$e^{-\tau(\hat{H}-\mu\hat{N})}=e^{-\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}\mathfrak{S}(\tau),$$
$$e^{\tau(\hat{H}-\mu\hat{N})}=\mathfrak{S}^{-1}(\tau)e^{\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}. \tag{12.1}$$

再引入相互作用表象中的粒子場算符：

$$\psi(\boldsymbol{r},\tau)=e^{\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}\psi(\boldsymbol{r})e^{-\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})},$$
$$\bar{\psi}(\boldsymbol{r},\tau)=e^{\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}\psi^+(\boldsymbol{r})e^{-\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}, \tag{12.2}$$

当 $\hat{H}=\hat{H}_0$ 时它們和 §11 中提到的海森堡算符重合。

相互作用表象中其它算符的定义也类似(12.2)式。例如：

$$\hat{H}(\tau)=e^{\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}\hat{H}e^{-\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})},$$
$$\hat{H}_{int}(\tau)=e^{\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}\hat{H}_{int}e^{-\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}.$$

从这个定义看出，如果在算符 $\hat{H},\hat{H}_{int}$ 中把 $\psi(\boldsymbol{r}),\psi^+(\boldsymbol{r})$ 相应地换成 $\psi(\boldsymbol{r},\tau)$、$\bar{\psi}(\boldsymbol{r},\tau)$，就得到 $\hat{H}(\tau)$、$\hat{H}_{int}(\tau)$。

此外要注意，$\hat{H}_0(\tau)$，$\hat{N}(\tau)$ 事实上和 $\tau$ 沒有关系（自由粒子哈密頓量和算符 $\hat{N}$ 对易）：

$$\hat{H}_0(\tau)=e^{\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}\hat{H}_0e^{-\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}=\hat{H}_0,$$
$$\hat{N}(\tau)=e^{\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}\hat{N}e^{-\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}=\hat{N}.$$

矩陣 $\mathfrak{S}(\tau)$ 满足簡单的方程式，它可自 $S$ 矩陣的方程式(6.17)作代换 $t\to -i\tau$ 得到。然而我們重新导出这个方程式，为此将(12.1)第一式对 $\tau$ 微分：

$$-(\hat{H}-\mu\hat{N})e^{-\tau(\hat{H}-\mu\hat{N})}=$$
$$=e^{-\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}\frac{\partial\mathfrak{S}(\tau)}{\partial\tau}-(\hat{H}_0-\mu\hat{N})e^{-\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}\mathfrak{S}(\tau).$$

在两端乘 $e^{\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}$，有

$$\frac{\partial\mathfrak{S}(\tau)}{\partial\tau}=-\hat{H}_{int}(\tau)\mathfrak{S}(\tau). \tag{12.3}$$



从 $\mathfrak{S}$ 的定义得条件 $\mathfrak{S}(0)=1$，方程式(12.3)满足此条件的解为：

$$\mathfrak{S}(\tau)=T_\tau\exp\left\{-\int_0^\tau\hat{H}_{int}(\tau')d\tau'\right\}. \tag{12.4}$$

(12.4)式中符号 $T_\tau$ 的意义前面已說明，它要求所有算符自左向右按 $\tau$ 的递减序排列。直接微分(12.4)式并注意 $T_\tau$ 运算，容易驗証此式的正确性。

除 $\mathfrak{S}(\tau)$ 外还討論矩陣 $\mathfrak{S}(\tau_1,\tau_2)(\tau_1>\tau_2)$：

$$\mathfrak{S}(\tau_1,\tau_2)=T_\tau\exp\left\{-\int_{\tau_2}^{\tau_1}\hat{H}_{int}(\tau')d\tau'\right\},$$
$$\mathfrak{S}(\tau)=\mathfrak{S}(\tau,0).$$

$\mathfrak{S}(\tau_1,\tau_2)$ 具有若干显而易見的性质：

$$\mathfrak{S}(\tau_1,\tau_3)=\mathfrak{S}(\tau_1,\tau_2)\mathfrak{S}(\tau_2,\tau_3)\quad(\tau_1>\tau_2>\tau_3),$$
$$\mathfrak{S}(\tau_1,\tau_2)=\mathfrak{S}(\tau_1)\mathfrak{S}^{-1}(\tau_2)\qquad(\tau_1>\tau_2). \tag{12.5}$$

現在把(11.1)式的格林函数变换到相互作用表象；将所有包含 $\hat{H}$ 的指数通过 $\hat{H}_0$ 和 $\mathfrak{S}$ 表示，就有：

$$\mathfrak{G}(\tau>0)=-e^{\frac{\Omega}{T}}\mathrm{Sp}\Big\{e^{-\frac{\hat{H}_0-\mu\hat{N}}{T}}\mathfrak{S}\left(\frac{1}{T}\right)\mathfrak{S}^{-1}(\tau_1)e^{(\hat{H}_0-\mu\hat{N})\tau_1}\psi(\boldsymbol{r}_1)\times$$
$$\times e^{-(\hat{H}_0-\mu\hat{N})\tau_1}\mathfrak{S}(\tau_1)\mathfrak{S}^{-1}(\tau_2)e^{(\hat{H}_0-\mu\hat{N})\tau_2}\psi^+(\boldsymbol{r}_2)e^{-(\hat{H}_0-\mu\hat{N})\tau_2}\mathfrak{S}(\tau_2)\Big\},$$

或者，考虑到(12.1)式和(12.5)式有：

$$\mathfrak{G}(\tau>0)=-e^{\frac{\Omega}{T}}\mathrm{Sp}\Big\{e^{-\frac{\hat{H}_0-\mu\hat{N}}{T}}\mathfrak{S}\left(\frac{1}{T},\tau_1\right)\times$$
$$\times\psi(\boldsymbol{r}_1,\tau_1)\mathfrak{S}(\tau_1,\tau_2)\bar{\psi}(\boldsymbol{r}_2,\tau_2)\mathfrak{S}(\tau_2)\Big\}. \tag{12.6a}$$

$\tau<0$ 时 $\mathfrak{G}$ 也类似地写成：

$$\mathfrak{G}(\tau<0)=\pm e^{\frac{\Omega}{T}}\mathrm{Sp}\Big\{e^{-\frac{\hat{H}_0-\mu\hat{N}}{T}}\mathfrak{S}\left(\frac{1}{T},\tau_2\right)\times$$
$$\times\bar{\psi}(\boldsymbol{r}_2,\tau_2)\mathfrak{S}(\tau_2,\tau_1)\psi(\boldsymbol{r}_1,\tau_1)\mathfrak{S}(\tau_1)\Big\}. \tag{12.6b}$$

(12.6a)和(12.6b)式可以合而为一：

$$\mathfrak{G}(\tau)=-e^{\frac{\Omega}{T}}\mathrm{Sp}\left\{e^{-\frac{\hat{H}_0-\mu\hat{N}}{T}}T_\tau\left(\psi(\boldsymbol{r}_1,\tau_1)\bar{\psi}(\boldsymbol{r}_2,\tau_2)\mathfrak{S}\left(\frac{1}{T}\right)\right)\right\}, \tag{12.6c}$$

它直接得自 $T_\tau$ 編序运算的定义和(12.5)式.

現在还剩下 $e^{\Omega/T}$ 要加以变换. 为此注意由定义

$$e^{-\frac{\Omega}{T}}=\mathrm{Sp}\left\{e^{-\frac{\hat{H}-\mu\hat{N}}{T}}\right\},$$

得

$$e^{-\frac{\Omega}{T}}=\mathrm{Sp}\left\{e^{-\frac{\hat{H}_0-\mu\hat{N}}{T}}\mathfrak{S}\left(\frac{1}{T}\right)\right\}.$$

相互作用表象中 $\mathfrak{G}$ 的最終表达式为:

$$\mathfrak{G}(\boldsymbol{r}_1,\tau_1;\boldsymbol{r}_2,\tau_2)=-\frac{\mathrm{Sp}\left\{e^{-\frac{\hat{H}_0-\mu\hat{N}}{T}}T_\tau\left(\psi(\boldsymbol{r}_1,\tau_1)\overline{\psi}(\boldsymbol{r}_2,\tau_2)\mathfrak{S}\left(\frac{1}{T}\right)\right)\right\}}{\mathrm{Sp}\left\{e^{-\frac{\hat{H}_0-\mu\hat{N}}{T}}\mathfrak{S}\left(\frac{1}{T}\right)\right\}},$$

或者, 引入对无相互作用粒子系統各态求吉布斯平均的符号, 得到:

$$\mathfrak{G}(\boldsymbol{r}_1,\tau_1;\boldsymbol{r}_2,\tau_2)=-\frac{\langle T_\tau(\psi(\boldsymbol{r}_1,\tau_1)\overline{\psi}(\boldsymbol{r}_2,\tau_2)\mathfrak{S})\rangle_0}{\langle\mathfrak{S}\rangle_0},\quad(12.7)$$

$$\langle\cdots\rangle_0=\mathrm{Sp}\left\{e^{\frac{\Omega_0+\mu\hat{N}-\hat{H}_0}{T}}\cdots\right\},\ \mathfrak{S}\equiv\mathfrak{S}\left(\frac{1}{T}\right).\quad(12.8)$$

只要逐步重复以上計算, 可以得到声子格林函数以及多粒子格林函数在相互作用表象中的表达式. 得到的声子格林函数为:

$$\mathfrak{D}(1,2)=-\frac{\langle T_\tau(\varphi(1)\varphi(2)\mathfrak{S})\rangle_0}{\langle\mathfrak{S}\rangle_0},\quad(12.9)$$

而双粒子格林函数为:

$$\mathfrak{G}^{\mathrm{II}}(1,2;3,4)=-\frac{\langle T_\tau(\psi(1)\psi(2)\overline{\psi}(3)\overline{\psi}(4)\mathfrak{S})\rangle_0}{\langle\mathfrak{S}\rangle_0}.\quad(12.10)$$

和更多变量有关的格林函数的式子与(12.7)、(12.9)、(12.10)式的差别只在于 $T$ 乘积中 $\psi$ 算符的数目.

最后,我們給出热力学势 $\Omega$ 和 $\mathfrak{S}$ 矩陣的关系式:

$$\Omega=\Omega_0-T\ln\langle\mathfrak{S}\rangle_0.\quad(12.11)$$

这里 $\Omega_0$ 是无相互作用时的热力学势:

$$\Omega_0=-T\ln\mathrm{Sp}\left\{e^{-\frac{\hat{H}_0-\mu\hat{N}}{T}}\right\}.$$



**2. 維克定理.** 現在回到我們的基本問題——計算相互作用粒子系統的格林函数. 如果粒子間的相互作用可看成是弱的,則相互作用表象中的温度格林函数可以按 $H_{int}$ 表示成十分簡明的微扰論級数.

相互作用哈密頓量 $\hat{H}_{int}$ 仅仅通过矩陣 $\mathfrak{S}$ 而出現于格林函数中. 将(12.4)式右端的指数按 $\hat{H}_{int}$ 的冪展成級数,就得到:

$$\mathfrak{S}=1-\int_0^{1/T}\hat{H}_{int}(\tau')d\tau'+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{1/T}\int_0^{1/T}d\tau'd\tau''T_\tau(\hat{H}_{int}(\tau')\hat{H}_{int}(\tau''))-\cdots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{1/T}\cdots\int_0^{1/T}d\tau_1\cdots d\tau_nT_\tau(\hat{H}_{int}(\tau_1)\cdots\hat{H}_{int}(\tau_n)).\quad(12.12)$$

再将此式代入(12.7)的分子,我們求得格林函数的微扰論級数:

$$\mathfrak{G}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_1,\tau_1;\boldsymbol{r}_2,\tau_2)=$$

$$=-\frac{1}{\langle\mathfrak{S}\rangle_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{1/T}\cdots\int_0^{1/T}d\tau_{(1)}\cdots d\tau_{(n)}\times$$

$$\times\langle T_\tau(\psi_\alpha(\boldsymbol{r}_1,\tau_1)\overline{\psi}_\beta(\boldsymbol{r}_2,\tau_2)\hat{H}_{int}(\tau_{(1)})\cdots\hat{H}_{int}(\tau_{(n)}))\rangle_0,\quad(12.13)$$

其第一項自然就是 §11 中算出的自由粒子格林函数 $\mathfrak{G}^{(0)}=-\langle T_\tau(\psi(1)\overline{\psi}(2))\rangle_0$.

我們不展开(12.13)式分母 $\langle\mathfrak{S}\rangle_0$ 中的矩陣 $\mathfrak{S}$, 因为它将和分子中同样的因子相消. 加之 $\langle\mathfrak{S}\rangle_0$ 乃是与 $\boldsymbol{r}$ 和 $\tau$ 无关的常量,不能影响以后的討論.

在一切現实問題中, $H_{int}(\tau)$ 都是若干 (通常不太多) 个算符 $\psi(\boldsymbol{r},\tau)$, $\overline{\psi}(\boldsymbol{r},\tau)$(可能还有 $\varphi(\boldsymbol{r},\tau)$) 的乘积对空間变量的积分. 因此按照微扰論計算格林函数的問題, 就归結为計算若干个取于不同空間和"时間"点的算符 $T$ 乘积的平均値:

$$\langle T_\tau(\psi_\alpha(\boldsymbol{r},\tau)\cdots\overline{\psi}_{\alpha'}(\boldsymbol{r}',\tau')\cdots)\rangle_0.\quad(12.14)$$

我們在前一章里計算絕对温度零度的普通格林函数时, 已經遇見过这类問題. 那里証明了,任意数量算符的平均値都归結为各种

可能的成对平均值乘积之和，而成对平均值根据定义就等于自由粒子格林函数(維克定理)．我們卽将看到,类似的定理在新的情况中也成立．

为了証实这一点，我們在(12.14)中代入算符 $\psi$ 对坐标的傅立叶展开式[1]:

$$\psi(\boldsymbol{r},\tau)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{p}}a_{\boldsymbol{p}}(\tau)e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}-\tau(\varepsilon_0(\boldsymbol{p})-\mu)},$$
$$\bar{\psi}(\boldsymbol{r},\tau)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{p}}a^{+}_{\boldsymbol{p}}(\tau)e^{-i\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}+\tau(\varepsilon_0(\boldsymbol{p})-\mu)}.\qquad(12.15)$$

(12.15) 式中的算符 $a_{\boldsymbol{p}}(\tau)$ 和 $a^{+}_{\boldsymbol{p}}(\tau)$ 乃是普通的消灭和产生算符，事实上与 $\tau$ 无关．然而我們保留字母 $\tau$，以标明在 $T$ 編时中算符应占的位置．

代入展开式(12.15)之后，如果略掉(12.15)式中的指数部分，(12.14)式就成为:

$$\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{p}_1}\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{p}_2}\cdots\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{p}'_1}\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{p}'_2}\cdots$$
$$\cdots\langle T_\tau(a_{\boldsymbol{p}_1}(\tau_1)a_{\boldsymbol{p}_2}(\tau_2)\cdots a^{+}_{\boldsymbol{p}'_1}(\tau'_1)a^{+}_{\boldsymbol{p}'_2}(\tau'_2)\cdots)\rangle_0.\qquad(12.16)$$

在对 $\boldsymbol{p}_1,\cdots,\boldsymbol{p}'_1,\cdots$ 的求和中,对每个固定动量而言,只有产生算符和消灭算符数目相等的各項才不为零．例如只包括动量相同的一个产生算符和一个消灭算符的各項就不为零,卽

$$\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{p}_1}\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{p}_2}\cdots\langle T_\tau(a_{\boldsymbol{p}_1}(\tau_1)a_{\boldsymbol{p}_2}(\tau_2)\cdots a^{+}_{\boldsymbol{p}_1}(\tau'_1)a^{+}_{\boldsymbol{p}_2}(\tau'_2)\cdots)\rangle_0 \quad (\boldsymbol{p}_1\neq\boldsymbol{p}_2\neq\cdots)\qquad(12.17\text{a})$$

以及其它和(12.17a)式的区别只是算符 $a^{+}$ 的动量 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2\cdots$ 进行了置换的各項,都不等于零．

当几个(例如两个)产生算符具有同一动量时，求和中不为零的相应諸項的形状是:

$$\frac{1}{V}\cdot\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{p}_1}\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{p}_2}\cdots\langle T_\tau(a_{\boldsymbol{p}_1}(\tau_1)a_{\boldsymbol{p}_1}(\tau_2)a_{\boldsymbol{p}_2}(\tau_3)\cdots$$
$$\cdots a^{+}_{\boldsymbol{p}_1}(\tau'_1)a^{+}_{\boldsymbol{p}_1}(\tau'_2)a^{+}_{\boldsymbol{p}_2}(\tau'_3)\cdots)\rangle_0. \quad (\boldsymbol{p}_1\neq\boldsymbol{p}_2\neq\cdots)\qquad(12.17\text{b})$$

表达式(12.17a)有一个与众不同的特点，卽是在(12.17a)式中因子 $1/V$ 的数目与求和的次数相等，在所有其它各項中前者总多于后者．設想在完成平均 $\langle\cdots\rangle_0$ 之后，令体积 $V$ 趋向无穷大，但粒子数密度 $N/V$ 保持不变．（这时求和要换成求积分，其規則是 $V^{-1}\sum\cdots\rightarrow(2\pi)^{-3}\int\cdots$）．(12.17a) 式中的和在极限 $V\rightarrow\infty$ 下仍是不等于零的，它通过費米函数或玻色函数的各种組合对动量的积分表示．(在§11中計算自由粒子格林函数 $\mathfrak{G}^{(0)}=-\langle T_\tau(\psi(1)\bar{\psi}(2))\rangle_0$ 时,我們已遇見过这类实例)．相反，在(12.17b)型的表达式中除了如上的对动量的积分外,还剩下若干个多余的因子 $1/V$,結果这些表达式在 $V\rightarrow\infty$ 时消失．

这样，(12.16)式求和中所有各項在 $V\rightarrow\infty$ 时只剩下形如(12.17a)式者,其中所有产生(和消灭)算符具有不同的动量．这就是說，在实际計算 $\langle T_\tau\{a_{\boldsymbol{p}_1}(\tau_1)a_{\boldsymbol{p}_2}(\tau_2)\cdots a^{+}_{\boldsymbol{p}'_1}(\tau'_1)a^{+}_{\boldsymbol{p}'_2}(\tau'_2)\cdots\}\rangle_0$ 时,我們可以将每对算符 $a_{\boldsymbol{p}},\ a^{+}_{\boldsymbol{p}}$ 独立地求平均．大量算符的 $T$ 乘积的平均值就表示成一切可能的成对平均值的和．例如,

$$\langle T_\tau\{a_{\boldsymbol{p}_1}(\tau_1)a_{\boldsymbol{p}_2}(\tau_2)a^{+}_{\boldsymbol{p}'_1}(\tau'_1)a^{+}_{\boldsymbol{p}'_2}(\tau'_2)\}\rangle_0\rightarrow$$
$$\rightarrow\langle T_\tau\{a_{\boldsymbol{p}_1}(\tau_1)a^{+}_{\boldsymbol{p}'_2}(\tau'_2)\}\rangle_0\langle T_\tau\{a_{\boldsymbol{p}_2}(\tau_2)a^{+}_{\boldsymbol{p}'_1}(\tau'_1)\}\rangle_0\mp$$
$$\mp\langle T_\tau\{a_{\boldsymbol{p}_1}(\tau_1)a^{+}_{\boldsymbol{p}'_1}(\tau'_1)\}\rangle_0\langle T_\tau\{a_{\boldsymbol{p}_2}(\tau_2)a^{+}_{\boldsymbol{p}'_2}(\tau'_2)\}\rangle_0\qquad(12.18\text{a})$$

(費米統計取«－»号,玻色統計取«＋»号)．

在坐标表象中这些結果表明,若干个 $\psi$ 算符 $T$ 乘积的平均值，分解成一切可能的成对算符 $\psi$、$\bar{\psi}$ 平均值乘积之和．例如，代替(12.18a)式的是:

$$\langle T_\tau\{\psi(\boldsymbol{r}_1,\tau_1)\psi(\boldsymbol{r}_2,\tau_2)\bar{\psi}(\boldsymbol{r}'_1,\tau'_1)\bar{\psi}(\boldsymbol{r}'_2,\tau'_2)\}\rangle_0=$$
$$=\frac{1}{V^2}\sum_{\boldsymbol{p}'_1,\boldsymbol{p}'_2,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2}e^{i(\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{p}'_1\boldsymbol{r}'_1-\boldsymbol{p}'_2\boldsymbol{r}'_2)}e^{-\tau_1(\varepsilon_0(\boldsymbol{p}_1)-\mu)-\tau_2(\varepsilon_0(\boldsymbol{p}_2)-\mu)}\times$$

---

1) 利用相互作用表象中算符的定义和恆等式(11.10)，容易証明(12.15)式的正确性．

$$\times e^{\tau_1'(\varepsilon_0(\boldsymbol{p}_1')-\mu)+\tau_2'(\varepsilon_0(\boldsymbol{p}_2')-\mu)}\langle T_\tau\{a_{\boldsymbol{p}_1}(\tau_1)a_{\boldsymbol{p}_2}(\tau_2)a^+_{\boldsymbol{p}_1'}(\tau_1')a^+_{\boldsymbol{p}_2'}(\tau_2')\}\rangle_0 =$$

$$= \frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2'} e^{i(\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{p}_2'\boldsymbol{r}_2')-\tau_1(\varepsilon_0(\boldsymbol{p}_1)-\mu)+\tau_2'(\varepsilon_0(\boldsymbol{p}_2')-\mu)}\times$$

$$\times\langle T_\tau\{a_{\boldsymbol{p}_1}(\tau_1)a^+_{\boldsymbol{p}_2'}(\tau_2')\}\rangle_0\times$$

$$\times\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1'} e^{i(\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{p}_1'\boldsymbol{r}_1')-\tau_2(\varepsilon_0(\boldsymbol{p}_2)-\mu)+\tau_1'(\varepsilon_0(\boldsymbol{p}_1')-\mu)}\times$$

$$\times\langle T_\tau\{a_{\boldsymbol{p}_2}(\tau_2)a^+_{\boldsymbol{p}_1'}(\tau_1')\}\rangle_0\mp$$

$$\mp\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_1'} e^{i(\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{p}_1'\boldsymbol{r}_1')-\tau_1(\varepsilon_0(\boldsymbol{p}_1)-\mu)+\tau_1'(\varepsilon_0(\boldsymbol{p}_1')-\mu)}\times$$

$$\times\langle T_\tau\{a_{\boldsymbol{p}_1}(\tau_1)a^+_{\boldsymbol{p}_1'}(\tau_1')\}\rangle_0\times$$

$$\times\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_2'} e^{i(\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{p}_2'\boldsymbol{r}_2')-\tau_2(\varepsilon_0(\boldsymbol{p}_2)-\mu)+\tau_2'(\varepsilon_0(\boldsymbol{p}_2')-\mu)}\times$$

$$\times\langle T_\tau\{a_{\boldsymbol{p}_2}(\tau_2)a^+_{\boldsymbol{p}_2'}(\tau_2')\}\rangle_0 =$$

$$\doteq\langle T_\tau\{\psi(\boldsymbol{r}_1,\tau_1)\bar\psi(\boldsymbol{r}_2',\tau_2')\}\rangle_0\langle T_\tau\{\psi(\boldsymbol{r}_2,\tau_2)\bar\psi(\boldsymbol{r}_1',\tau_1')\}\rangle_0\mp$$

$$\mp\langle T_\tau\{\psi(\boldsymbol{r}_1,\tau_1)\bar\psi(\boldsymbol{r}_1',\tau_1')\}\rangle_0\langle T_\tau\{\psi(\boldsymbol{r}_2,\tau_2)\bar\psi(\boldsymbol{r}_2',\tau_2')\}\rangle_0. \qquad (12.18\text{b})$$

对于更多的算符也有类似关系式成立.

(12.18b) 式右端的平均值和自由粒子温度格林函数只有符号之差. 由此可見,計算温度格林函数时,我們遇見和絕对温度零度相同的情形. 格林函数 $\mathfrak{G}$ 的展开式(12.13)就外形看,与函数 $G$ 的展开式(8.9)一样,(如果不計因子 $i^n$ 和对 $\tau$ 的积分限). 为了計算(12.13) 式中的平均值 $\langle T_\tau(\cdots)\rangle_0$, 和从前一样可以利用維克定理;这些平均值通过成对的产生和消灭算符的平均值表示.

应指出,在所述的方法中沒有正規乘积概念. 維克定理不是对 $T$ 乘积本身,而是对平均值成立.

按維克定理将級数(12.13)式的任何一項写出,并把平均值 $\langle T_\tau(\psi\bar\psi)\rangle_0$ 换成自由格林函数

$$\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2,\tau_1-\tau_2) = -\langle T_\tau\{\psi_\alpha(\boldsymbol{r}_1,\tau_1)\bar\psi_\beta(\boldsymbol{r}_2,\tau_2)\}\rangle_0,$$

我們就得到和 $T=0$ 时相应級数結构全同的式子. 因而可以利



用上一章中的費曼图描述微扰論級数的各种近似. 只是图形元素和表达式的对应規則有所改变. 这时图中每条綫不是对应函数 $G^{(0)}$, 而是对应自由粒子温度格林函数 $\mathfrak{G}^{(0)}$, 同时每个图形頂点对应时間从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的积分, 要代以对应虛"时間" $\tau$ 从 0 到 $1/T$ 的积分.

迄今我們不言而喻地假設了,系統的体积趋向无穷大时(密度一定),所有自由粒子格林函数及其积分仍是有限的. 特别是基于这一点,我們在 $V\to\infty$ 时忽略了所有如(12.17b)式之項, 因而能建立維克定理. 对于温度低于凝聚温度 $T_c$ 的玻色粒子系統,以及具有超导性質的費米系統,情况根本变了.

在玻色气体的情况下, $T<T_c$ 时,动量为零的状态的粒子产生和消灭算符正比于体积的平方根:

$$a_0\sim a_0^+\sim\sqrt{N}\sim\sqrt{V},$$

所以 $V\to\infty$ 时(12.17b)式型的各項仍不为零. 对于超导体也有类似情况. 两种情况下都必須利用特別的方法,这些方法我們将专章叙述.

現在回到可以使用普通图解法的情况. 和前一章相似,格林函数的图形有两条外綫; 一条外綫始于点 $\boldsymbol{r}_1,\tau_1$, 它相当算符 $\psi_\alpha(\boldsymbol{r}_1,\tau_1)$ 的坐标,另一条外綫終于点 $\boldsymbol{r}_2,\tau_2$, 它相当于算符 $\bar\psi_\beta(\boldsymbol{r}_2,\tau_2)$ 的坐标. 和从前一样,函数 $\mathfrak{G}$ 的图形可以分成两类——相連和不相連图. 借助完全类似的討論可証明,考虑不相連图形即可消去(12.7)式的分母. 結果对 $\mathfrak{G}$ 函数有:

$$\mathfrak{G}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_1,\tau_1;\boldsymbol{r}_2,\tau_2) = -\langle T_\tau\{\psi_\alpha(\boldsymbol{r}_1,\tau_1)\bar\psi_\beta(\boldsymbol{r}_2,\tau_2)\mathfrak{S}\}\rangle_c, \qquad (12.19)$$

其中 $\langle\cdots\rangle_c$ 表示所有的相連图形.

既然推导过程中一点也沒有引用图形上外綫的数目为 2 的事实,则上述結果对多粒子格林函数也是成立的. 在相应的公式(如(12.10)式) 中可以省去分母中的 $\langle\mathfrak{S}\rangle$, 同时只計算相連图形的貢献.

同样和前一章类似,每个图形在 $\mathfrak{G}$ 的級数中有一个形如 $a^n$ 的系数,它与图形級别的关系是不碍事的. 这一点对于图形的无穷

序列求和是很重要的.

## §13. 坐标空間中的图解法. 举例

前一节的基本結果是,确定了在計算温度格林函数 $\mathfrak{G}$ 时,可以使用普通的費曼图解法. 任何图形的主要元素都是代表自由粒子格林函数或声子格林函数的綫. 和在上一章里一样, 我們用实綫代表粒子格林函数(图 32); 綫上的箭头指明它的方向: 綫从坐标

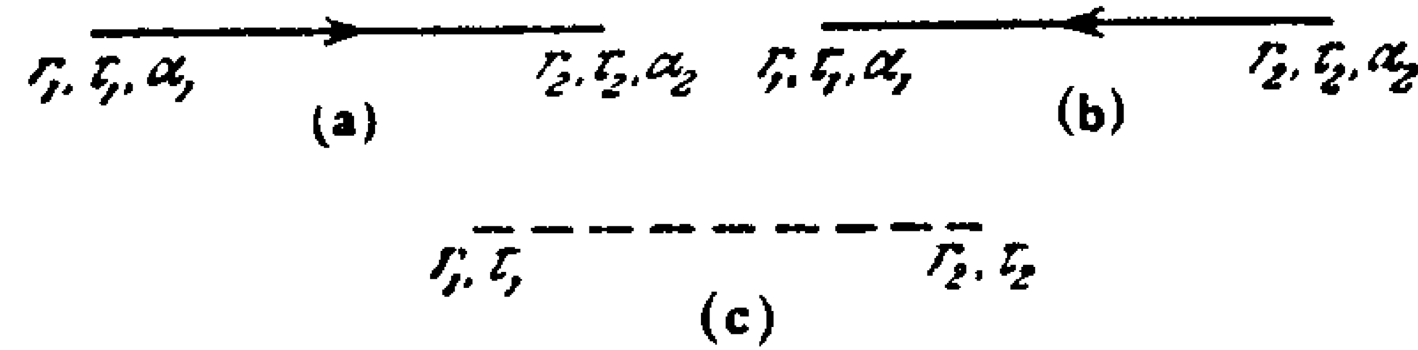



图 32

为 $\boldsymbol{r}_1, \tau_1$、自旋投影为 $\alpha_1$ 的点(这个点对应 $\mathfrak{G}$ 函数定义中的算符 $\psi$) "出来",而"进入"点 $\boldsymbol{r}_2, \tau_2, \alpha_2$ (它对应算符 $\bar{\psi}$). "出点"变量在格林函数中写在左面,"入点"变量写在右面. 图 32(a) 的綫代表格林函数

$$\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha_1\alpha_2}(\boldsymbol{r}_1, \tau_1; \boldsymbol{r}_2, \tau_2) \equiv \mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha_1\alpha_2}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \tau_1 - \tau_2),$$

图 32(b) 的綫代表格林函数

$$\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha_2\alpha_1}(\boldsymbol{r}_2, \tau_2; \boldsymbol{r}_1, \tau_1) \equiv \mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha_2\alpha_1}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \tau_2 - \tau_1).$$

声子格林函数我們将以虛綫表示 (图 32(c)). 声子綫上可以不标明方向, 因为我們在 §11 中已經看到, $\mathfrak{D}^{(0)}$ 乃是 $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ 和 $\tau_1 - \tau_2$ 的偶函数.

对各綫交点——"頂点"的坐标进行积分:对 $\boldsymbol{r}$ 在整个空間,对 $\tau$ 在区間 0 到 $1/T$ 上. 在頂点还要对自旋变量求和.

图形的具体形状取决于粒子間相互作用的类型. 构图时可以利用維克定理, 根据这个定理, 格林函数的微扰論級数(12.13)式中几个算符 $T$ 乘积的平均值,可表示为成对平均值乘积之和. 后者与自由粒子格林函数的关系如下:

$$\left.\begin{aligned}\langle T_\tau\{\psi_\alpha(\boldsymbol{r}_1, \tau_1)\bar{\psi}_\beta(\boldsymbol{r}_2, \tau_2)\}\rangle &= -\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \tau_1 - \tau_2),\\ \langle T_\tau\{\bar{\psi}_\beta(\boldsymbol{r}_2, \tau_2)\psi_\alpha(\boldsymbol{r}_1, \tau_1)\}\rangle &= \pm\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2; \tau_1 - \tau_2)\end{aligned}\right\} \tag{13.1}$$



(費米粒子取«+»号,玻色粒子取«−»号).

两个声子算符乘积的平均值通过函数 $\mathfrak{D}^{(0)}$ 表示:

$$\langle T_\tau\{\varphi(\boldsymbol{r}_1, \tau_1)\varphi(\boldsymbol{r}_2, \tau_2)\}\rangle = -\mathfrak{D}^{(0)}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \tau_1 - \tau_2). \tag{13.2}$$

下面討論各种类型的相互作用:

A. 双粒子相互作用.

設系統內粒子間作用着由势 $U(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)$ 描述的成对力. 相互作用表象中哈密頓量 $\hat{H}_{int}$ 的形状是:

$$\hat{H}_{int}(\tau) = \frac{1}{2}\iint d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}_2 \bar{\psi}_\alpha(\boldsymbol{r}_1, \tau)\bar{\psi}_\beta(\boldsymbol{r}_2, \tau)U(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \times \times \psi_\beta(\boldsymbol{r}_2, \tau)\psi_\alpha(\boldsymbol{r}_1, \tau). \tag{13.3}$$

最好不用势 $U(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)$,而代之以与"时間" $\tau$ 有关的势 $\mathfrak{B}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \tau_1 - \tau_2)$,其定义为:

$$\mathfrak{B}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \tau_1 - \tau_2) = U(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)\delta(\tau_1 - \tau_2). \tag{13.4}$$

利用(13.4)式,可将矩陣 $\mathfrak{S}$ 的表达式(12.4)变成对称形式:

$$\mathfrak{S} = T_\tau\exp\left\{-\frac{1}{2}\iint d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}_2 d\tau_1 d\tau_2 \bar{\psi}_\beta(\boldsymbol{r}_2, \tau_2)\psi_\alpha(\boldsymbol{r}_1, \tau_1) \times \times \mathfrak{B}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \tau_1 - \tau_2)\psi_\beta(\boldsymbol{r}_2, \tau_2)\bar{\psi}_\alpha(\boldsymbol{r}_1, \tau_1)\right\}.$$

計算对格林函数的一級修正項(按 $U$). 我們有[1]:

$$\mathfrak{G}^{(1)}_{\alpha\beta}(x - y) = = \frac{1}{2}\iint d^4z_1 d^4z_2 \langle T_\tau\{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)\mathfrak{B}(z_1 - z_2)\bar{\psi}_{\gamma_1}(z_1)\bar{\psi}_{\gamma_2}(z_2) \times \times \psi_{\gamma_2}(z_2)\psi_{\gamma_1}(z_1)\}\rangle. \tag{13.5}$$

根据維克定理,$\langle\cdots\rangle$表示为以下四項:

$$\langle T_\tau\{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)\}\rangle\langle\{\bar{\psi}_{\gamma_1}(z_1)\psi_{\gamma_1}(z_1)\}\rangle\langle\{\bar{\psi}_{\gamma_2}(z_2)\psi_{\gamma_2}(z_2)\}\rangle, \tag{I}$$

$$\mp\langle T_\tau\{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)\}\rangle\langle\{\bar{\psi}_{\gamma_2}(z_2)\psi_{\gamma_1}(z_1)\}\rangle\langle\{\bar{\psi}_{\gamma_1}(z_1)\psi_{\gamma_2}(z_2)\}\rangle, \tag{II}$$

$$\langle T_\tau\{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_{\gamma_1}(z_1)\}\rangle\langle T_\tau\{\psi_{\gamma_1}(z_1)\bar{\psi}_\beta(y)\}\rangle\langle\{\bar{\psi}_{\gamma_2}(z_2)\psi_{\gamma_2}(z_2)\}\rangle, \tag{III}$$

$$\mp\langle T_\tau\{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_{\gamma_1}(z_1)\}\rangle\langle\{\bar{\psi}_{\gamma_2}(z_2)\psi_{\gamma_1}(z_1)\}\rangle\langle T_\tau\{\psi_{\gamma_2}(z_2)\bar{\psi}_\beta(y)\}\rangle \tag{IV}$$

以及在(I)—(IV)中作置换 $z_1 \to z_2$, $\gamma_1 \to \gamma_2$ 后所得另外四項之

---

1) 本节中以普通拉丁字母記四个变量的集合 $x=(\boldsymbol{r}, \tau)$. 因此 $\mathfrak{G}(x-y) = \mathfrak{G}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, \tau_1 - \tau_2)$, $d^4x = d\boldsymbol{r}d\tau$.

和．后四項对(13.5)中积分的貢献显然和前四項相同，因而消去了积分前的1/2.

按(13.1)式将$\langle T_{\tau}(\cdots)\rangle$換成格林函数$\mathfrak{G}^{(0)}$，我們得出：一級修正項由以下四个表达式相加而成：

$$-\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\beta}(x-y)\iint d^4z_1d^4z_2\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_1}(0)\mathfrak{V}(z_1-z_2)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_2\gamma_2}(0), \quad (\mathrm{I})$$

$$\pm\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\beta}(x-y)\iint d^4z_1d^4z_2\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(z_1-z_2)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_2\gamma_1}(z_2-z_1)\mathfrak{V}(z_1-z_2), \quad (\mathrm{II})$$

$$\pm\iint\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-z_1)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_1\beta}(z_1-y)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_2\gamma_2}(0)\mathfrak{V}(z_1-z_2)d^4z_1d^4z_2, \quad (\mathrm{III})$$

$$-\iint\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-z_1)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(z_1-z_2)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_2\beta}(z_2-y)\mathfrak{V}(z_1-z_2)d^4z_1d^4z_2. \quad (\mathrm{IV})$$

注意在$\mathfrak{G}^{(0)}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2;0)$中永远取$\tau\to-0$.

我們将在图上以波紋綫表示函数$\mathfrak{V}(z_1-z_2)$．于是表达式(I)——(IV)就对应图33上的图形．图形I,II属于上节中提到的不相連图形．那里已指出，計算格林函数时不应考虑它們的貢献.

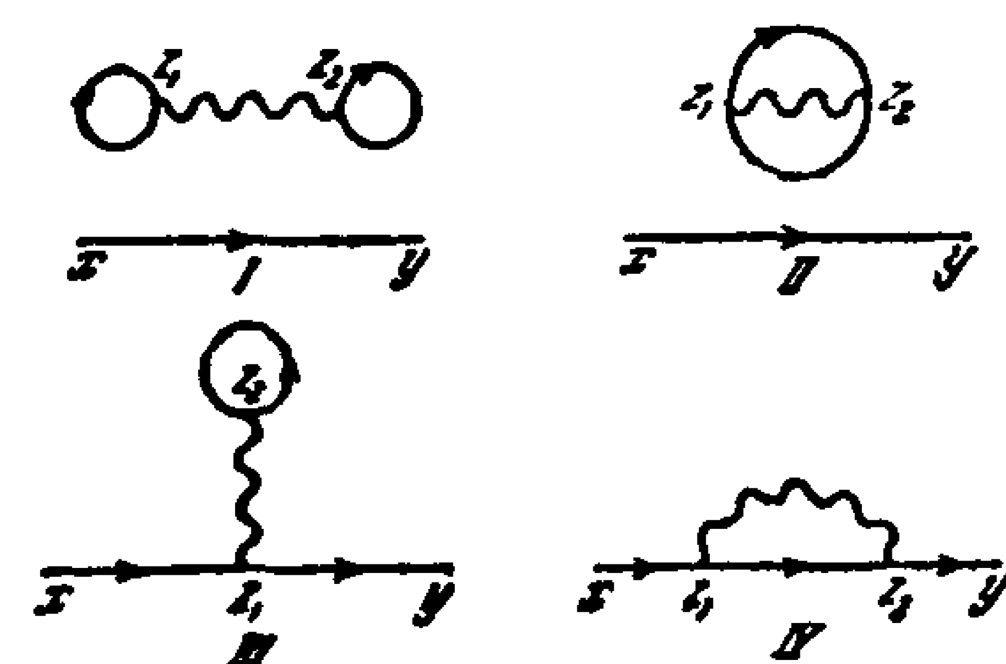


图 33

这样，只有图形III，IV，以及由它們經过頂点坐标$z_1$，$z_2$置換而得的图形，才对一級修正項有貢献．再提醒一下，这类图形称作拓扑等价的；所有拓扑等价图形給出相同的貢献.

应当注意，图III、IV所对应的表达式在費米統計情况下符号相反．这是由于图III上出現了封閉环．討論任意級图形，可以証明，任何費米子的封閉环(不必由一条綫組成)在表达式中帶«—»号.

现在列举計算任意級修正項的規則.

(1) 首先画出一切具有$2n$个頂点和两条外綫的相連拓扑不等价图形，每个頂点有两条实綫和一条波紋綫.

(2) 每条实綫代表粒子格林函数$\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\beta}(x-y)$，($x$, $\alpha$——起点坐标，$y$, $\beta$——終点坐标).

(3) 每条波紋綫代表广义势$\mathfrak{V}(x-y)$.

(4) 对每个頂点的坐标$z$积分($d^4z=d\boldsymbol{z}d\tau$)并对自旋变量$\alpha$求和.

(5) 所得表达式乘以$(-1)^{n+F}$，其中$n$为图形的級数，而$F$是图中封閉費米环的数目.

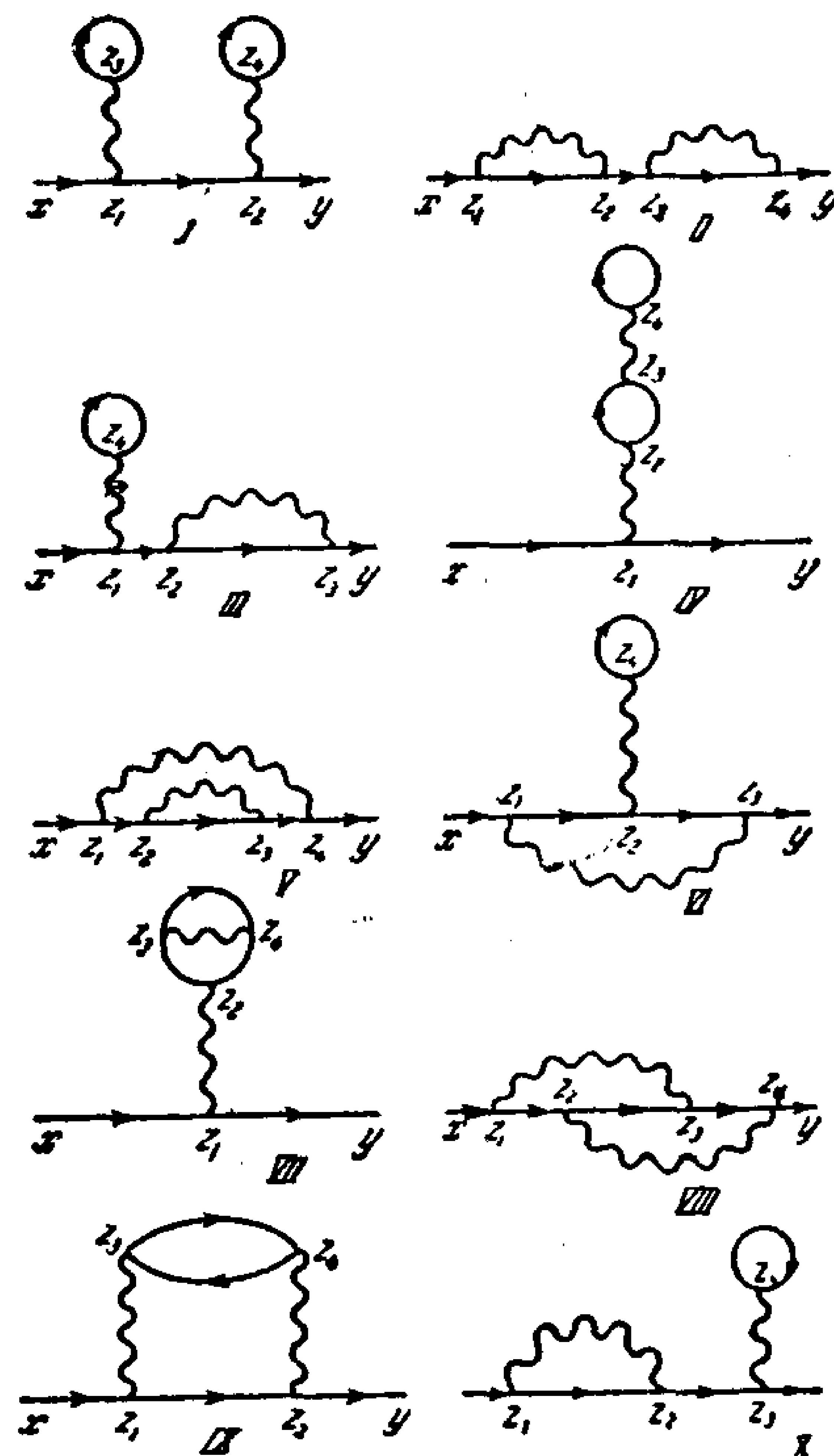


图 34

(6) 如果表达式中出现时間变量重合的格林函数$\mathfrak{G}^{(0)}(0)$，則它应理解为$\lim\limits_{\tau\to0}\mathfrak{G}^{(0)}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2,-\tau)$.

計論二級修正項. 全部具有四个頂点的拓扑不等价图示于图34中. 利用規則(1)——(6), 容易写出这些图形对应的表达式:

$$\int d^4z_1d^4z_2d^4z_3d^4z_4\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-z_1)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(z_1-z_2)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_2\beta}(z_2-y)\times$$
$$\times\mathfrak{B}(z_1-z_3)\mathfrak{B}(z_2-z_4)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_3\gamma_3}(0)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_4\gamma_4}(0),\qquad \text{(I)}$$

$$\int d^4z_1d^4z_2d^4z_3d^4z_4\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-z_1)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(z_1-z_2)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_2\gamma_3}(z_2-z_3)\times$$
$$\times\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_3\gamma_4}(z_3-z_4)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_4\beta}(z_4-y)\mathfrak{B}(z_1-z_2)\mathfrak{B}(z_3-z_4),\qquad \text{(II)}$$

$$\mp\int d^4z_1d^4z_2d^4z_3d^4z_4\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-z_1)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(z_1-z_2)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_2\gamma_3}(z_2-z_3)\times$$
$$\times\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_3\beta}(z_3-y)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_4\gamma_4}(0)\mathfrak{B}(z_1-z_4)\mathfrak{B}(z_2-z_3),\qquad \text{(III)}$$

$$\int d^4z_1d^4z_2d^4z_3d^4z_4\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-z_1)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_1\beta}(z_1-y)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_2\gamma_3}(z_2-z_3)\times$$
$$\times\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_3\gamma_2}(z_3-z_2)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_4\gamma_4}(0)\mathfrak{B}(z_1-z_2)\mathfrak{B}(z_3-z_4),\qquad \text{(IV)}$$

$$\int d^4z_1d^4z_2d^4z_3d^4z_4\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-z_1)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(z_1-z_2)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_2\gamma_3}(z_2-z_3)\times$$
$$\times\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_3\gamma_4}(z_3-z_4)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_4\beta}(z_4-y)\mathfrak{B}(z_1-z_4)\mathfrak{B}(z_2-z_3),\qquad \text{(V)}$$

$$\mp\int d^4z_1d^4z_2d^4z_3d^4z_4\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-z_1)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(z_1-z_2)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_2\gamma_3}(z_2-z_3)\times$$
$$\times\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_3\beta}(z_3-y)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_4\gamma_4}(0)\mathfrak{B}(z_1-z_3)\mathfrak{B}(z_2-z_4),\qquad \text{(VI)}$$

$$\mp\int d^4z_1d^4z_2d^4z_3d^4z_4\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-z_1)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_1\beta}(z_1-y)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_2\gamma_3}(z_2-z_3)\times$$
$$\times\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_3\gamma_4}(z_3-z_4)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_4\gamma_2}(z_4-z_2)\mathfrak{B}(z_1-z_2)\mathfrak{B}(z_3-z_4),\qquad \text{(VII)}$$

$$\int d^4z_1d^4z_2d^4z_3d^4z_4\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-z_1)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(z_1-z_2)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_2\gamma_3}(z_2-z_3)\times$$
$$\times\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_3\gamma_4}(z_3-z_4)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_4\beta}(z_4-y)\mathfrak{B}(z_1-z_3)\mathfrak{B}(z_2-z_4),\qquad \text{(VIII)}$$

$$\mp\int d^4z_1d^4z_2d^4z_3d^4z_4\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-z_1)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(z_1-z_2)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_2\beta}(z_2-y)\times$$
$$\times\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_3\gamma_4}(z_3-z_4)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_4\gamma_3}(z_4-z_3)\mathfrak{B}(z_1-z_3)\mathfrak{B}(z_2-z_4),\qquad \text{(IX)}$$

$$\mp\int d^4z_1d^4z_2d^4z_3d^4z_4\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-z_1)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(z_1-z_2)\times$$
$$\times\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_2\gamma_3}(z_2-z_3)\mathfrak{G}_{\gamma_3\beta}(z_3-y)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_4\gamma_4}(0)\mathfrak{B}(z_1-z_2)\mathfrak{B}(z_3-z_4).\qquad \text{(X)}$$



可令双粒子相互作用的微扰論具有更对称的形式; 当粒子間的作用力不仅和距离、而且和自旋有关时, 它特别方便. 这种相互作用的哈密頓量是:

$$\hat{H}_{int}(\tau)=\frac{1}{2}\iint d\boldsymbol{r}_1d\boldsymbol{r}_2\bar{\psi}_\alpha(\boldsymbol{r}_1,\tau)\bar{\psi}_\beta(\boldsymbol{r}_2,\tau)U_{\alpha\beta;\delta\gamma}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\times$$
$$\times\psi_\gamma(\boldsymbol{r}_2,\tau)\psi_\delta(\boldsymbol{r}_1,\tau).\qquad (13.6)$$

将 $\mathfrak{S}$ 表达式中的积分

$$\int_0^{1/T}H_{int}(\tau)d\tau,$$

表示成对所有变量都对称的形式:

$$\frac{1}{4}\int_0^{1/T}\cdots\int_0^{1/T}d\tau_1\cdots d\tau_4\int\cdots\int d\boldsymbol{r}_1\cdots d\boldsymbol{r}_4\times$$
$$\times\bar{\psi}_{\gamma_1}(\boldsymbol{r}_1,\tau_1)\bar{\psi}_{\gamma_2}(\boldsymbol{r}_2,\tau_2)\mathcal{J}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2;\gamma_3\gamma_4}(\boldsymbol{r}_1,\tau_1,\boldsymbol{r}_2,\tau_2;\boldsymbol{r}_3,\tau_3,\boldsymbol{r}_4,\tau_4)\times$$
$$\times\psi_{\gamma_4}(\boldsymbol{r}_4,\tau_4)\psi_{\gamma_3}(\boldsymbol{r}_3,\tau_3),$$

或者, 引入"四維"記号:

$$\frac{1}{4}\int d^4z_1d^4z_2d^4z_3d^4z_4\times$$
$$\times\bar{\psi}_{\gamma_1}(z_1)\bar{\psi}_{\gamma_2}(z_2)\mathcal{J}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2;\gamma_3\gamma_4}(z_1,z_2;z_3,z_4)\psi_{\gamma_4}(z_4)\psi_{\gamma_3}(z_3).\qquad (13.7)$$

由于算符 $\bar{\psi}_{\gamma_1}(z_1)$ 和 $\bar{\psi}_{\gamma_2}(z_2)$ (相应地 $\psi_{\gamma_3}(z_3)$ 和 $\psi_{\gamma_4}(z_4)$) 随統計不同而反对易或对易, 可以認为 $\mathcal{J}^{(0)}$ 对变量置換 $z_1,\gamma_1\rightleftarrows z_2,\gamma_2$ 或 $z_3,\gamma_3\rightleftarrows z_4,\gamma_4$ 是反对称的 (費米粒子), 或对称的(玻色粒子).

这样定义的函数 $\mathcal{J}^{(0)}$ 可从下式

$$U_{\gamma_1\gamma_2;\gamma_3\gamma_4}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\delta(\tau_1-\tau_2)\delta(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_3)\delta(\tau_1-\tau_3)\times$$
$$\times\delta(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_4)\delta(\tau_2-\tau_4)$$

对变量 $z_1\gamma_1$, $z_2\gamma_2$ (和 $z_3\gamma_3$, $z_4\gamma_4$) 进行反对称化(費米統計)或对称化(玻色統計)而求得.

計算对格林函数的一級修正項. 我們有:

$$\frac{1}{4}\int d^4z_1\cdots d^4z_4\mathcal{J}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2;\gamma_3\gamma_4}(z_1,z_2;z_3,z_4)\times$$
$$\times\langle T_\tau\{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)\bar{\psi}_{\gamma_1}(z_1)\bar{\psi}_{\gamma_2}(z_2)\psi_{\gamma_4}(z_4)\psi_{\gamma_3}(z_3)\}\rangle.\qquad (13.8)$$

应用維克定理和 $\mathcal{T}^{(0)}$ 的对称性质，容易証实（13.8）式为两項之和：

$$-\frac{1}{2}\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\beta}(x-y)\int d^4z_1\cdots d^4z_4\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_3\gamma_1}(z_3-z_1)\times$$
$$\times\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_4\gamma_2}(z_4-z_2)\mathcal{T}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2;\gamma_3\gamma_4}(z_1,z_2;z_3,z_4), \qquad (\mathrm{I})$$

$$-\int d^4z_1\cdots d^4z_4\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-z_1)\mathcal{T}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2;\gamma_3\gamma_4}(z_1,z_2;z_3,z_4)\times$$
$$\times\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_4\beta}(z_4-y)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_3\gamma_2}(z_3-z_2). \qquad (\mathrm{II})$$

在图上以四角形表示 $\mathcal{T}^{(0)}$. 图 35 給出表达式(I)和(II)所对应的图形. 图(I)是不相連的,它的貢献不須考慮. 这样，在微扰論一級近似只剩下唯一的图形,它的貢献是表达式（II).

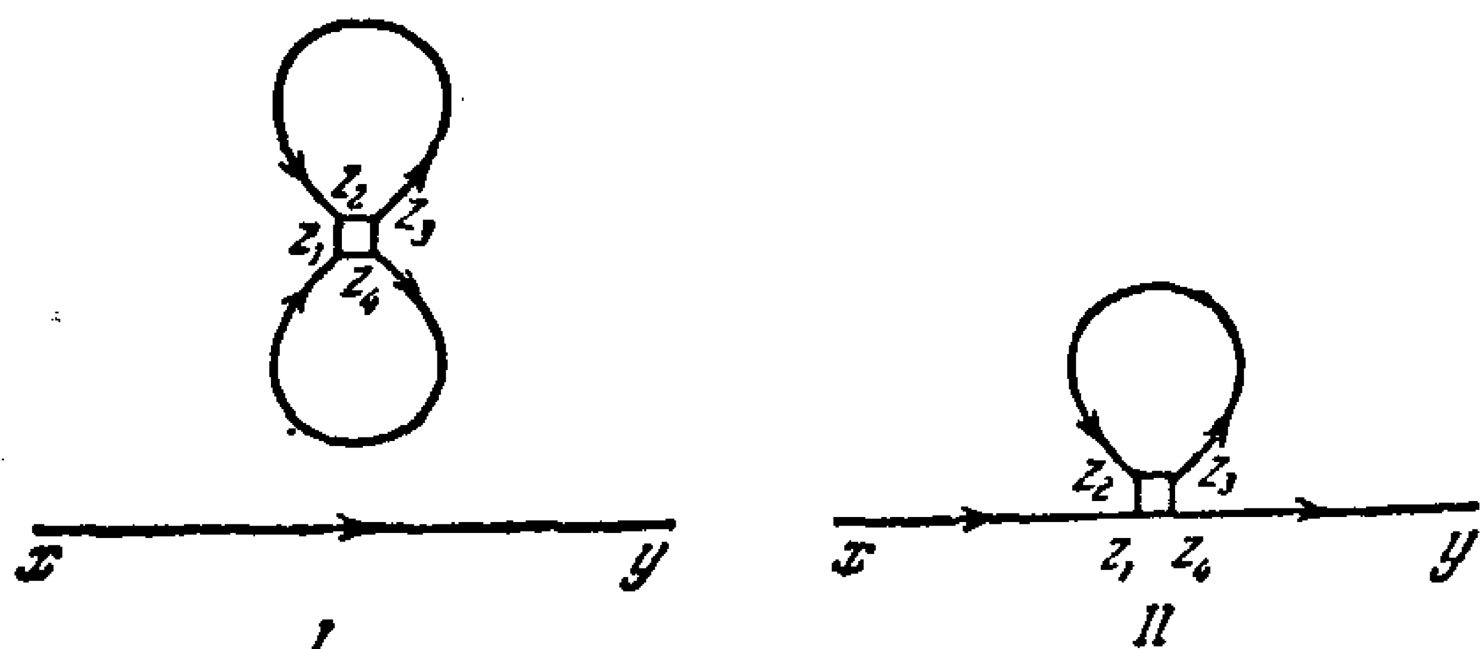



图 35

微扰論第二級近似有三个相連的拓扑不同图形（图 36). 不难写出这些图形所对应的表达式：

$$\int dz_1\cdots dz_8\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-z_1)\mathcal{T}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2;\gamma_3\gamma_4}(z_1,z_2;z_3,z_4)\times$$
$$\times\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_4\gamma_5}(z_4-z_5)\mathcal{T}^{(0)}_{\gamma_5\gamma_6;\gamma_7\gamma_8}(z_5,z_6;z_7,z_8)\times$$
$$\times\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_8\beta}(z_8-y)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_7\gamma_6}(z_7-z_6)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_3\gamma_2}(z_3-z_2). \qquad (\mathrm{I})$$

$$\int dz_1\cdots dz_8\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-z_1)\mathcal{T}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2;\gamma_3\gamma_4}(z_1,z_2;z_3,z_4)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_4\beta}(z_4-y)\times$$
$$\times\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_3\gamma_6}(z_3-z_6)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_7\gamma_2}(z_7-z_2)\times$$
$$\times\mathcal{T}^{(0)}_{\gamma_5\gamma_6;\gamma_7\gamma_8}(z_5,z_6;z_7,z_8)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_8\gamma_5}(z_8-z_5), \qquad (\mathrm{II})$$

$$\frac{1}{2}\int dz_1\cdots dz_8\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-z_1)\mathcal{T}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2;\gamma_3\gamma_4}(z_1,z_2;z_3,z_4)\times$$



$$\times\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_3\gamma_5}(z_3-z_5)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_4\gamma_6}(z_4-z_6)\times$$
$$\times\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_7\gamma_2}(z_7-z_2)\mathcal{T}^{(0)}_{\gamma_5\gamma_6;\gamma_7\gamma_8}(z_5,z_6;z_7,z_8)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_8\beta}(z_8-y). \qquad (\mathrm{III})$$

格林函数的 $n$ 級修正項按以下規則計算：

（1）画出全部具有 $n$ 个四角形的拓扑不等价图形（由四角形某些頂点坐标置換而得的图形算是拓扑等价的）；

（2）每条綫代表粒子格林函数；

（3）每个四角形代表函数 $\mathcal{T}^{(0)}$；

（4）对四角形頂点坐标进行积分.

图形的系数 $A_n$ 的决定，和 $T=0$ 的图解法中一样（見 §9). 然而更簡单的求系数的方法，是直接利用維克定理，将表达式 $\langle T_\tau\{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)\cdots\}\rangle$ 通过成对平均值写出.

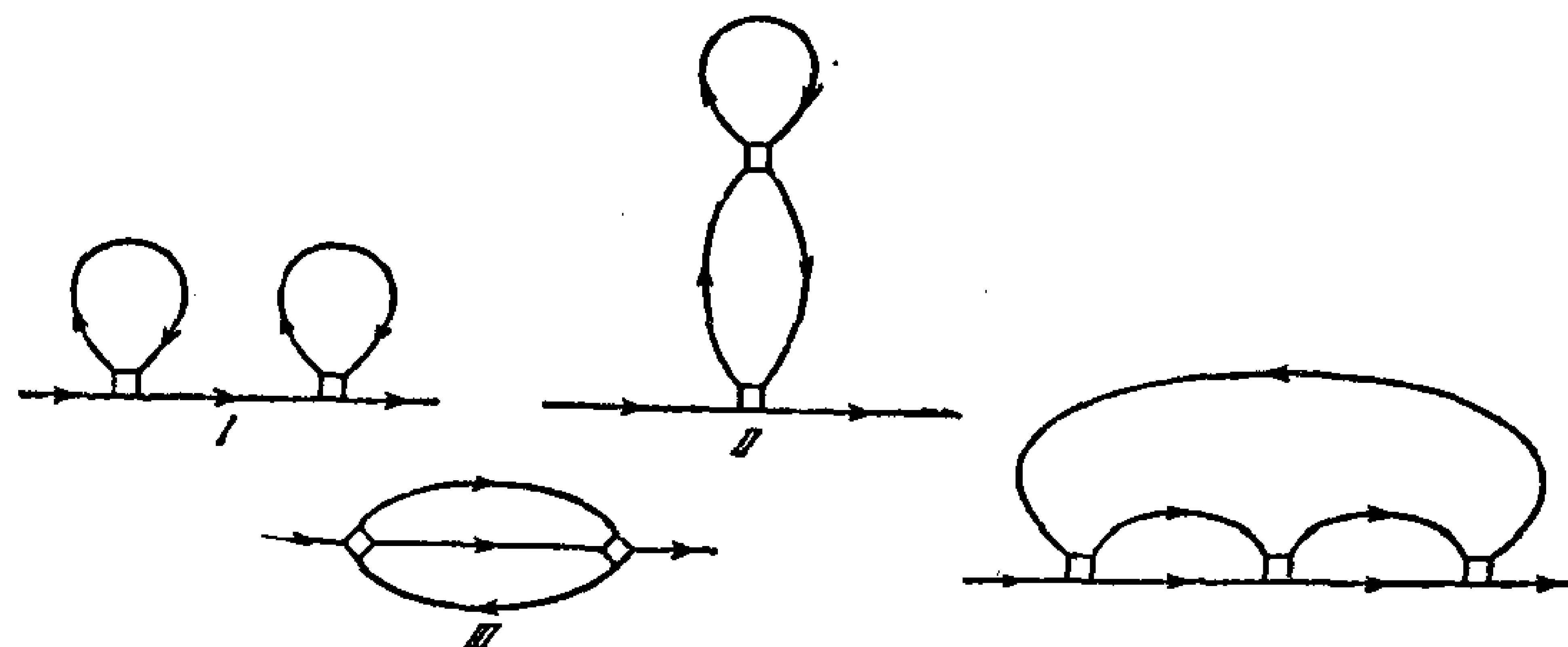



图 36　　　　图 37

利用这些規則,不难写出对应图37的表达式：

$$\mp\frac{1}{4}\int d^4z_1\cdots d^4z_{12}\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-z_1)\mathcal{T}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2;\gamma_3\gamma_4}(z_1,z_2;z_3,z_4)\times$$
$$\times\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_3\gamma_5}(z_3-z_5)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_4\gamma_6}(z_4-z_6)\mathcal{T}^{(0)}_{\gamma_5\gamma_6;\gamma_7\gamma_8}(z_5,z_6;z_7,z_8)\times$$
$$\times\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_7\gamma_9}(z_7-z_9)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_8\gamma_{10}}(z_8-z_{10})\times$$
$$\times\mathcal{T}^{(0)}_{\gamma_9\gamma_{10};\gamma_{11}\gamma_{12}}(z_9,z_{10};z_{11},z_{12})\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_{12}\beta}(z_{12}-y)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_{11}\gamma_2}(z_{11}-z_2).$$

如果我們考慮由势

$$U_{\alpha\beta;\gamma\delta}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)=\lambda\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$$

描述的点相互作用,則以上方法中出現的庞杂表达式(其复杂性自

然部分地为对称性补偿)可大为簡化．这时函数 $\mathcal{J}^{(0)}$ 的形状簡单：

$$\mathcal{J}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2;\gamma_3\gamma_4} = \lambda(\delta_{\gamma_1\gamma_3}\delta_{\gamma_2\gamma_4}-\delta_{\gamma_1\gamma_4}\delta_{\gamma_2\gamma_3})\delta(z_1-z_2)\delta(z_1-z_3)\delta(z_1-z_4)=$$

$$= \lambda L_{\gamma_1\gamma_2;\gamma_3\gamma_4}\delta(z_1-z_2)\delta(z_1-z_3)\delta(z_1-z_4).$$

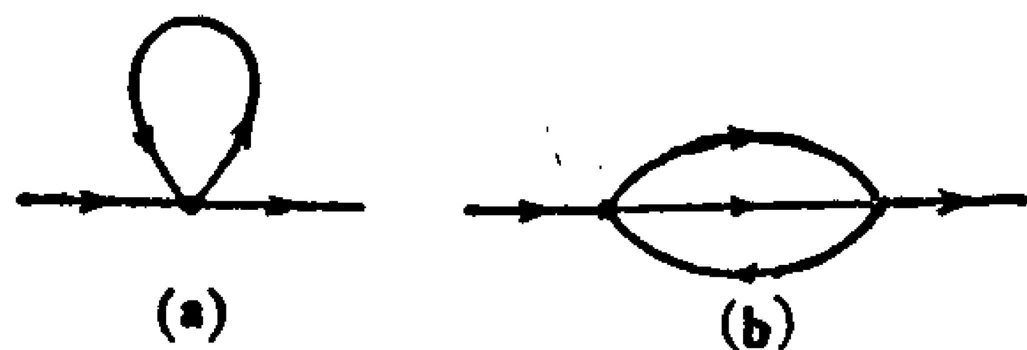


图 38

由于 $\mathcal{J}^{(0)}$ 中有三个 $\delta$ 函数，各修正項中四角形頂点的四个积分只剩下一个．因而图形中的四角形可换成簡单的点（頂点）．例如，图 35II 和图 36III 最好画成图 38 所示的那样；相应的修正項也簡化为：

$$-\lambda L_{\gamma_1\gamma_2;\gamma_3\gamma_4}\int d^4z\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-z)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_4\beta}(z-y)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_3\gamma_2}(0), \qquad (a)$$

$$\frac{\lambda^2}{2}L_{\gamma_1\gamma_2;\gamma_3\gamma_4}L_{\gamma_5\gamma_6;\gamma_7\gamma_8}\int d^4z_1d^4z_2\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-z_1)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_3\gamma_5}(z_1-z_2)\times$$

$$\times\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_4\gamma_6}(z_1-z_2)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_7\gamma_2}(z_2-z_1)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_8\beta}(z_2-y). \qquad (b)$$

由上面討論看出，这种图解法中的一般計算規則是很明显的．

B. 粒子和声子的相互作用．

粒子和声子的相互作用(例如液体粒子和声波的相互作用，或者金属中电子和晶格振动的相互作用)由以下哈密頓量描述

$$\hat{H}_{int}(\tau) = g\int\bar{\psi}_\alpha(\boldsymbol{r},\tau)\psi_\alpha(\boldsymbol{r},\tau)\varphi(\boldsymbol{r},\tau)d\boldsymbol{r},$$

其中 $g$ 是相互作用常数．

容易証明，仅在微扰論偶次近似下对粒子格林函数 $\mathfrak{G}$ 或声子格林函数 $\mathfrak{D}$ 的修正項才不等于零．（奇次修正項的表达式中包含奇数个声子算符 $\varphi$）．直接計算粒子格林函数 $\mathfrak{G}$ 的修正項，可証实它們与双粒子相互作用微扰論第一种方案中 $\mathfrak{G}$ 的修正項完全相同，只須将后者的位势 $\mathfrak{V}(z_1-z_2)$ 换成 $g^2\mathfrak{D}^{(0)}(z_1-z_2)$．自然相应的修正項也由图 33 和图 34 上的那些图形描述．我們为确定起見，不用波紋綫，而用虛綫代表声子格林函数 $\mathfrak{D}^{(0)}$．

声子格林函数的二級修正項由两个相連图形描述(图 39，(a) 和(b))．計算表明，图 39(a) 的修正項是



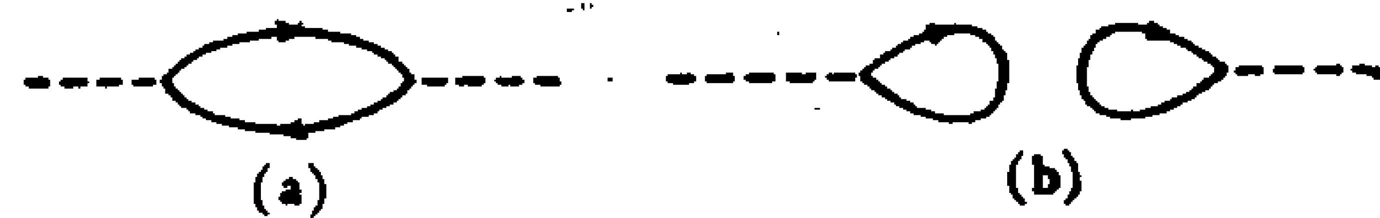


图 39

$$\pm g^2\int d^4z_1d^4z_2\mathfrak{D}^{(0)}(x-z_1)\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\beta}(z_1-z_2)\mathfrak{G}^{(0)}_{\beta\alpha}(z_2-z_1)\mathfrak{D}^{(0)}(z_2-y)$$

而图 39(b) 为：

$$g^2\int d^4z_1\mathfrak{D}^{(0)}(x-z_1)\mathfrak{G}_{\alpha\alpha}(0)\int d^4z_2\mathfrak{D}^{(0)}(z_2-y)\mathfrak{G}_{\beta\beta}(0).$$

和 §9 中一样，可証明图 39(b) 所代表的式子等于零．基于同样的理由，可以根本不考虑表达式中出现积分 $\int\mathfrak{D}^{(0)}(z)d^4z$ 的图形．这包括一切分解成两个不相連部分、而每部分有一条外綫的 $\mathfrak{D}$ 的图形，以及类似图 40 的 $\mathfrak{G}$ 的图形（后者一定含有无外綫而与图形其它部分以一条声子綫相連的部分）．

討論对 $\mathfrak{D}$ 的高級修正，并注意 $\mathfrak{G}$ 的上述特点，就可以列举出以下計算 $2n$ 級近似的图解法规则：

（1）每条实綫代表自由粒子格林函数 $\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\beta}(x-y)$，每条虛綫代表函数 $\mathfrak{D}^{(0)}(x-y)$；

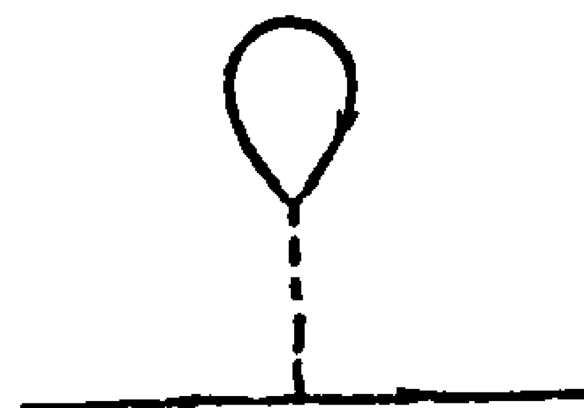


图 40



图 41

（2）对所有頂点的坐标($\boldsymbol{r}$ 和 $\tau$)积分；

（3）所得表达式乘以 $g^{2n}(-1)^{n+F}$，其中 $F$ 是图中封閉費米环数目．

例如，由图 41 描述的对声子格林函数的四級修正項为：

$$\mp g^4\int d^4z_1\cdots d^4z_4\mathfrak{D}^{(0)}(x-z_1)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(z_1-z_2)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_3\gamma_1}(z_3-z_1)\times$$

$$\times \mathfrak{D}^{(0)}(z_2 - z_3)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_2\gamma_4}(z_2 - z_4)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_4\gamma_3}(z_4 - z_3)\mathfrak{D}^{(0)}(z_4 - y).$$

## §14. 动量空間中的图解法

**1. 动量表象.** 在进行具体計算时，前节所述的坐标表象中的图解法頗为不便. 在絕对温度零度下量子場論方法之所以成功，基本上是因为将理論中各量按四維坐标展成傅立叶积分之后，計算就在很大程度上"自动化"了. 上述松原方法中沒有这种自动化，原因是方法中的变量 $\tau$ 在从零到 $1/T$ 的有限区間內变化，不可能按 $\tau$ 变到傅立叶表象.

在坐标表象中 $\mathfrak{G}^{(0)}$ 和 $\mathfrak{D}^{(0)}$ 是变量 $\tau$ 的不連續函数；所有对 $\tau$ 的积分事实上分成許多区間，其数目随近似的級別 $n$ 的增加而迅速增大. 这就使松原方法难以应用.

如果将与 $\tau$ 有关的量展成此变量的傅立叶級数，整个方法可以大为改进(Абрикосов,Горьков, Дзялошинский[31],Фрадкин[32]).

温度格林函数 $\mathfrak{G}$ (或 $\mathfrak{D}$)是差 $\tau_1 - \tau_2$ 的函数，因而給定在区間$\left(-\frac{1}{T}, \frac{1}{T}\right)$上. 将$\mathfrak{G}(\tau)$展成傅立叶級数:

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}(\tau) &= T\sum_n e^{-i\omega_n\tau}\mathfrak{G}(\omega_n), \\ \mathfrak{G}(\omega_n) &= \frac{1}{2}\int_{-1/T}^{1/T} e^{i\omega_n\tau}\mathfrak{G}(\tau)d\tau, \quad \omega_n = \pi n T. \end{aligned} \tag{14.1}$$

我們的任务是在 §13 所得的格林函数修正項表达式中，变换到傅立叶表象. 这时当然期望变换本身，不为公式带来附加的复杂化(例如不出現与"頻率" $\omega_n$ 有关的附加因子等等).

实际上温度大于零时，我們遇到的情况仍和 $T=0$ 时一样. 这与 §11 中指出的格林函数的一个普遍性質有关. 那里証明，$\tau<0$时的 $\mathfrak{G}(\tau)$ 和 $\tau>0$ 时的 $\mathfrak{G}(\tau)$ 以簡单关系相联系(見(11.8)和(11.8a)式). 由这些关系式得出，玻色粒子和声子格林函数的傅立叶分量 $\mathfrak{G}(\omega_n)$ 只对于偶頻率不为零 $\omega_n = 2\pi nT$，而費米粒子的 $\mathfrak{G}$ 只有



$$\omega_n = (2n+1)\pi T$$

的分量. 实际上

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}(\omega_n) &= \frac{1}{2}\int_{-1/T}^{1/T} e^{i\omega_n\tau}\mathfrak{G}(\tau)d\tau = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{1/T} e^{i\omega_n\tau}\mathfrak{G}(\tau)d\tau + \frac{1}{2}\int_{-1/T}^0 e^{i\omega_n\tau}\mathfrak{G}(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

在第二个积分中将 $\mathfrak{G}(\tau<0)$ 通过(11.8)式表达，并作变量代換 $\tau' = \tau + \frac{1}{T}$,就有:

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}(\omega_n) &= \frac{1}{2}\int_0^{1/T} e^{i\omega_n\tau}\mathfrak{G}(\tau)d\tau \mp \frac{1}{2}\int_{-1/T}^0 e^{i\omega_n\tau}\mathfrak{G}\left(\tau+\frac{1}{T}\right)d\tau = \\ &= \frac{1}{2}\left(1\mp e^{-i\omega_n/T}\right)\int_0^{1/T} e^{i\omega_n\tau}\mathfrak{G}(\tau)d\tau, \end{aligned}$$

由此立即得出上述論断. 注意我們总有

$$\mathfrak{G}(\omega_n) = \int_0^{1/T} e^{i\omega_n\tau}\mathfrak{G}(\tau)d\tau, \tag{14.2}$$

$$\omega_n = \begin{cases} (2n+1)\pi T & \text{对費米粒子} \\ 2n\pi T & \text{对玻色粒子.} \end{cases}$$

在微扰論級数各項中完成傅立叶变換，为此須将相应量按(14.1)展成傅立叶級数并代入之. 此外我們同时完成对空間变量的傅立叶变换:

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}}\mathfrak{G}(\boldsymbol{p})d\boldsymbol{p}, \\ \mathfrak{G}(\boldsymbol{p}) &= \int e^{-i\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}}\mathfrak{G}(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}. \end{aligned} \tag{14.3}$$

对空間变量的变换和 $T=0$ 时完全相同.

注意在每个須进行坐标积分的頂点，总有偶数条費米綫出入，因而每个頂点对时間变量的积分

$$\int_0^{1/T} d\tau e^{i\tau\Sigma\omega_n} \tag{14.4}$$

中指数上"頻率"之和 $\Sigma\omega_n$ 总是"偶数": $\Sigma\omega_n = 2N\pi T$($N$—整数). 对于偶頻率积分(14.4)等于

$$\frac{1}{T}\delta_{\Sigma\omega_n}, \quad \delta_{\omega_n} = \begin{cases} 1, & \omega_n = 0, \\ 0, & \omega_n \neq 0. \end{cases} \tag{14.5}$$

由此可見，这里情形实质上和 $T=0$ 时一样．那里对頂点坐标和时間的积分，給出頻率和动量的 $\delta$ 函数，它們表示虚过程中能量与动量的守恆律．$T \neq 0$ 时頻率的 $\delta$ 函数换成克罗尼克(Kronecker)符号 $\delta_{\omega_n}$，它表示不連續“頻率”的守恆律．

綜上所述，可以保留我們在 $T=0$ 时所采用的普通費曼图来描述动量空間中的微扰論級数．唯一的实质性的区別(除了系数的差别外)是矩陣元表达式中对頻率 $\omega$ 的积分换成对間断頻率 $\omega_n$ 的求和．

在轉向具体例子之前，我們先給出零級格林函数傅立叶分量的表达式．§11 中我們計算了坐标空間中的零級格林函数．根据(11.13a)式，自由費米粒子格林函数在按(14.3)式对坐标完成傅立叶变换后，当 $\tau > 0$ 时为：

$$\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{p}, \tau) = -\delta_{\alpha\beta}(1-n(\boldsymbol{p}))e^{-\tau(\varepsilon_0(\boldsymbol{p})-\mu)},$$

$$n(\boldsymbol{p}) = [e^{(\varepsilon_0(\boldsymbol{p})-\mu)/T}+1]^{-1}.$$

将此式代入(14.2)式，就有($\omega_n = (2n+1)\pi T$)：

$$\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{p}, \omega_n) = -\delta_{\alpha\beta}(1-n(\boldsymbol{p}))\int_0^{1/T} e^{i\omega_n\tau-\tau(\varepsilon_0(\boldsymbol{p})-\mu)}d\tau =$$

$$= -\frac{\delta_{\alpha\beta}}{i\omega_n - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}) + \mu}(1-n(\boldsymbol{p}))\{e^{(2n+1)\pi i-(\varepsilon_0(\boldsymbol{p})-\mu)/T}-1\},$$

即最終为

$$\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{p}, \omega_n) = \delta_{\alpha\beta}\frac{1}{i\omega_n - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}) + \mu}, \omega_n = (2n+1)\pi T. \tag{14.6}$$

类似的計算为玻色粒子給出

$$\mathfrak{G}^{(0)}(\boldsymbol{p}, \omega_n) = \frac{1}{i\omega_n - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}) + \mu}, \quad \omega_n = 2\pi nT, \tag{14.7}$$

而对声子：

$$\mathfrak{D}^{(0)}(\boldsymbol{k}, \omega_n) = -\frac{\omega_0^2(\boldsymbol{k})}{\omega_n^2 + \omega_0^2(\boldsymbol{k})}, \quad \omega_n = 2\pi nT. \tag{14.8}$$

这样，費米和玻色粒子零級格林函数的差别，只在于頻率 $\omega_n$



的奇偶不同．在 $T=0$ 时的格林函数公式(7.7)，(7.16)中作代換 $\omega \to i\omega_n$，就得到函数(14.6)——(14.8)式．以后我們要証明，在准确格林函数之間，也存在类似关系(当然，有一些附带条件)．

**2. 举例．** 我們已經証明，温度格林函数的計算可以在动量空間中按費曼图解法进行．費曼图上每条綫代表粒子零級格林函数 $\mathfrak{G}^{(0)}(\boldsymbol{p}, \omega_n)$ 或声子格林函数 $\mathfrak{D}^{(0)}(\boldsymbol{k}, \omega_n)$，而每个頂点对应 $\delta(\Sigma_{\boldsymbol{p}})\delta_{\Sigma\omega_n}$，它代表动量和不連續“頻率”$\omega_n$ 的守恆律．对所有內綫的动量积分，对“頻率”$\omega_n$ 求和．

图形和相应表达式的实际形状視相互作用的类型而定．我們从双粒子相互作用开始討論．

A．双粒子相互作用．

考慮图 33.IV 对格林函数的修正．在 §13 中我們得出了它的表达式：

$$-\iint d^4z_1 d^4z_2 \mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-z_1)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(z_1-z_2)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_2\beta}(z_2-y)\mathfrak{V}(z_1-z_2).$$

对坐标和“时間”$\tau$ 完成傅立叶变换：

$$\delta\mathfrak{G}^{(1)}(\boldsymbol{p}, \omega_n) = \frac{1}{2}\int d(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \times$$

$$\times \int_{-1/T}^{1/T} d(\tau_x - \tau_y)\delta\mathfrak{G}^{(1)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, \tau_x-\tau_y)e^{-i\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})+i\omega_n(\tau_x-\tau_y)}.$$

引入势 $\mathfrak{V}(z_1-z_2)$ 的傅立叶分量：

$$\mathfrak{V}(\boldsymbol{r}, \tau) = \frac{T}{(2\pi)^3}\sum_{\omega_n}\int d\boldsymbol{q}e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}-i\omega_n\tau}\mathfrak{V}(\boldsymbol{q}, \omega_n).$$

由于

$$T\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi inT\tau} = \delta(\tau),$$

$$\mathfrak{V}(\boldsymbol{q}, \omega_n) = U(\boldsymbol{q}),$$

就有

$$\delta\mathfrak{G}^{(1)}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{p}, \omega_n) = -\frac{1}{2}\sum_{\substack{\omega_{n1}, \omega_{n2} \\ \omega_{n3}, \omega_{n4}}}\int d\boldsymbol{p}_1 d\boldsymbol{p}_2 d\boldsymbol{p}_3 d\boldsymbol{p}_4 \times$$

$$\times \left[\frac{T}{(2\pi)^3}\right]^4 \mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(\boldsymbol{p}_1, \omega_{n1})\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(\boldsymbol{p}_2, \omega_{n2}) \times$$

$$\times \mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_2\beta}(\boldsymbol{p}_3, \omega_{n3})\mathfrak{V}(\boldsymbol{q}, \omega_{n4})\int d(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})d\boldsymbol{z}_1 d\boldsymbol{z}_2 \times$$
$$\times \int d(\tau_x - \tau_y)d\tau_1 d\tau_2 e^{-i\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}e^{i\omega_n(\tau_x-\tau_y)} \times$$
$$\times e^{i\boldsymbol{p}_1(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_1)+i\boldsymbol{p}_2(\boldsymbol{z}_1-\boldsymbol{z}_2)+i\boldsymbol{p}_3(\boldsymbol{z}_2-\boldsymbol{y})}e^{-i\omega_{n1}(\tau_x-\tau_1)-i\omega_{n2}(\tau_1-\tau_2)} \times$$
$$\times e^{-i\omega_{n3}(\tau_2-\tau_y)}e^{i\boldsymbol{q}(\boldsymbol{z}_1-\boldsymbol{z}_2)-i\omega_{n4}(\tau_1-\tau_2)}.$$

在对空間和时間的积分中作变量代换 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{x}$, $\tau_x-\tau_y\to\tau_x$. 这时得到:

$$\frac{1}{2}\int d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{z}_1 d\boldsymbol{z}_2\int_{-1/T}^{1/T} d\tau \times$$
$$\times \int_0^{1/T}\int_0^{1/T} d\tau_1 d\tau_2 e^{i\boldsymbol{x}(-\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}_1)+i\boldsymbol{z}_1(-\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{q})+i\boldsymbol{z}_2(-\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_3-\boldsymbol{q})} \times$$
$$\times e^{i\tau(\omega_n-\omega_{n1})+i\tau_1(\omega_{n1}-\omega_{n2}-\omega_{n4})+i\tau_2(\omega_{n2}-\omega_{n3}+\omega_{n4})} \times$$
$$\times e^{i\boldsymbol{y}(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_3)+i\tau_y(-\omega_{n1}+\omega_{n3})} =$$
$$=\left(\frac{(2\pi)^3}{T}\right)^3\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_1)\delta(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{q})\delta(\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_3+\boldsymbol{q}) \times$$
$$\times \delta_{\omega_n-\omega_{n1}}\delta_{\omega_{n1}-\omega_{n2}-\omega_{n4}}\delta_{\omega_{n2}-\omega_{n3}+\omega_{n4}},$$

从而

$$\delta\mathfrak{G}^{(1)}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{p},\omega_n) = -\frac{T}{(2\pi)^3}\sum_{\omega_{n1}}\int d\boldsymbol{p}_1\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(\boldsymbol{p},\omega_n)\times$$
$$\times \mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(\boldsymbol{p}_1,\omega_{n1})\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_2\beta}(\boldsymbol{p},\omega_n)\mathfrak{V}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_1,\omega_n-\omega_{n1}).$$

代入零級格林函数的表达式(14.6), (14.7), 最終得:

$$\delta\mathfrak{G}^{(1)}_{\alpha\beta} = -\frac{\delta_{\alpha\beta}}{[i\omega_n-\varepsilon_0(\boldsymbol{p})+\mu]^2}\frac{T}{(2\pi)^3}\sum_{\omega_{n1}}\int d\boldsymbol{p}_1\times$$
$$\times\frac{\mathfrak{V}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_1,\omega_n-\omega_{n1})}{i\omega_{n1}-\varepsilon_0(\boldsymbol{p}_1)+\mu}. \qquad (14.9)$$

类似的計算給出图 33, III 的貢献为:

$$\pm\frac{\delta_{\alpha\beta}}{(i\omega_n-\varepsilon_0(\boldsymbol{p})+\mu)^2}\mathfrak{V}(0,0)(2s+1)\frac{T}{(2\pi)^3}\times$$
$$\times\sum_{\omega_{n1}}\int d\boldsymbol{p}_1\frac{e^{i\omega_{n1}\tau}}{i\omega_{n1}-\varepsilon_0(\boldsymbol{p}_1)+\mu}, \qquad (14.10)$$

其中 $\tau\to0$, $s$ 为粒子自旋; 費米粒子 $s=1/2$, 玻色粒子 $s=0$.



我們在求和符号下引入了 $e^{i\omega_n\tau}(\tau\to+0)$, 是根据 §13 中提到的条件, 即时間变量重合时坐标空間中的 $\mathfrak{G}$ 函数定义为:

$$\mathfrak{G}^{(0)}(0,0) = \lim_{\tau\to+0}\mathfrak{G}^{(0)}(0,-\tau).$$

表达式 (14.9), (14.10) 和图 42(a), (b) 所示的费曼图对应. 这些图的外綫带有外动量和頻率—— $\boldsymbol{p}$, $\omega_n$; 每个頂点的动量和頻率滿足守恆律: "出来"的动量之和等于"进入"的动量之和.

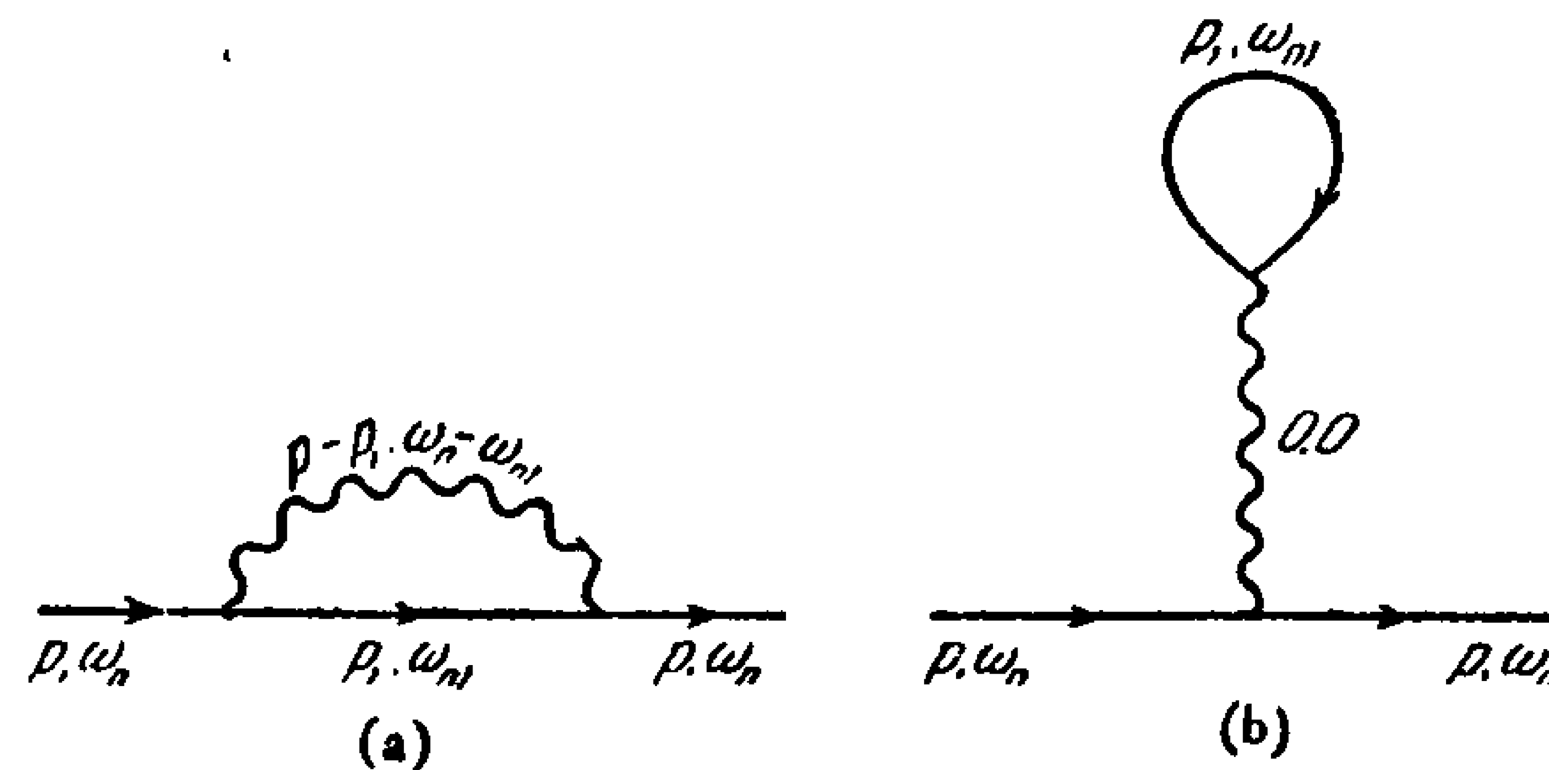



图 42

討論 $\mathfrak{G}(\boldsymbol{p},\omega_n)$ 的微扰論任意 $k$ 級图. 这个图形有 $2k$ 个頂点, $2k+1$ 条实綫和 $k$ 条波紋綫. 完成傅立叶变换时, 要对 $2k$ 个頂点的坐标和"时間"积分, 并对外端坐标之差积分一次, 結果出現 $2k+1$ 个如 $\delta(\sum\boldsymbol{p})\delta_{\Sigma\omega_n}$ 的量, 它們代表 $2k+1$ 个守恆律. 容易看出, 两个守恆律保証外綫的动量为 $\boldsymbol{p}$、頻率为 $\omega_n$. 剩下的 $2k-1$ 个守恆律使原来对內綫动量与頻率的 $3k-1$ 次积分与求和 (包括实綫和波紋綫) 事实上只留下 $k$ 次.

現在列举按格林函数一定图形写表达式的規則.

(1) 首先应給每条綫标出动量与頻率; 外綫应带有外动量与頻率, 而內綫的动量与頻率应在每个頂点滿足守恆律 $\Sigma\boldsymbol{p}'=0$, $\Sigma\omega_n'=0$. 玻色綫的頻率总是偶数($\omega_n=2n\pi T$), 費米綫的頻率总是奇数($\omega_n=(2n+1)\pi T$).

(2) 对图中所有相互独立的頻率和动量求和与积分.

(3) 每条內实綫(动量和頻率为 $\boldsymbol{p}'$, $\omega_n'$)代表

$$\frac{1}{i\omega_n' - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}') + \mu},$$

每条波紋綫($\boldsymbol{q}$, $\omega_n'$)代表

$$\mathfrak{V}(\boldsymbol{q}, \omega_n') \equiv U(\boldsymbol{q}).$$

(4) 两条外綫(动量和頻率 $\boldsymbol{p}$, $\omega_n$)代表

$$\frac{\delta_{\alpha\beta}}{(i\omega_n - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}) + \mu)^2}.$$

(5) 所得表达式前加因子

$$(-1)^k \frac{T^k}{(2\pi)^{3k}} (2s+1)^F (\mp 1)^F,$$

其中 $F$ 是粒子綫所构成的封閉环数.

利用这些規則,不难写出相应于任何复杂图形的修正項. 例如,图 43 的貢献为:

$$\pm \frac{\delta_{\alpha\beta}}{(i\omega - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}) + \mu)^2} \frac{T^3}{(2\pi)^9} (2s+1) \sum_{\omega_1, \omega_2, \omega_3} \int d\boldsymbol{p}_1 d\boldsymbol{p}_2 d\boldsymbol{p}_3 \times$$

$$\times \frac{1}{i(\omega - \omega_1) - \varepsilon_0(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_1) + \mu} \frac{1}{i(\omega_3 - \omega_1) - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}_3 - \boldsymbol{p}_1) + \mu} \times$$

$$\times \frac{1}{i\omega_3 - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}_3) + \mu} \frac{1}{i\omega_2 - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}_2) + \mu} \times$$

$$\times \frac{1}{i(\omega_1 + \omega_2) - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2) + \mu} (U(\boldsymbol{p}_1))^2 U(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_3),$$

$$\omega_1 = 2\pi n T; \ \omega_2, \omega_3 = (2n+1)\pi T.$$

現在討論双粒子相互作用图解法的第二种方案. 在各表达式中变换到傅立叶表象时,宜采用以下的形式作法.

前面已引入了量 $\mathcal{J}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2;\gamma_3\gamma_4}(z_1, z_2; z_3, z_4)$. 函数 $\mathcal{J}^{(0)}$ 和四个"时間" $\tau_i$ 有关, 每个时間都在区間 $\left(0, \frac{1}{T}\right)$ 内变化. 利用 $\mathfrak{G}$ 函数的 (11.8) 类型的关系:

$$\mathcal{J}^{(0)}(\tau_1 < 0, \tau_2; \tau_3, \tau_4) = \mp \mathcal{J}^{(0)}(\tau_1 + 1/T, \tau_2; \tau_3, \tau_4)$$

(对 $\tau_2, \tau_3, \tau_4$ 存在类似关系) 将函数 $\mathcal{J}^{(0)}$ 延拓到区間 $\left(-\frac{1}{T}, \frac{1}{T}\right)$ 上. 将傅立叶变换定义为:



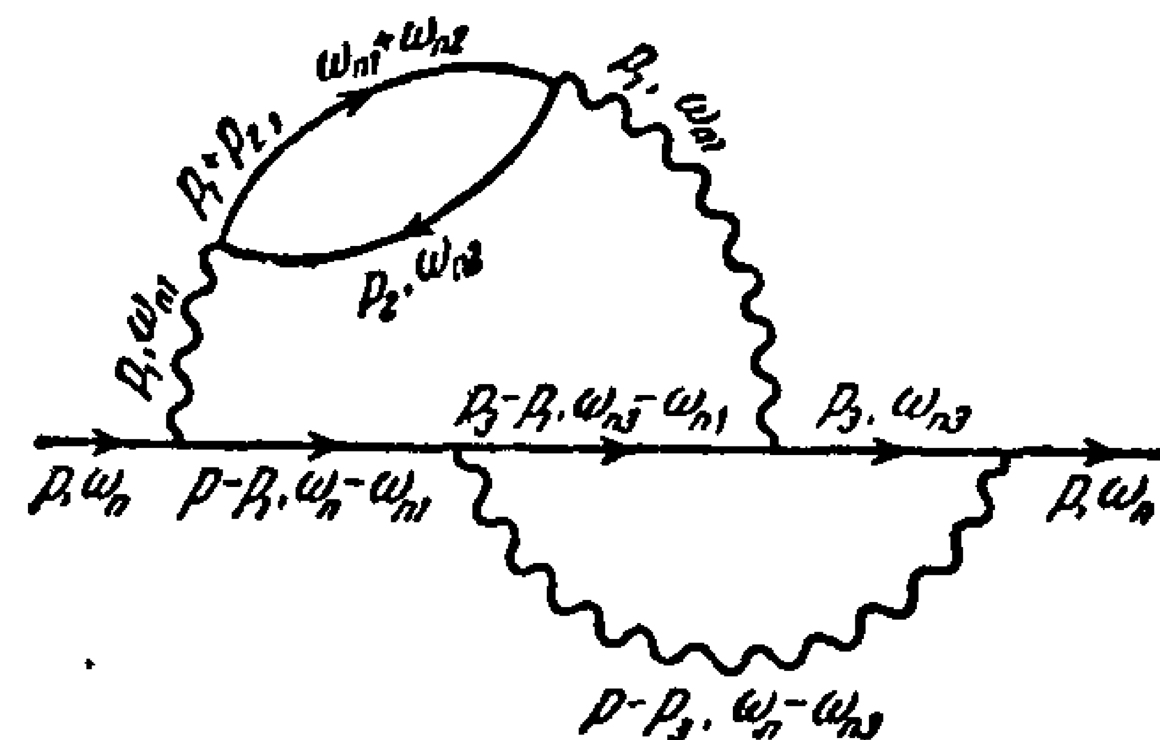



图 43

$$\frac{1}{16} \int_{-1/T}^{1/T} d\tau_1 \cdots d\tau_4 e^{i(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2 - \omega_3\tau_3 - \omega_4\tau_4)} \mathcal{J}^{(0)}(\tau_1, \tau_2; \tau_3, \tau_4).$$

显然对于費米統計所有四个頻率都是"奇数",而对玻色統計是"偶数".

其次要注意,既然 $\mathcal{J}^{(0)}(z_1, z_2; z_3, z_4)$ 根据定义只是坐标和"时間" $\tau$ 之差的函数,则 $\mathcal{J}^{(0)}$ 对空間和时間变量的傅立叶分量将含有与动量之和有关的 $\delta$ 函数——$\delta(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_3 - \boldsymbol{p}_4)$, 以及与頻率之和有关的克罗尼克符号 $\delta_{\omega_1+\omega_2-\omega_3-\omega_4}$. 因此我們直接将傅立叶分量 $\mathcal{J}^{(0)}$ 定义为:

$$\frac{(2\pi)^3}{T} \delta(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_3 - \boldsymbol{p}_4) \delta_{\omega_1+\omega_2-\omega_3-\omega_4} \times$$

$$\times \mathcal{J}^{(0)}(\boldsymbol{p}_1\omega_1, \boldsymbol{p}_2\omega_2; \boldsymbol{p}_3\omega_3, \boldsymbol{p}_4\omega_4) = \frac{1}{16} \int_{-1/T}^{1/T} d\tau_1 \cdots d\tau_4 \times$$

$$\times \int d\boldsymbol{r}_1 \cdots d\boldsymbol{r}_4 e^{-i(\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{p}_2\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{p}_3\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{p}_4\boldsymbol{r}_4) + i(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2 - \omega_3\tau_3 - \omega_4\tau_4)} \times$$

$$\times \mathcal{J}^{(0)}(z_1, z_2; z_3, z_4) \tag{14.11}$$

試以图 35, II 所示的一級修正項为例. 在相应表达式中完成傅立叶变换,并作簡单运算,就得:

$$-\frac{1}{(i\omega - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}) + \mu)^2} \frac{T}{(2\pi)^3} \times$$

$$\times \sum_{\omega_1} \int d\boldsymbol{p}_1 \mathcal{J}^{(0)}_{\alpha\gamma;\gamma\beta}(\boldsymbol{p}, \omega; \boldsymbol{p}_1, \omega_1; \boldsymbol{p}_1, \omega_1; \boldsymbol{p}, \omega) \frac{1}{i\omega_1 - \varepsilon_0(p_1) + \mu},$$

它对应图 44.

类似的計算为图 45 所示的修正項給出公式[1]:

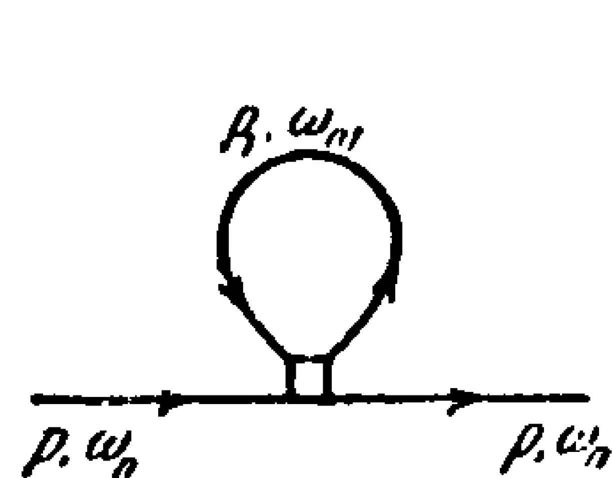


图 44

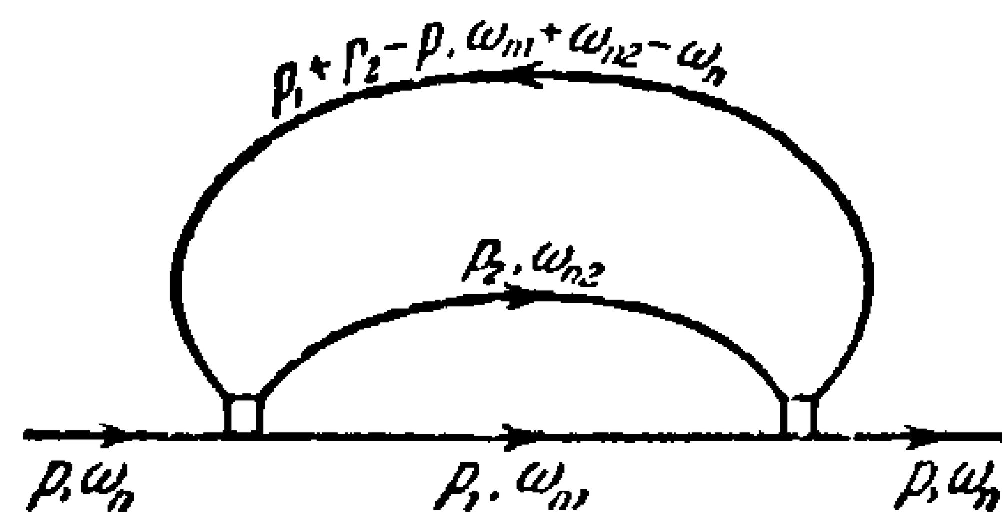


图 45

$$\frac{1}{2} \frac{1}{(i\omega - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}) + \mu)^2} \frac{T^2}{(2\pi)^6} \times$$

$$\times \sum_{\omega_1\omega_2} \int d\boldsymbol{p}_1 d\boldsymbol{p}_2 \mathcal{J}^{(0)}_{\alpha\gamma_1;\gamma_2\gamma_3}(p, p_1 + p_2 - p; p_1, p_2) \times$$

$$\times \frac{1}{i\omega_1 - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}_1) + \mu} \frac{1}{i\omega_2 - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}_2) + \mu} \times$$

$$\times \frac{1}{i(\omega_1 + \omega_2 - \omega) - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}) + \mu}$$

$$\times \mathcal{J}^{(0)}_{\gamma_2\gamma_3;\gamma_1\beta}(p_1, p_2; p_1 + p_2 - p, p).$$

$\mathfrak{G}$ 函数的 $n$ 級图含有 $n$ 个四角形(頂点)和 $2n+1$ 条綫；其中 $2n-1$ 条内綫在每个頂点以守恆律 $\Sigma \boldsymbol{p}' = 0$, $\Sigma \omega'_n = 0$ 相联系. 不难驗証，对内綫的动量和頻率只有 $n$ 个相互独立积分与求和. 在計算任意图形的貢献时，需要:

(1) 令每条内綫对应

$$\frac{1}{i\omega' - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}') + \mu};$$

(2) 令每条外綫对应

$$\frac{1}{i\omega - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}) + \mu};$$

1) 这里我們采用四維記号 $p = (\boldsymbol{p}, \omega_n)$.



(3) 令每个頂点对应

$$\mathcal{J}^{(0)}_{\alpha\beta;\gamma\delta}(p_1, p_2; p_3, p_1 + p_2 - p_3);$$

(4) 对所有相互独立的内动量与頻率求积分与求和;

(5) 对以 $\mathfrak{G}^{(0)}$ 綫相連的函数 $\mathcal{J}^{(0)}$ 的足标 $\alpha, \beta, \cdots$ 求和;

(6) 計算結果乘以 $\frac{T^n}{(2\pi)^{3n}} A_n$ (关于 $A_n$ 見 §13).

例如，图 46 对应表达式:

$$-\frac{1}{4} \frac{1}{(i\omega - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}) + \mu)^2} \frac{T^3}{(2\pi)^9} \times$$

$$\times \sum_{\omega_1\omega_2\omega_3} \int d\boldsymbol{p}_1 d\boldsymbol{p}_2 d\boldsymbol{p}_3 \mathcal{J}^{(0)}_{\alpha\gamma_1;\gamma_2\gamma_3}(p, p_1 + p_2 - p; p_1, p_2) \times$$

$$\times \frac{1}{i\omega_1 - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}_1) + \mu} \frac{1}{i\omega_2 - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}_2) + \mu} \times$$

$$\times \mathcal{J}^{(0)}_{\gamma_2\gamma_3;\gamma_4\gamma_5}(p_1, p_2; p_3, p_1 + p_2 - p_3) \frac{1}{i\omega_3 - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}_3) + \mu} \times$$

$$\times \frac{1}{i(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3) - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_3) + \mu} \times$$

$$\times \mathcal{J}^{(0)}_{\gamma_4\gamma_5;\gamma_1\beta}(p_3, p_1 + p_2 - p_3; p_1 + p_2 - p, p) \times$$

$$\times \frac{1}{i(\omega_1 + \omega_2 - \omega) - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}) + \mu}.$$

对于点相互作用函数 $\mathcal{J}^{(0)}$ 与动量和頻率无关.

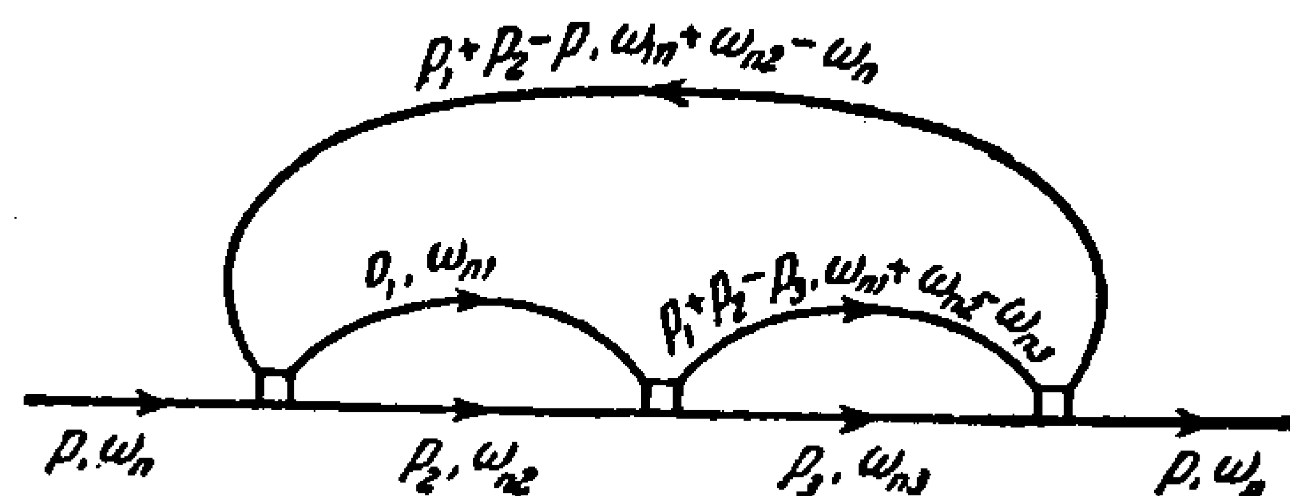


图 46

B. 与声子的相互作用.

在与声子相互作用情况下，只有偶級图才不等于零. 任何 $2n$ 級图含有 $3n+1$ 条(电子和声子)内綫，以及 $2n$ 个頂点，这相当于

$$3n-1-(2n-1)=n$$

次独立积分．在計算它的貢献时須：

(1) 令每条內实綫对应

$$\frac{1}{i\omega'-\varepsilon_0(\boldsymbol{p}')+\mu},$$

而两条外实綫(在 $\mathfrak{G}$ 函数修正項的图中)对应

$$\frac{\delta_{\alpha\beta}}{(i\omega-\varepsilon_0(\boldsymbol{p})+\mu)^2};$$

(2) 令每条声子(虛)綫对应：

$$-\frac{\omega_0^2(\boldsymbol{k})}{\omega^2+\omega_0^2(\boldsymbol{k})};$$

(3) 計算結果乘以

$$g^{2n}\frac{T^n}{(2\pi)^{3n}}(-1)^n(2s+1)^F(\mp 1)^F,$$

其中 $g$ 为相互作用常数，$F$——图中封閉环数目，$s$——粒子的自旋．

例如，对应图 47 的声子 $\mathfrak{D}$ 函数二級修正項可写成：

$$\pm\left[\frac{\omega_0^2(\boldsymbol{k})}{\omega^2+\omega_0^2(\boldsymbol{k})}\right]^2 g^2(2s+1)\frac{T}{(2\pi)^3}\times$$
$$\times\sum_{\omega'}\int d\boldsymbol{p}'\frac{1}{i\omega'-\varepsilon_0(\boldsymbol{p}')+\mu}\times$$
$$\times\frac{1}{i(\omega'-\omega)-\varepsilon_0(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{k})+\mu}.$$

本节列举的規則和 $T=0$ 时計算格林函数修正項的相应規則有簡单关系．容易驗証，只須在 $T=0$ 时格林函数 $G$ 修正項的表达式中将所有頻率 $\omega$ 換成 $i\omega_n$(对玻色粒子 $\omega_n=2n\pi T$，費米粒子 $\omega_n=(2n+1)\pi T$)，并将对頻率的积分換成求和：

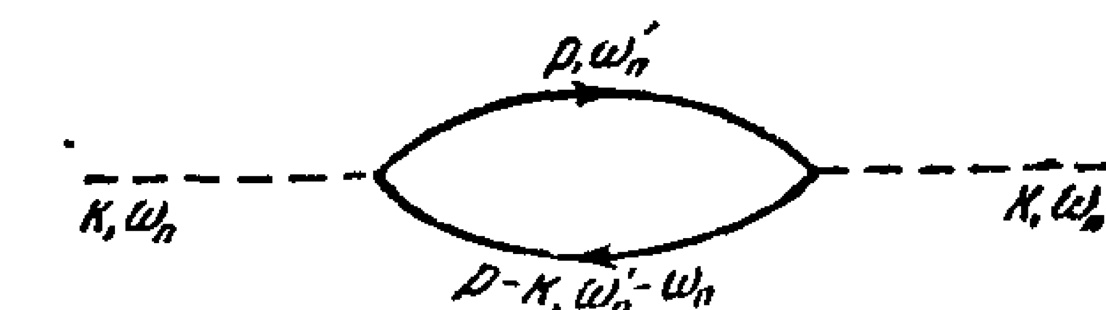



图 47

$$\int d\omega\cdots\to 2\pi Ti\sum_{\omega_n}\cdots$$

就可以得到对温度格林函数 $\mathfrak{G}$ 的修正項．

最后討論，上述方法如何过渡到 $T=0$ 的情形．当 $T$ 趋近零时对頻率的求和中大的 $n$ 起主要作用，因而这些和可換成积分．注意 $\Delta\omega=\omega_{n+1}-\omega_n=2\pi T$，就得到：

$$T\sum_{\omega_n}\to\frac{1}{2\pi}\int d\omega.$$

应強調指出，$T=0$ 时 $\mathfrak{G}(\omega)$ 决不和 $G(\omega)$ 重合．以后将确定它們之間的关系．

## §15. 热力学势 $\Omega$ 的微扰論級数

有时直接計算热力学势 $\Omega$，比先找格林函数，再求热力学量要方便．

热力学势的修正項通过 $\mathfrak{S}$ 矩陣的平均值表示(見(12.11))：

$$\Delta\Omega=-T\ln\langle\mathfrak{S}\rangle,$$
$$\mathfrak{S}=T_\tau\exp\left\{-\int_0^{1/T}\hat{H}_{int}(\tau)d\tau\right\}. \tag{15.1}$$

原来(15.1)式中的对数可以用一般形式写出；更确切些説，可以建立直接計算 $\Omega$ 的图解法．

从以前所述显而易見，描述 $\Omega$ 的微扰論級数的图形乃是封閉环．双粒子相互作用两种方案的典型图形示于图 48(a) 和(b)，与声子作用的图形示于图 49 (事实上图 49 I 的图形等于零)．

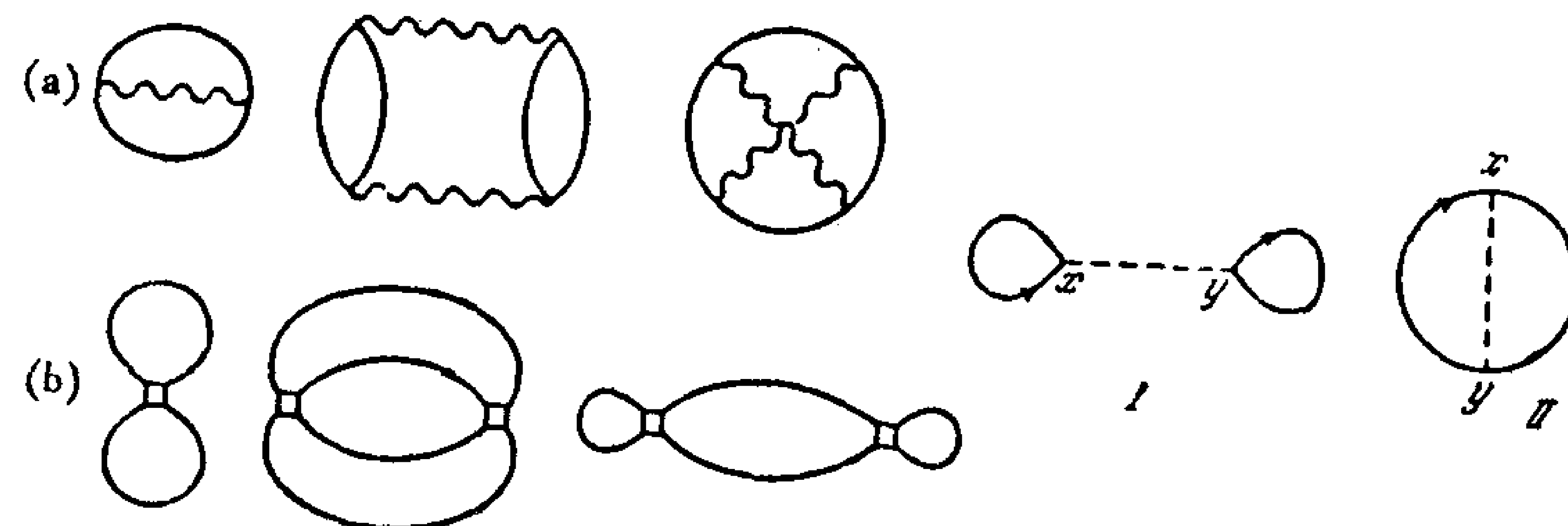



图 48　　图 49

微扰論一定級图形分为两类——相連和不相連图形．后者乃是两个或更多无任何綫相連的封閉环．如果按照維克定理将 $\langle\mathfrak{S}\rangle$

級数的任意項

$$\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{1/T}\cdots\int_0^{1/T} d\tau_1\cdots d\tau_n\langle T_\tau\{\hat{H}_{int}(\tau_1)\cdots\hat{H}_{int}(\tau_n)\}\rangle \quad (15.2)$$

写开，从 $\hat{H}_{int}(\tau_1)$ 中的某个算符开始收縮，最后不空过任何一个 $\hat{H}_{int}$ 而回到 $\hat{H}_{int}(\tau_1)$，則得到相連图形．任何其它情况下都出現不相連图形．

設 $n$ 級不相連图形由 $k$ 个封閉环构成．先假定 $k$ 个环都含有不同数目的頂点．这样的图对应：

$$\frac{(-1)^n}{n!}\int d\tau_1^{(1)}\cdots d\tau_{m_1}^{(1)}\langle T_\tau\{\hat{H}_{int}(\tau_1^{(1)})\cdots\hat{H}_{int}(\tau_{m_1}^{(1)})\}\rangle_c \times$$
$$\times\int d\tau_1^{(2)}\cdots d\tau_{m_2}^{(2)}\langle T_\tau\{\hat{H}_{int}(\tau_1^{(2)})\cdots\hat{H}_{int}(\tau_{m_2}^{(2)})\}\rangle_c\cdots$$
$$\cdots\int d\tau_1^{(k)}\cdots d\tau_{m_k}^{(k)}\langle T_\tau\{\hat{H}_{int}(\tau_1^{(k)})\cdots\hat{H}_{int}(\tau_{m_k}^{(k)})\}\rangle_c, \quad (15.3)$$

其中

$$m_1+m_2+\cdots+m_k=n(m_1\neq m_2\neq\cdots\neq m_k),$$

符号 $\langle\cdots\rangle_c$ 表示对应于一定相連图形的求平均．現在將一切包含我們选定的 $k$ 种封閉环的拓扑等价图形求和．为此只須將(15.3)乘以这类图形的数目 $F_k$．后者等于將 $n$ 个不同算符 $\hat{H}_{int}$ 按 $k$ 个不同"容器" $\langle\cdots\rangle_c$ 分配的排列数，其中每个"容器"可容納 $m_1, m_2, \cdots, m_k$ 个算符，即

$$F_k=\frac{n!}{m_1!\,m_2!\cdots m_k!}.$$

結果得到：

$$\frac{(-1)^{m_1}}{m_1!}\int d\tau_1^{(1)}\cdots d\tau_{m_1}^{(1)}\langle T_\tau\{\hat{H}_{int}(\tau_1^{(1)})\cdots\hat{H}_{int}(\tau_{m_1}^{(1)})\}\rangle_c \times$$
$$\times\frac{(-1)^{m_2}}{m_2!}\int d\tau_1^{(2)}\cdots d\tau_{m_2}^{(2)}\langle T_\tau\{\hat{H}_{int}(\tau_1^{(2)})\cdots\hat{H}_{int}(\tau_{m_2}^{(2)})\}\rangle_c\cdots$$
$$\cdots\frac{(-1)^{m_k}}{m_k!}\int d\tau_1^{(k)}\cdots d\tau_{m_k}^{(k)}\langle T_\tau\{\hat{H}_{int}(\tau_1^{(k)})\cdots\hat{H}_{int}(\tau_{m_k}^{(k)})\}\rangle_c. \quad (15.4)$$

注意，我們实質上可以立即放弃关于每个求平均 $\langle\cdots\rangle_c$ 对应



一定类型相連图的假定，而簡单地認为 $\langle\cdots\rangle_c$ 乃是所有具有給定頂点数目的相連图形之和．因而可以肯定，一切包含相应地具有 $m_1, m_2, \cdots, m_k$ 个頂点的 $k$ 个封閉环的图形之和乃是

$$\Xi_{m_1}\Xi_{m_2}\cdots\Xi_{m_k},$$

其中

$$\Xi_m=\frac{(-1)^m}{m!}\int d\tau_1\cdots d\tau_m\langle T_\tau\{\hat{H}_{int}(\tau_1)\cdots\hat{H}_{int}(\tau_m)\}\rangle_c \quad (15.5)$$

就是 $\langle\mathfrak{S}\rangle$ 中所有 $m$ 級相連图形之和．显然：

$$1+\Xi_1+\Xi_2+\cdots=\langle\mathfrak{S}\rangle_c. \quad (15.6)$$

如果数字 $m_1, m_2, \cdots$ 中有相同者，則图形分解成 $p_1+p_2+\cdots+p_k$ 个閉环，它們各有 $m_1, m_2, \cdots, m_k$ 个頂点($m_1\neq\cdots m_k$)，則可以証明，(15.5)式应换成[1]

$$\frac{1}{p_1!}\Xi_{m_1}^{p_1}\frac{1}{p_2!}\Xi_{m_2}^{p_2}\cdots\frac{1}{p_k!}\Xi_{m_k}^{p_k} \quad (15.7)$$

或者，相同地

$$\frac{1}{p_1!}\Xi_1^{p_1}\frac{1}{p_2!}\Xi_2^{p_2}\cdots\frac{1}{p_l!}\Xi_l^{p_l}, \quad (15.8)$$

其中数字 $p_l(p_l=0, 1, 2\cdots)$ 表明，在整个不相連图形中含有多少个 $l$ 級閉环．將(15.8)对所有的 $p_l$ 求和(不同 $p_l$ 的求和显然是彼此无关的)，就得到：

$$\langle\mathfrak{S}\rangle=\sum_{p_1,p_2,\ldots}\frac{1}{p_1!}\Xi_1^{p_1}\frac{1}{p_2!}\Xi_2^{p_2}\cdots=$$
$$=\sum_{p_1}\frac{1}{p_1!}\Xi_1^{p_1}\sum_{p_2}\frac{1}{p_2!}\Xi_2^{p_2}\cdots=e^{\Xi_1}e^{\Xi_2}\cdots=$$
$$=\exp\{\Xi_1+\Xi_2+\cdots\}. \quad (15.9)$$

最后將(15.9)代入(15.1)，就有

1) 这个論断的正确性可检驗如下．当数字 $m_1,\cdots,m_k$ 中有相同者时，$F_k$ 就等于把 $p_1m_1+p_2m_2+\cdots+p_km_k=n$ 个算符 $\hat{H}_{int}$，按各含 $m_1,m_2,\cdots,m_k$ 个位置的 $p_1+p_2+\cdots+p_k$ 个容器 $\langle\cdots\rangle_c$ 排列的数目，而且每 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 个容器是相同的．这时 $F_k$ 等于

$$F_k=\frac{n!}{p_1!(m_1!)^{p_1}p_2!(m_2!)^{p_2}\cdots p_k!(m_k!)^{p_k}}.$$

$$\Delta\Omega = -T(\Xi_1 + \Xi_2 + \cdots) = -T\{\langle\mathfrak{S}\rangle_c - 1\}. \quad (15.10)$$

这样我們就得到了十分重要的結果：为了計算热力学势的修正項，只須求得相連图形对$\langle\mathfrak{S}\rangle$的貢献.

已經指出，$\langle\mathfrak{S}\rangle$的图形是封閉环，其計算規則基本上同于$\mathfrak{G}$函数．唯一的差别在于图形的系数.

我們在§12中指出，如果考慮拓扑等价图形（其数目正好是$n!$个）的貢献，則$\mathfrak{G}$函数的微扰論級数(12.13)的系数$\frac{1}{n!}$正好消去．計算$\langle\mathfrak{S}\rangle_c$时情况变了．級数(12.12)$n$級項的等价图形数目等于$(n-1)!$[1]，結果每个图形（如果認为只有拓扑不等价图形才是不同的）前面出現系数$\frac{1}{n}$．由于出現了和$n$密切相关的系数，就使$\Omega$的微扰論級数頗为不便，特别是当不能局限于級数的有限項，而必須对图形的无穷序列求和时.

我們举几个計算修正項$\Delta\Omega$的例子，为了簡单起見，只限于和声子相互作用的情况．在微扰論第二級近似只有图49II的相連图形不为零．按維克定理計算它的貢献，得到$\Omega_2 = -T\Xi_2$（使用四維符号）：

$$\Omega_2 = \mp\frac{1}{2}Tg^2\int d^4x d^4y\,\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\beta}(x-y)\mathfrak{G}^{(0)}_{\beta\alpha}(y-x)\mathfrak{D}^{(0)}(x-y).$$

只要在积分中引入新变量$x' = x - y$，就容易看出$\Omega_2$正比于系統的体积$V$．在任何一級近似都是这样．事情也正应如此，因为我們知道热力学势$\Omega$的形状是

$$\Omega = -VP(\mu, T),$$

其中$P$是压力作为化学势和温度的函数．因此我們以后只給出$\Delta P$的公式；

$$P = P_0(\mu, T) + \Delta P,$$

其中$P_0$是自由粒子系統的压力.

1）在(12.12)式中以一切可能方式置換$n-1$个算符$\hat{H}_{int}$，就得到所有拓扑不等价图．$\hat{H}_{int}$算符之一应固定．在計算$\mathfrak{G}$时，外綫的首尾，即(12.13)式中算符$\psi_\alpha(\mathbf{r}_1,\tau_1)$，$\bar{\psi}_\beta(\mathbf{r}_2,\tau_2)$是固定的.



对$\Delta P_2$有：

$$\Delta P_2 = \pm\frac{1}{2}g^2\int d^4x\,\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\beta}(x)\mathfrak{G}^{(0)}_{\beta\alpha}(-x)\mathfrak{D}^{(0)}(x). \quad (15.11)$$

变換到动量表象，我們得到：

$$\Delta P_2 = \mp\frac{1}{2}g^2\frac{T^2}{(2\pi)^6}(2s+1)\sum_{\omega_1,\omega_2}\int d\mathbf{p}\,d\mathbf{k}\times$$

$$\times\frac{1}{i\omega_1 - \varepsilon_0(\mathbf{p}) + \mu}\,\frac{1}{i(\omega_1+\omega_2) - \varepsilon_0(\mathbf{p}+\mathbf{k}) + \mu}\times$$

$$\times\frac{\omega_0^2(\mathbf{k})}{\omega_2^2 + \omega_0^2(\mathbf{k})}.$$

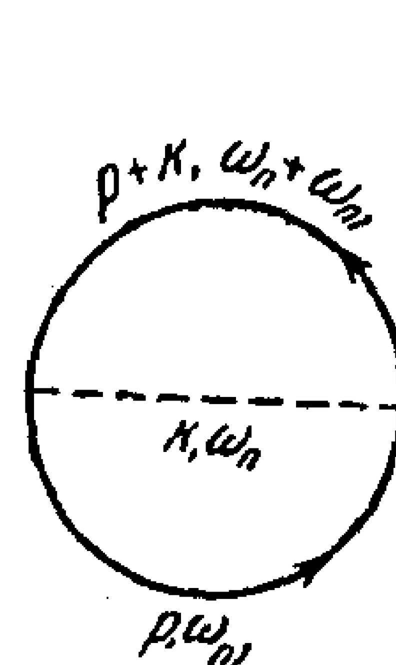



图 50

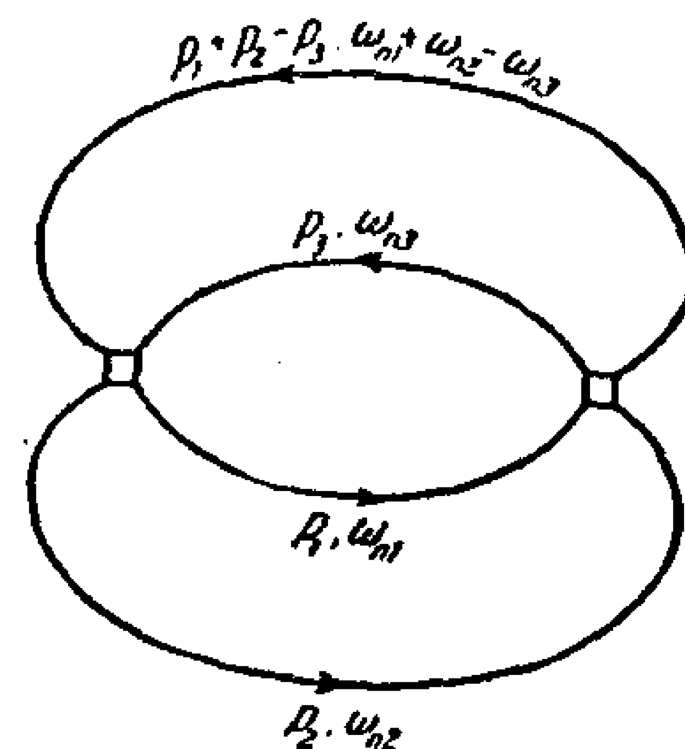



图 51

其图形示于图50.

討論任意$2n$級图形．这样的图形有$3n$条綫和$2n$个頂点．然而$2n$个守恒律中有一个是恒等式，只要其它$2n-1$个守恒律成立．这样，$2n$級图中共有$n+1$个独立积分．多出的一个守恒律使$\langle\mathfrak{S}\rangle$的图中出現附加因子$\delta(\mathbf{p}=0)$，它正比于系統的体积$V$[1].

图形各元素和格林函数（以及其它相互作用时的頂角部分）的对应規則，仍同于$\mathfrak{G}$函数的图．$\Delta P$的$2n$級修正項的系数等于

$$M_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n}g^{2n}\left(\frac{T}{(2\pi)^3}\right)^{n+1}(\mp 1)^F(2s+1)^F,$$

1）根据定义：

$$\delta(\mathbf{p}=0) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{r} = \frac{V}{(2\pi)^3}.$$

其中 $F$ 是由一条 $\mathfrak{G}$ 粒子綫組成的封閉环数目[1]．

下面給出双粒子相互作用时 $\Delta P$ 的表达式．对于形如(13.7)式的相互作用，压力的二級修正項对应图 51．它等于：

$$-\frac{1}{4}\frac{T^3}{(2\pi)^9}\sum_{\omega_1\omega_2\omega_3}\int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3\frac{1}{i\omega_1-\varepsilon_0(\mathbf{p}_1)+\mu}\times$$
$$\times\frac{1}{i\omega_2-\varepsilon_0(\mathbf{p}_2)+\mu}\,\frac{1}{i\omega_3-\varepsilon(\mathbf{p}_3)+\mu}\times$$
$$\times\frac{1}{i(\omega_1+\omega_2-\omega_3)-\varepsilon_0(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_3)+\mu}\times$$
$$\times\mathcal{T}^{(0)}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1,p_2;p_1+p_2-p_3,p_3)\times$$
$$\times\mathcal{T}^{(0)}_{\gamma\delta;\beta\alpha}(p_1+p_2-p_3,p_3;p_2,p_1).$$

## §16．戴逊方程．多粒子格林函数

**1．戴逊方程．** 在 $T\neq 0$ 的統計問題中和温度等于零时一样，几乎永远不能只限于微扰論級数的前几項作为对格林函数的修正．实际上任何物理提法正确的問題中，图解法的形式上的展开参数——相互作用哈密顿量 $\hat{H}_{int}$——都并不小，因而微扰論級数中某些无穷項序列可能給出同一数量級的貢献．

前一章里我們看到了，量子場論方法中借助图解进行无穷級数的求和．在此方法中級数之和可表示成一个图形，其元素——綫和頂点——本身又是无穷个图形之和．这种图形元素和表达式的对应規則，与微扰論图形一样． 因此可能为格林函数建立各种方程式． 第二章里我們已遇到过一个这种方程式——戴逊方程式，它把格林函数通过系統的質量算符表示．

图解法的两个性質对于建立这种方程式頗为重要，这就是图形的拓扑結构和图形与解析式的对应規則．$T=0$ 时的图形与松原方法中根本一样，而对应規則的差别仅在于前者中对頻率的积分，在后者中換成对不連續虛"頻率" $i\omega_n$ 的求和；更确切些說，对应一定图形的温度格林函数 $\mathfrak{G}$ 的修正項，可从对应同一图形的

1) 原书 $M_n$ 的公式有錯誤，我們已改正．——校者注



$T=0$ 时的格林函数 $G$ 的修正項得出，为此只須在后者中換 $\omega$ 为 $i\omega_n$，并将积分按下式換成求和：

$$\frac{1}{2\pi}\int d\omega\cdots\rightarrow iT\sum_n\cdots$$

(参閱 §14 末尾)．

上述情况使我們只改变一下記号，就能直接把 §10 的全部結果用于 $T\neq 0$ 时．例如，在松原方法中戴逊方程式仍成立． 对于有双粒子相互作用的系統它的形状是：

$$\mathfrak{G}_{\alpha\beta}(p)=\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\beta}(p)-\frac{T}{(2\pi)^3}\sum_{\omega_1}\int d\mathbf{p}_1\mathcal{T}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2;\gamma_3\gamma_4}(p,p_1;p_1,p)\times$$
$$\times\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(p)\mathfrak{G}_{\gamma_3\gamma_2}(p_1)\mathfrak{G}_{\gamma_4\beta}(p)+\frac{1}{2}\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(p)\frac{T^2}{(2\pi)^6}\sum_{\omega_1\omega_2}\int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2\times$$
$$\times\mathcal{T}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2;\gamma_3\gamma_4}(p,p_1+p_2-p;p_1,p_2)\mathfrak{G}_{\gamma_3\gamma_5}(p_1)\mathfrak{G}_{\gamma_4\gamma_6}(p_2)\times$$
$$\times\mathfrak{G}_{\gamma_7\gamma_2}(p_1+p_2-p)\mathcal{T}_{\gamma_5\gamma_6;\gamma_7\gamma_8}(p_1,p_2;p_1+p_2-p,p)\mathfrak{G}_{\gamma_8\beta}(p).\tag{16.1}$$

这里 $\mathcal{T}$ 是准确頂角部分，其意义和 $T=0$ 的方法中相同．它等于所有具备四条外綫的紧致图形之和，而且每条綫代表准确格林函数 $\mathfrak{G}$ (图 52 上举了一些例子)．

戴逊方程式(16.1)的图解(图 53)和第二章中相应方程式一

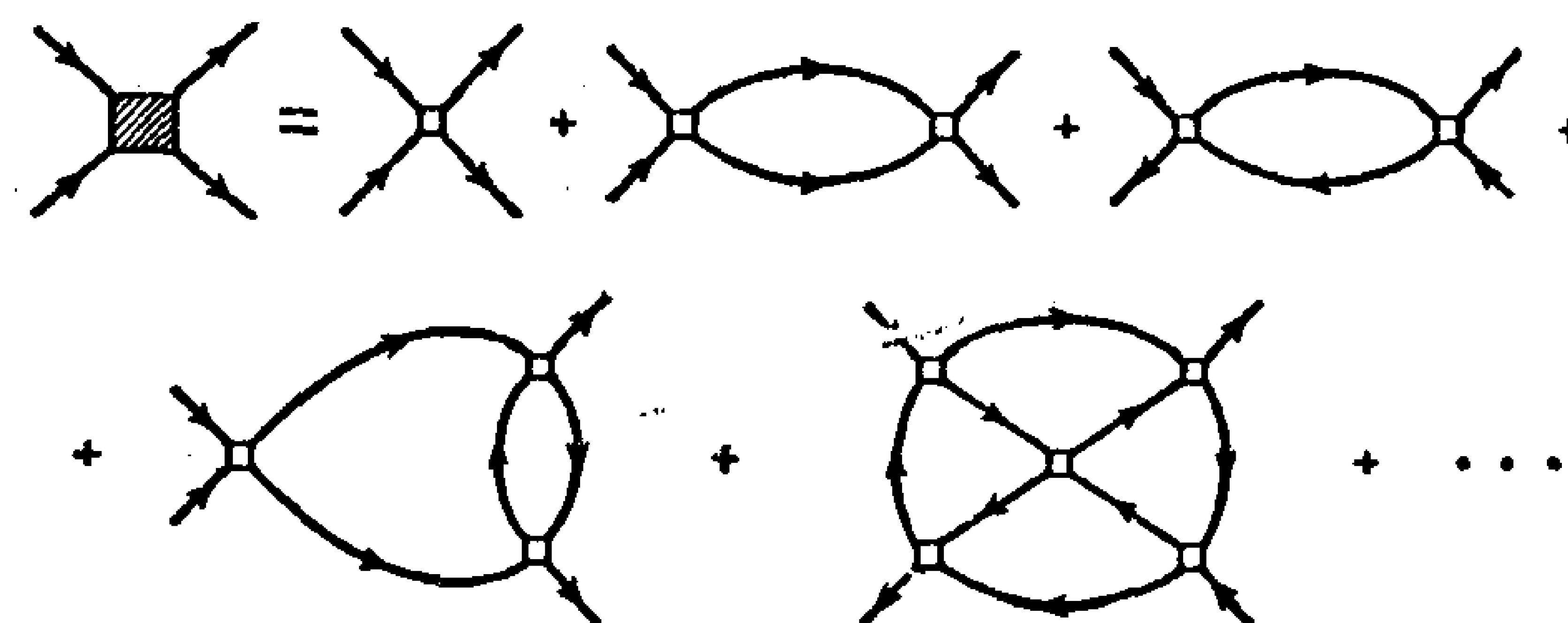


图 52

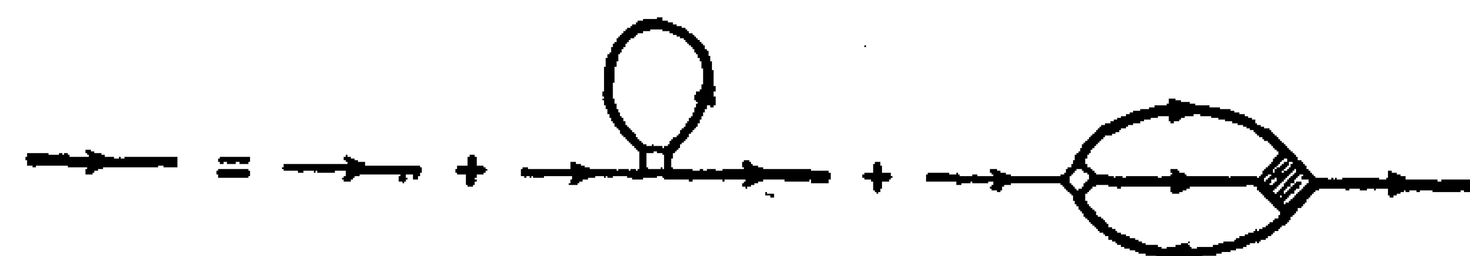


图 53

样.粗綫表示 $\mathfrak{G}$,細綫表示 $\mathfrak{G}^{(0)}$,而画斜綫的方框表示頂角部分 $\mathcal{T}$.

如果引入 $\mathfrak{G}_{\alpha\beta}$ 的逆矩陣 $\mathfrak{G}^{-1}_{\alpha\beta}$,則方程(16.1)可写成:

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}^{-1}_{\alpha\beta}(p) &= (i\omega - \varepsilon(\boldsymbol{p}) + \mu)\delta_{\alpha\beta} + \frac{T}{(2\pi)^3}\sum_{\omega_1}\int d\boldsymbol{p}_1 \times \\ &\times \mathcal{T}^{(0)}_{\alpha\gamma_1;\gamma_2\beta}(p, p_1; p_1, p)\mathfrak{G}_{\gamma_2\gamma_1}(p_1) - \frac{T^2}{2(2\pi)^6}\sum_{\omega_1\omega_2}\int d\boldsymbol{p}_1 d\boldsymbol{p}_2 \times \\ &\times \mathcal{T}^{(0)}_{\alpha\gamma_1;\gamma_2\gamma_3}(p, p_1+p_2-p; p_1, p_2)\mathfrak{G}_{\gamma_2\gamma_4}(p_1)\mathfrak{G}_{\gamma_3\gamma_5}(p_2) \times \\ &\times \mathfrak{G}_{\gamma_6\gamma_1}(p_1+p_2-p)\mathcal{T}_{\gamma_4\gamma_5;\gamma_6\beta}(p_1, p_2; p_1+p_2-p; p).\end{aligned} \quad (16.2)$$

与声子相互作用的情形中 $\mathfrak{G}$ 和 $\mathfrak{D}$ 的方程組也类似地写为(图 54):

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}^{-1}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{p}, \omega_n) &= (i\omega_n - \varepsilon(\boldsymbol{p}) + \mu)\delta_{\alpha\beta} + \\ &+ \frac{gT}{(2\pi)^3}\sum_{\omega_n'}\int d\boldsymbol{p}'\mathfrak{G}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{p}', \omega_n')\mathfrak{D}(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p}, \omega_n'-\omega_n) \times \\ &\qquad \times \mathcal{T}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}'; \omega_n, \omega_n'), \\ \mathfrak{D}^{-1}(\boldsymbol{k}, \omega_n) &= -\omega_0^{-2}(\boldsymbol{k})(\omega_n^2 + \omega_0^2(\boldsymbol{k})) \mp \\ &\mp \frac{gT}{(2\pi)^3}\sum_{\omega_n'}\int d\boldsymbol{p}'\mathfrak{G}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{p}', \omega_n')\mathfrak{G}_{\beta\alpha}(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{k}, \omega_n'-\omega_n) \times \\ &\qquad \times \mathcal{T}(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{p}'-\boldsymbol{k}; \omega_n', \omega_n'-\omega_n).\end{aligned} \quad (16.3)$$

(16.3)中的函数 $\mathcal{T}$ 乃是完全頂角部分. 它描述所有具备两条粒子外綫和一条声子外綫的紧致图形之和(图 55).

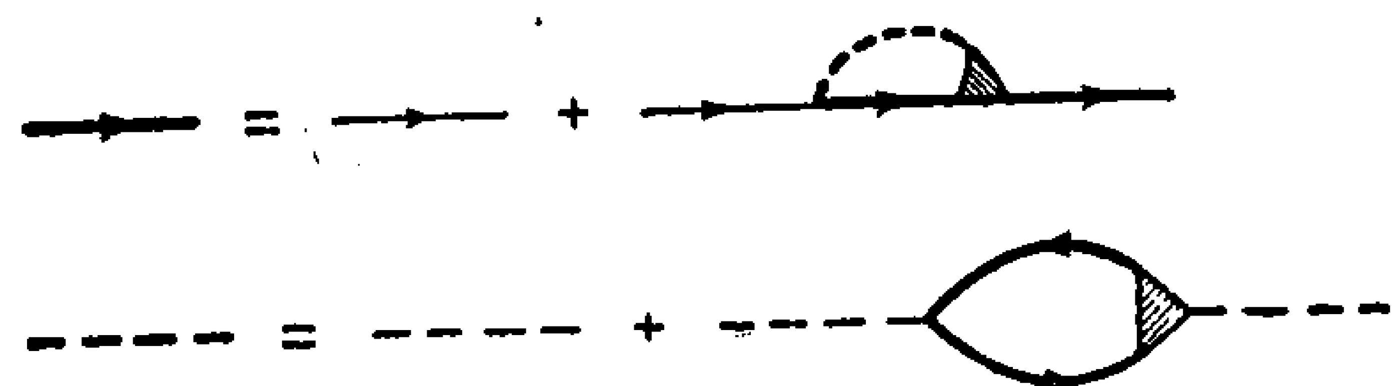


图 54

和在絕对零度时一样,$T \neq 0$ 的完全頂角部分与多粒子温度格林函数有一定关系.后者在松原方法中的式子如(11.1)—(11.4),它們和 $T = 0$ 时的相应公式一致. 再注意到,两种情况下維克定理的表述是等价的,我們立刻就得出結論:可以借助多端图形計算多粒子格林函数 $\mathfrak{G}$,并(在 $\boldsymbol{r}, \tau$ 空間中)保留 §14 中所有对应規則.



为了变换到动量表象,下面的形式作法是有益的.

例如,討論双粒子格林函数

$$\mathfrak{G}^{\rm II}_{\alpha\beta;\gamma\delta}(1, 2; 3, 4) = \langle T_\tau\{\tilde{\psi}_\alpha(1)\tilde{\psi}_\beta(2)\tilde{\bar{\psi}}_\gamma(3)\tilde{\bar{\psi}}_\delta(4)\}\rangle \quad (16.4)$$

($\tilde{\psi}$——"海森堡算符"(11.3));它与四个"时間" $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ 有关,其中每一个从零变到 $1/T$. 将(16.4)式对 $\tau_1$ 延拓到区間 $\left(-\frac{1}{T}, 0\right)$ 上去,令 $\mathfrak{G}^{\rm II}(1, 2; 3, 4)$ 在 $\tau_1 < 0$ 和 $\tau_1 > 0$ 的値以(11.8)式相联系;类似地完成对 $\tau_2, \tau_3, \tau_4$ 的延拓. 然后对每个 $\tau$ 完成傅立叶变换(14.2),我們立刻看出,每个"費米"变量((16.4)式中的費米算符)的頻率只能取奇値:$(2n+1)\pi T$,而"玻色"变量的頻率只取偶値 $2n\pi T$.

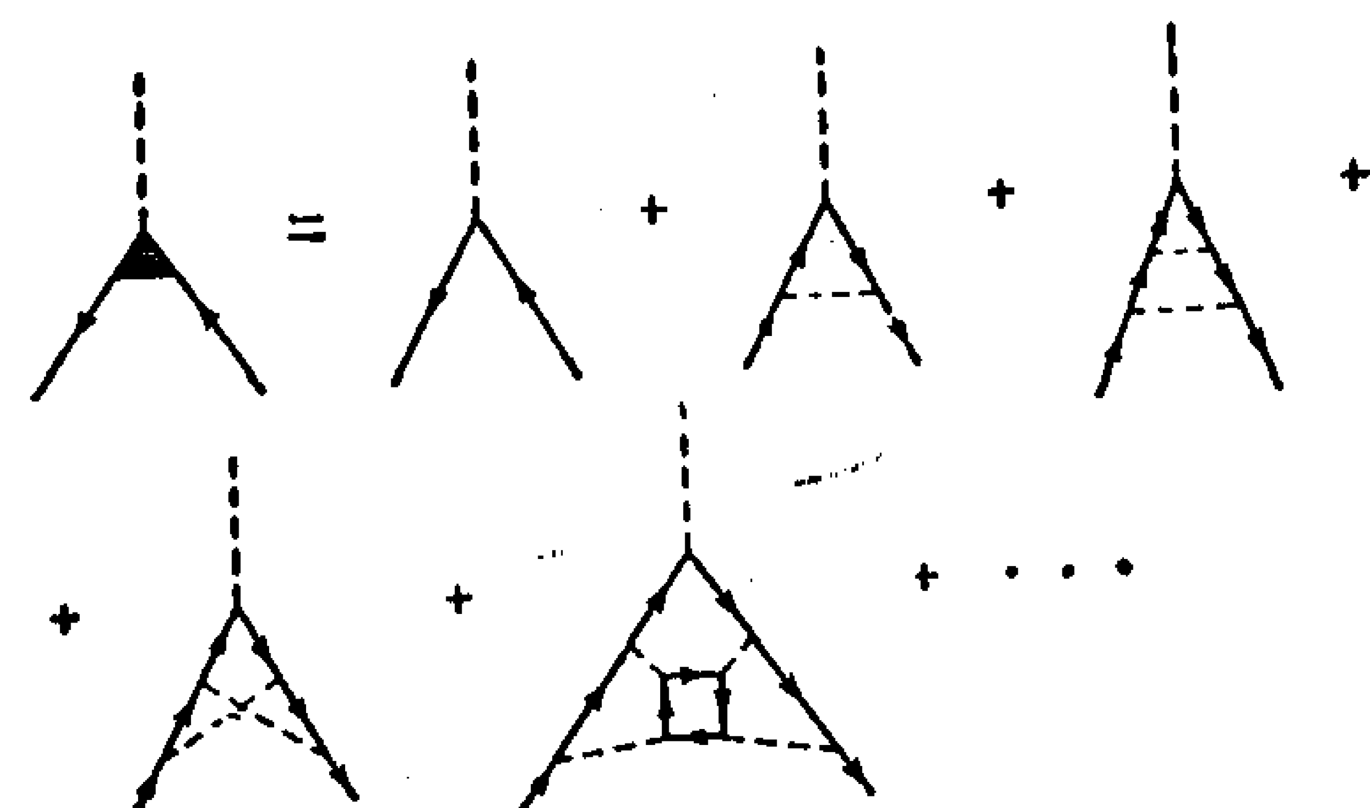


图 55

自然,对任何多粒子格林函数,都可以完成类似的延拓手續.

和 §14 中一样容易驗証,微扰論級数每一項都能对 $\tau$ 进行傅立叶变换. 这时得到的对应規則和 §14 中单粒子格林函数的規則一致. 本节初提到的 $T = 0$ 和 $T \neq 0$ 时图解法的关系,也保留下来. $\mathfrak{G}^{\rm II}(1,2;3,4)$的修正項可由对应同一图形的 $G^{\rm II}(1,2;3,4)$ 的表达式借助于前面提过的代换 $\omega \to i\omega_n$, $(2\pi)^{-1}\int d\omega \to iT\sum_n$ 而得. 由于这种联系的存在,我們得以逐字复述 §10 中关于多粒子函数图形所說的一切. $\mathfrak{G}^{\rm II}(1, 2; 3, 4)$的微扰論級数,可以归結为仅仅由代表准确格林函数 $\mathfrak{G}(1, 2)$ 的粗綫所构成的紧致图形之

和．这些图形和完全顶角部分 $\mathcal{J}$ 的图形一致，由此看出，$\mathfrak{G}^{11}(1,2;3,4)$ 和 $\mathcal{J}$ 之間应存在一定关系．不难証明，它乃是[1]:

$$\mathfrak{G}^{11}_{\alpha\beta;\gamma\delta}(p_1, p_2; p_3, p_4) = \frac{(2\pi)^3}{T}\Big\{\frac{(2\pi)^3}{T}[\mathfrak{G}_{\alpha\delta}(p_1)\mathfrak{G}_{\beta\gamma}(p_2)\delta_{\omega_1\omega_4}\times$$

$$\times\delta(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_4)\mp\mathfrak{G}_{\alpha\gamma}(p_1)\mathfrak{G}_{\beta\delta}(p_2)\delta_{\omega_1\omega_3}\delta(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_3)]\pm$$

$$\pm\mathfrak{G}_{\alpha\lambda}(p_1)\mathfrak{G}_{\beta\mu}(p_2)\mathcal{J}_{\lambda\mu;\nu\tau}(p_1,p_2;p_3,p_4)\mathfrak{G}_{\nu\gamma}(p_3)\mathfrak{G}_{\tau\delta}(p_4)\Big\}\times$$

$$\times\delta_{\omega_1+\omega_2-\omega_3-\omega_4}\delta(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_3-\boldsymbol{p}_4). \qquad (16.5)$$

与声子相互作用时的顶角部分 $\mathcal{J}(p_1, p_2)$ 和格林函数

$$\mathfrak{G}_{\alpha\beta}(1,2;3) = \langle T_\tau\{\tilde{\psi}_\alpha(1)\tilde{\bar{\psi}}_\beta(2)\tilde{\varphi}(3)\}\rangle$$

的傅立叶分量的关系为

$$\mathfrak{G}_{\alpha\beta}(p_1, p_2; k) = \frac{(2\pi)^3}{T}\mathfrak{G}_{\alpha\gamma}(p_1)\mathfrak{G}_{\gamma\beta}(p_2)\mathfrak{D}(k)\times$$

$$\times\mathcal{J}(p_1, p_1+k)\delta(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{k})\delta_{\omega_1-\omega_2+\omega}. \qquad (16.6)$$

正如我們所期待的，关系式 (16.5) 和 (16.6) 与相应的 (10.17)，(10.21) 式的差别只是系数．

应强调，图形求和法只适用于 $\mathfrak{G}$ 函数的图形．§15中討論的热力学势 $\Omega$ 的微扰論級数就不能如此求和，因为那里相应 $n$ 級图的項中含有系数 $\frac{1}{n}$．这样的图形显然已不能象 $\mathfrak{G}$ 的图形那样分解成为个别分图，而某个无穷图形序列求和的結果也不能簡单地归結

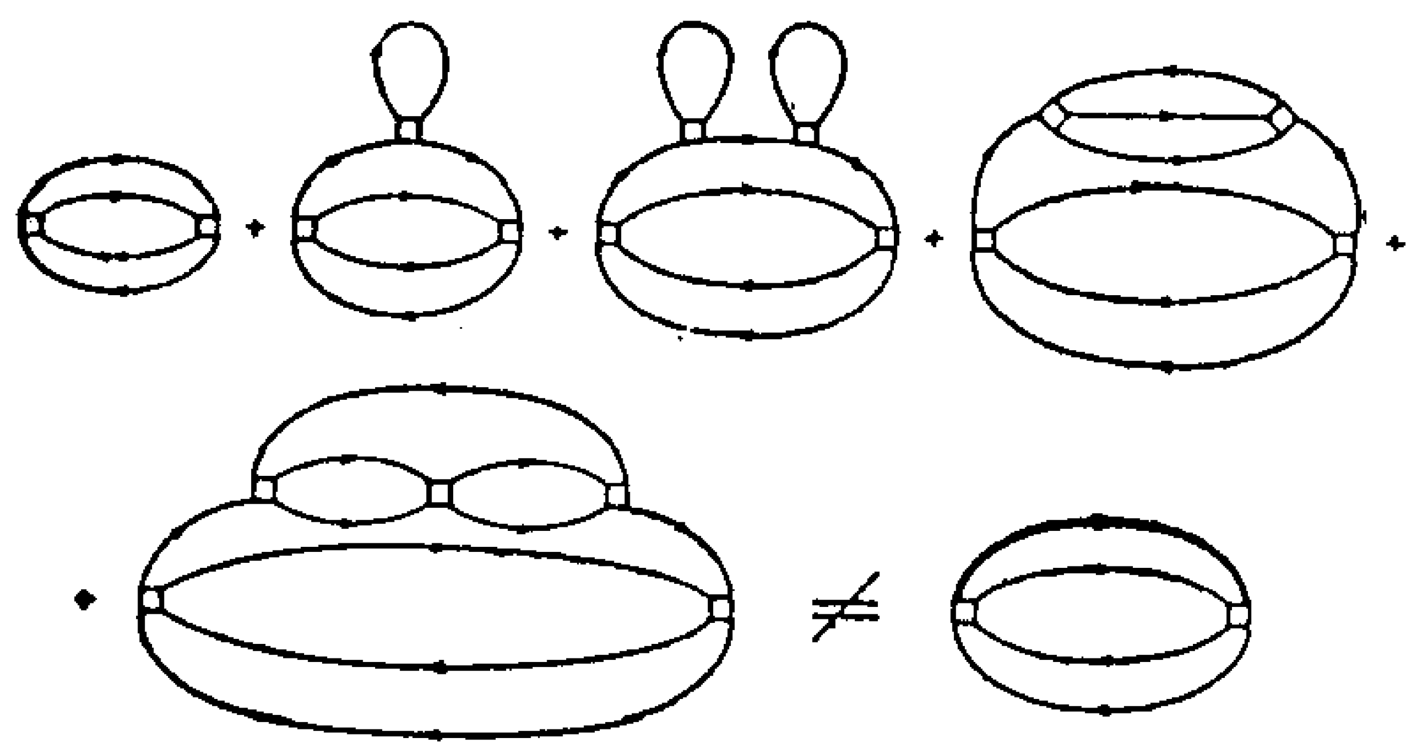


图 56

1) 为了驗証(16.5)，(16.6)的系数，最簡单的方法是以一級微扰論計算等式两端．



为把細綫換成粗綫．例如，图 56 所示的加图过程就是完全不能成立的．

**2. 格林函数和热力学势 $\Omega$ 的关系．** 我們在本节末尾推导热力学势 $\Omega$ 和温度格林函数間的若干关系．从粒子間成对相互作用的情形开始．引入势 $\lambda\mathcal{J}^{(0)}(0<\lambda<1)$ 代替 $\mathcal{J}^{(0)}$，并对 $\lambda$ 微分 $\Omega$ 的表达式：

$$\Omega = \Omega_0 - T\ln\langle S\rangle$$

得到：

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda} = \frac{T}{4}\int d^4x_1\cdots d^4x_4\mathcal{J}^{(0)}_{\alpha\beta;\gamma\delta}(x_1, x_2; x_3, x_4)\times$$

$$\times\langle T_\tau\{\bar{\psi}_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2)\psi_\delta(x_4)\psi_\gamma(x_3)S(\lambda)\}\rangle/\langle S(\lambda)\rangle$$

而根据定义(16.4)式：

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda} = \frac{T}{4}\int d^4x_1\cdots d^4x_4\mathcal{J}^{(0)}_{\alpha\beta;\gamma\delta}(x_1, x_2; x_3, x_4)\times$$

$$\times\mathfrak{G}^{11}_{\delta\gamma;\alpha\beta}(x_4, x_3; x_1, x_2).$$

完成傅立叶变换并利用 (16.5) 式，就有 ($\mathfrak{G}(p,\lambda)$ 是 $\lambda\neq1$ 时的格林函数)：

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda} = \frac{VT}{2\lambda(2\pi)^3}\sum_\omega\int d\boldsymbol{p}\Big\{\frac{T}{(2\pi)^3}\sum_{\omega_1}\int d\boldsymbol{p}_1\times$$

$$\times\lambda\mathcal{J}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2;\gamma_3\gamma_4}(p, p_1; p, p_1)\mathfrak{G}_{\gamma_3\gamma_1}(p,\lambda)\mathfrak{G}_{\gamma_4\gamma_2}(p_1,\lambda)\pm$$

$$\pm\frac{T^2}{2(2\pi)^6}\sum_{\omega_1,\omega_2}\int d\boldsymbol{p}_1d\boldsymbol{p}_2\lambda\mathcal{J}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2;\gamma_3\gamma_4}(p, p_1+p_2-p; p_1, p_2)\times$$

$$\times\mathfrak{G}_{\gamma_3\gamma_6}(p_1,\lambda)\mathfrak{G}_{\gamma_4\gamma_5}(p_2,\lambda)\mathfrak{G}_{\gamma_8\gamma_2}(p_1+p_2-p,\lambda)\times$$

$$\times\mathcal{J}_{\gamma_5\gamma_6;\gamma_7\gamma_8}(p_2, p_1; p, p_1+p_2-p)\mathfrak{G}_{\gamma_7\gamma_1}(p,\lambda)\Big\}. \qquad (16.7)$$

注意(16.7)式圓括弧中的表达式正好是戴逊方程式 (16.1) 的右端，只是相互作用势換成了 $\lambda\mathcal{J}^{(0)}$，即

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda} = \pm\frac{VT}{2\lambda(2\pi)^3}\sum_\omega\int d\boldsymbol{p}\mathfrak{G}^{(0)-1}_{\alpha\beta}(p)\{\mathfrak{G}_{\beta\alpha}(p,\lambda)-\mathfrak{G}^{(0)}_{\beta\alpha}(p)\}. \quad (16.8)$$

对 $\lambda$ 积分(16.8)式并注意条件 $\Omega(\lambda=0)=\Omega_0$，就得到我們所需的关系：

$$\Omega = \Omega_0 \pm$$

$$\pm \frac{1}{2} V \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} \frac{T}{(2\pi)^3} \sum_{\omega} \int d\boldsymbol{p} \mathfrak{G}^{(0)-1}_{\alpha\beta}(p) \{\mathfrak{G}_{\beta\alpha}(p, \lambda) - \mathfrak{G}^{(0)}_{\beta\alpha}(p)\}. \tag{16.9}$$

对于和声子相互作用,也有类似的关系成立,它把 $\Omega$ 通过 $\mathfrak{G}$ 函数对参量 $g$ 的积分表示。和以上推导(16.9)式完全相同的計算給出:

$$\Omega = \Omega_0 \pm V \int_0^g \frac{dg}{g} \frac{T}{(2\pi)^3} \sum_{\omega_n} \int d\boldsymbol{p}(i\omega_n - \varepsilon(\boldsymbol{p}) + \mu) \times$$

$$\times (\mathfrak{G}_{\alpha\alpha}(\boldsymbol{p}, \omega_n) - \mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\alpha}(\boldsymbol{p}, \omega_n)) = \Omega_0 + V \int_0^g \frac{dg}{g} \frac{T}{(2\pi)^3} \times$$

$$\times \sum_{\omega_n} \int d\boldsymbol{k} \frac{\omega_n^2 + \omega_0^2(\boldsymbol{k})}{\omega_0^2(\boldsymbol{k})} (\mathfrak{D}(\boldsymbol{k}, \omega_n) - \mathfrak{D}^{(0)}(\boldsymbol{k}, \omega_n)). \tag{16.10}$$

$\Omega$ 对粒子質量 $m$ 的微商和系統总哈密頓量 $\hat{H}$ 对 $m$ 的微商間存在着熟知的关系(見兰道和 Лифшиц 的书[1]):

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial m}\right)_{T, V, \mu} = \left\langle \frac{\partial \hat{H}}{\partial m} \right\rangle.$$

由此得出另一个有益的公式. 既然

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial m} = \frac{1}{2m^2} \int \psi^+_\alpha(\boldsymbol{r}) \Delta \psi_\alpha(\boldsymbol{r}) d\boldsymbol{r},$$

則根据 $\mathfrak{G}$ 函数的定义(11.1)式,我們立刻得到:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial m} = \pm \frac{1}{2m^2} \int [\Delta_r \mathfrak{G}_{\alpha\alpha}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'; -0)]_{r=r'} d\boldsymbol{r},$$

或者写成傅立叶分量[1)]:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial m} = \mp \frac{VT}{m(2\pi)^3} \sum_{\omega_n} \int d\boldsymbol{p} \frac{p^2}{2m} \mathfrak{G}_{\alpha\alpha}(\boldsymbol{p}, \omega_n) e^{i\omega_n \tau}, \tau \to +0. \tag{16.11}$$

利用(16.9)—(16.11)式,以及写成傅立叶分量的(11.6)式:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = -N = \mp \frac{VT}{(2\pi)^3} \sum_{\omega_n} \int d\boldsymbol{p} \mathfrak{G}_{\alpha\alpha}(\boldsymbol{p}, \omega_n) e^{i\omega_n \tau} (\tau \to +0), \tag{16.12}$$

1) 我們將在 §17 末說明,如何計算此处对 $\omega_n$ 的求和.



我們可以計算 $\Omega$ 对各种参数的微商. 这些关系式把热力学势 $\Omega$ 通过格林函数表示出来.

最后,我們再推导一个公式,它把热力学势 $\Omega$ 通过准确格林函数 $\mathfrak{G}$ 表示出来. 前面已指出,$\Omega$ 的微扰論图形中出現了因子 $1/n$,因而对 §15 中的級数不能应用图形求和法. 然而也还有一种有趣的途径,使我們得以完成部分求和,并把 $\Omega$ 写成仅仅由表示准确 $\mathfrak{G}$ 函数的粗綫所組成的,无穷个图形之和 (Luttinger 和 Ward[39]).

为了簡单起見,我們只考虑粒子間有成对相互作用,并認为系統是非鉄磁性的: $\mathfrak{G}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}\mathfrak{G}$. 从热力学势 $\Omega$ 的微扰論图形中,取出所有的紧致图形,即內部不再含有相当于对 $\mathfrak{G}$ 的修正的分图者(請与 §10 第二小节比較),将其中所有細綫換成粗綫. 例如,从图 48b 的三个图中只取前两个. 这样得到的所有图形之和(每个图形都有系数 $1/n$),我們記作 $\Omega'$.

根据这个定义, $\Omega'$ 乃是准确格林函数 $\mathfrak{G}$ 的泛函. 将 $\Omega'$ 的图形逐項对 $\delta\mathfrak{G}(p)$ 变分,不难看出,这样所得的級数(准确到因子),就是准确格林函数修正項的級数,但后者中对应左右两端綫的格林函数乘积 $\mathfrak{G}^{(0)}(p)\mathfrak{G}(p)$ 换成了 $\delta\mathfrak{G}(p)$. 更确切些就是:

$$\delta \Omega' = \pm 2TV \sum_n \int \frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} \Sigma(p) \delta\mathfrak{G}(p), \tag{16.13}$$

其中 $\Sigma(p)$ 是准确格林函数 $\mathfrak{G}(p)$ 的自能部分. 它的定义同于 $T = 0$ 的图解法中的自能函数(見 §10 第一小节), 而与 $\mathfrak{G}$ 有以下关系:

$$\mathfrak{G}^{-1} = \mathfrak{G}^{(0)-1} - \Sigma. \tag{16.14}$$

如果将 $\Sigma$ 理解为由粗綫构成的相应图形之和, 則(16.14)就是戴逊方程(16.2).

我們写出以下表达式:

$$\tilde{\Omega} = \Omega_0 \mp 2TV \sum_n \int \frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} \{\ln(1 - \mathfrak{G}^{(0)}(p)\Sigma(p)) +$$

$$+ \Sigma(p)\mathfrak{G}(p)\} + \Omega', \tag{16.15}$$

并且証明 $\tilde{\Omega} = \Omega$. 为此首先須指出, $\tilde{\Omega}$ 作为 $\mathfrak{G}$ (或作为 $\Sigma$) 的泛

函，具有稳恆性，即 $\frac{\delta\bar{\Omega}}{\delta\Sigma}=0$，只要 $\mathfrak{G}$ 满足戴逊方程(16.14)．事实上，变分(16.15)，并注意到(16.13)，我們立即得到：

$$\delta\bar{\Omega}=\mp 2TV\sum_n\int\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\Big\{-\frac{\delta\Sigma(p)}{\mathfrak{G}^{(0)^{-1}}(p)-\Sigma(p)}+\mathfrak{G}(p)\delta\Sigma(p)+$$

$$+\Sigma(p)\delta\mathfrak{G}(p)\Big\}\pm 2TV\sum_n\int\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\Sigma(p)\delta\mathfrak{G}(p)=$$

$$=\mp 2TV\sum_n\int\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\Big\{\mathfrak{G}(p)-\frac{1}{\mathfrak{G}^{(0)^{-1}}(p)-\Sigma(p)}\Big\}\delta\Sigma(p),$$

由此得出上述論断．

与前面作法类似，以 $\lambda\mathcal{J}^{(0)}$ 代替相互作用势 $\mathcal{J}^{(0)}$，并計算 $\frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial\lambda}$．由于刚才所証明的稳恆性，我們可不考虑 $\mathfrak{G}$ 和 $\Sigma$ 与 $\lambda$ 的关系．因此

$$\frac{\partial\bar{\Omega}(\lambda)}{\partial\lambda}=\frac{\partial\Omega'(\lambda)}{\partial\lambda},$$

而且計算 $\frac{\partial\Omega'(\lambda)}{\partial\lambda}$ 时，$\mathfrak{G}(\lambda)$ 不必微分．

另一方面，由图形的結构知道，当 $\lambda=1$ 时泛函 $\Omega'(\lambda)$ 和 $\Omega'$ 相同，只须在后者中以$\sqrt{\lambda}\,\mathfrak{G}(\lambda)$ 代替 $\mathfrak{G}(\lambda=1)$．由此注意(16.13)得：

$$\frac{\partial\Omega'(\lambda)}{\partial\lambda}=\pm 2TV\sum_n\int\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\frac{\Sigma(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\frac{\partial}{\partial\lambda}(\sqrt{\lambda}\,\mathfrak{G}(\lambda)),$$

在此处令 $\frac{\partial\mathfrak{G}(\lambda)}{\partial\lambda}\to 0$，我們就得出：

$$\frac{\partial\bar{\Omega}(\lambda)}{\partial\lambda}=\pm\frac{TV}{\lambda}\sum_n\int\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\Sigma(\lambda)\mathfrak{G}(\lambda).$$

将此式与(16.8)式比較，并且注意到 $\Sigma$ 的定义，我們就得出結論：

$$\frac{\partial\bar{\Omega}(\lambda)}{\partial\lambda}=\frac{\partial\Omega(\lambda)}{\partial\lambda}.\qquad(16.16)$$

另一方面，根据定义(16.5) $\bar{\Omega}(0)=\Omega(0)$，故积分(16.16)式并令 $\lambda=1$，我們証实 $\bar{\Omega}=\Omega$．



$\Omega$ 的(16.15)式实际上对粒子間任意的(而不仅是成对的)相互作用都成立．这时只要求 $\Omega'$ 是具有性质(16.13)的泛函．逐字重复 §19 第四小节中对 $T=0$ 情形的討論，就可以确知这样的泛函是存在着的．然而，实际构成这样一个泛函却是很費事的，我們也就不予討論了．

順便指出，可以証明(見前面引用过的 Luttinger 和 Ward 的論文[39])

$$\Omega_0=\pm 2TV\sum_n\int\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\ln\mathfrak{G}^{(0)}(p).$$

因此(16.15)式可改写成

$$\Omega=\pm 2TV\sum_n\int\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\{\ln\mathfrak{G}-\Sigma\mathfrak{G}\}+\Omega'.\qquad(16.17)$$

## § 17. $T>0$ 的时間格林函数．格林函数的解析性質

除了前面研究的温度格林函数 $\mathfrak{G}$，上一章里引入的时間格林函数 $G$ 在 $T>0$ 时仍有意义．以后将以实例証明，后者决定系統的非平衡性质，例如作为外場頻率函数的电阻和复数介电常数 $\varepsilon$．函数 $G$ 还描述粒子在凝聚体中的非弹性散射过程．

温度不为零时，单粒子格林函数 $G(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2,t_1-t_2)$ 应定义为

$$G_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2,t_1-t_2;E_n,N)=$$

$$=-i\langle E_n,N|T_t\{\tilde{\psi}_\alpha(\boldsymbol{r}_1,t_1)\tilde{\psi}^+_\beta(\boldsymbol{r}_2,t_2)\}|E_n,N\rangle,\qquad(17.1)$$

其中 $\tilde{\psi}$, $\tilde{\psi}^+$ 是系統的海森堡算符．(17.1)式中对能量为 $E_n$，粒子数为 $N$ 的系統状态求平均．$T=0$ 时 $G$ 的定义作为特例包括在定义(17.1)内，那时是对系統基态求平均．格林函数(17.1)依賴于系統的总能量 $E$ 和其粒子数．量子統計中更方便的作法，是将諸量看成温度和化学势 $\mu$ 的函数，这相当于从微正則分布变换到巨正則分布(見[1])．按吉布斯分布平均(17.1)式，我們得到：

$$G_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2,t_1-t_2;T,\mu)=$$

$$=\sum_{N,n}e^{\frac{\Omega+\mu N-E_n}{T}}G_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2,t_1-t_2,E_n,N)=$$

$$= -i\mathrm{Sp}\left\{e^{\frac{\Omega+\mu\hat{N}-\hat{H}}{T}} T_t[\tilde{\psi}_\alpha(\boldsymbol{r}_1, t_1)\tilde{\psi}^+_\beta(\boldsymbol{r}_2, t_2)]\right\}. \tag{17.2}$$

多粒子格林函数也按类似公式定义. 声子格林函数为:

$$D(1,2) = -i\mathrm{Sp}\left\{e^{\frac{\Omega-\hat{H}}{T}} T_t[\tilde{\varphi}(1)\tilde{\varphi}(2)]\right\} \tag{17.3}$$

而双粒子格林函数为:

$$G^{II}(1, 2; 3, 4) = \mathrm{Sp}\left\{e^{\frac{\Omega+\mu\hat{N}-\hat{H}}{T}} T_t[\tilde{\psi}(1)\tilde{\psi}(2)\tilde{\psi}^+(3)\tilde{\psi}^+(4)]\right\}. \tag{17.4}$$

格林函数的傅立叶分量 $G(\omega, \boldsymbol{p})$ 满足一个頗为普遍的关系式(兰道[33]). 为推导此式,我們注意海森堡算符矩陣元的时間关系由以下式子表达:

$$\tilde{\psi}_{nm}(\boldsymbol{r}, t) = \psi_{nm}(\boldsymbol{r})e^{i\omega_{nm}t},$$
$$\tilde{\psi}^+_{nm}(\boldsymbol{r}, t) = \psi^+_{nm}(\boldsymbol{r})e^{i\omega_{nm}t}, \tag{17.5}$$
$$\omega_{nm} = E_n - E_m - \mu(N_n - N_m)$$

(这里总有 $N_n = N_m \pm 1$).

如果所討論的系統是均匀而无限的,則算符 $\psi(\boldsymbol{r})$ 的矩陣元与坐标的关系为[1]:

$$\psi_{nm}(\boldsymbol{r}) = \psi_{nm}(0)e^{-i\boldsymbol{p}_{nm}\boldsymbol{r}},$$
$$\psi^+_{nm}(\boldsymbol{r}) = \psi^+_{nm}(0)e^{-i\boldsymbol{p}_{nm}\boldsymbol{r}}, \tag{17.6}$$
$$\boldsymbol{p}_{nm} = \boldsymbol{P}_n - \boldsymbol{P}_m,$$

其中 $\boldsymbol{P}_n, \boldsymbol{P}_m$ 为系統在状态 $n, m$ 的动量. (17.6)式中的 $\psi_{nm}(0)$ 和 $\psi^+_{nm}(0)$ 已与坐标无关. 将(17.5)和(17.6)代入(17.1),得:

$$G_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}, t>0) = -i\sum_{n,m} e^{\frac{\Omega+\mu N_n-E_n}{T}} e^{i\omega_{nm}t-i\boldsymbol{p}_{nm}\boldsymbol{r}}(\psi_\alpha(0))_{nm}(\psi^+_\beta(0))_{mn},$$

$$G_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}, t<0) =$$
$$= \pm i\sum_{n,m} e^{\frac{\Omega+\mu N_m-E_m}{T}} e^{-i\omega_{mn}t+i\boldsymbol{p}_{mn}\boldsymbol{r}}(\psi_\alpha(0))_{nm}(\psi^+_\beta(0))_{mn}.$$

从格林函数的空間表象变换到傅立叶分量:

1) 見第 56 頁附注.



$$G(\boldsymbol{p}, \omega) = \iint G(\boldsymbol{r}, t)e^{-i\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}+i\omega t}d\boldsymbol{r}dt.$$

对空間的积分给出 $\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}_{nm}$ 的 $\delta$ 函数. 对时間的积分須在区間 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, \infty)$ 上分开进行. 这时应利用熟知的公式

$$\int_0^\infty e^{i\alpha x}dx = \pi\delta(\alpha) + \frac{i}{\alpha}.$$

对 $t$ 从 0 积分到 $\infty$,得到 $(N_n = N_m - 1)$:

$$(2\pi)^3\sum_{n,m} e^{\frac{\Omega+\mu N_n-E_n}{T}} (\psi_\alpha(0))_{nm}(\psi^+_\beta(0))_{mn}\delta(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}_{nm}) \times$$
$$\times \left[\frac{1}{\omega + \omega_{nm}} - i\pi\delta(\omega + \omega_{nm})\right].$$

$t < 0$ 区間上的积分给出:

$$\pm(2\pi)^3\sum_{n,m} e^{\frac{\Omega+\mu N_m-E_m}{T}} (\psi_\alpha(0))_{nm}(\psi^+_\beta(0))_{mn}\delta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_{mn}) \times$$
$$\times \left[\frac{1}{\omega - \omega_{mn}} + i\pi\delta(\omega - \omega_{mn})\right],$$

由此得:

$$G_{\alpha\beta}(\boldsymbol{p}, \omega) = -(2\pi)^3\sum_{n,m} e^{\frac{\Omega+\mu N_n-E_n}{T}} (\psi_\alpha(0))_{nm}(\psi^+_\beta(0))_{mn} \times$$
$$\times \delta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_{mn})\left\{\frac{1}{\omega_{mn} - \omega}[1 \pm e^{-\omega_{mn}/T}] + \right.$$
$$\left. + i\pi\delta(\omega - \omega_{mn})[1 \mp e^{-\omega_{mn}/T}]\right\}. \tag{17.7}$$

以下的討論随 $G_{\alpha\beta}$ 和自旋变量的关系而异. 我們只討論系統是非鉄磁的这一情形,此时从对称性考虑得知, $G_{\alpha\beta}$ 应比例于单位张量 $\delta_{\alpha\beta}$:

$$G_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}G, \tag{17.8}$$

$$G(\boldsymbol{p}, \omega) = \frac{1}{2s + 1} G_{\alpha\alpha}(\boldsymbol{p}, \omega) =$$

$$= -(2\pi)^3\sum_{n,m} e^{\frac{\Omega+\mu N_n-E_n}{T}} \frac{1}{2s + 1}\sum_\alpha |(\psi_\alpha(0))_{nm}|^2\delta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_{mn}) \times$$

$$\times\left\{\frac{1}{\omega_{mn}-\omega}\left[1\pm e^{-\omega_{mn}/T}\right]+i\pi\delta(\omega-\omega_{mn})\left[1\mp e^{-\omega_{mn}/T}\right]\right\},\tag{17.9}$$

$s$ 是粒子自旋.

比較(17.9)式花括弧內的两項，我們发現格林函数的实部 $G'$ 和虛部 $G''$ 之間存在着一定关系(兰道[33])．对費米統計得:

$$G'(\boldsymbol{p},\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{cth}\frac{x}{2T}\frac{G''(\boldsymbol{p},x)}{x-\omega}dx,\tag{17.10}$$

其中积分取主値;对玻色統計有:

$$G'(\boldsymbol{p},\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{th}\frac{x}{2T}\frac{G''(\boldsymbol{p},x)}{x-\omega}dx.\tag{17.11}$$

此外从(17.9)式看出,玻色粒子的 $G''$ 永为負值． 相反，費米系統的 $G$ 函数在 $\omega=0$ 点变号; $\omega<0$ 时它取正值,而 $\omega>0$ 时取負值.

从(17.10)和(17.11)式得出, $G$ 不是复变量 $\omega$ 的解析函数．然而函数 $G$ 和另外两个函数——$G^R$ 和 $G^A$——有簡单关系，后者分別在变量 $\omega$ 的上半和下半平面上解析．函数 $G^R$ 通过 $G$ 的实部 $G'$ 和虛部 $G''$ 表示,对費米粒子有

$$G^R(\boldsymbol{p},\omega)=G'(\boldsymbol{p},\omega)+i\operatorname{cth}\frac{\omega}{2T}G''(\boldsymbol{p},\omega)\tag{17.12}$$

对玻色粒子有

$$G^R(\boldsymbol{p},\omega)=G'(\boldsymbol{p},\omega)+i\operatorname{th}\frac{\omega}{2T}G''(\boldsymbol{p},\omega)\tag{17.13}$$

类似地:

$$G^A(\boldsymbol{p},\omega)=G'(\boldsymbol{p},\omega)-i\operatorname{cth}\frac{\omega}{2T}G''(\boldsymbol{p},\omega),$$

$$G^A(\boldsymbol{p},\omega)=G'(\boldsymbol{p},\omega)-i\operatorname{th}\frac{\omega}{2T}G''(\boldsymbol{p},\omega).$$

函数 $G^R$ 和 $G^A$ 滿足色散关系:

$$\operatorname{Re}G^R(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Im}G^R(x)}{x-\omega}dx,$$



$$\operatorname{Re}G^A(\omega)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Im}G^A(x)}{x-\omega}dx,\tag{17.14}$$

由此根据复变函数論的已知定理,得出它們的解析性.

不难驗証, $G^R$ 就是所謂推迟格林函数:

$$G^R(1,2)=$$

$$=\begin{cases}-i\operatorname{Sp}\left\{e^{\frac{\Omega+\mu\hat{N}-\hat{H}}{T}}(\tilde{\psi}(1)\tilde{\psi}^+(2)\pm\tilde{\psi}^+(2)\tilde{\psi}(1))\right\}, & t_1>t_2,\\ 0, & t_1<t_2,\end{cases}\tag{17.15}$$

而 $G^A$ 是超前格林函数:

$$G^A(1,2)=$$

$$=\begin{cases}0, & t_1>t_2,\\ i\operatorname{Sp}\left\{e^{\frac{\Omega+\mu\hat{N}-\hat{H}}{T}}(\tilde{\psi}(1)\tilde{\psi}^+(2)\pm\tilde{\psi}^+(2)\tilde{\psi}(1))\right\} & t_1<t_2.\end{cases}\tag{17.16}$$

其实只要对(17.15)式完成前面对 $G$ 所作的运算,就得到:

$$G^R(\boldsymbol{p},\omega)=-(2\pi)^3\sum_{n,m}e^{\frac{\Omega+\mu N_n-E_n}{T}}|\psi_{nm}(0)|^2(1\pm e^{-\omega_{mn}/T})\times$$

$$\times\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_{mn})\left\{i\pi\delta(\omega-\omega_{mn})-\frac{1}{\omega-\omega_{mn}}\right\}.\tag{17.17}$$

函数(17.17)式显然滿足关系式(17.14).

$G^R$ 的(17.17)式(以及 $G^A$ 的类似公式)可以改写成略有不同的形式:

$$\begin{aligned}G^R(\boldsymbol{p},\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho(\boldsymbol{p},x)}{x-\omega-i\delta}dx,\\ G^A(\boldsymbol{p},\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho(\boldsymbol{p},x)}{x-\omega+i\delta}dx;\quad\delta\to+0,\end{aligned}\tag{17.18}$$

其中 $\rho$ 是实函数

$$\rho(\boldsymbol{p},\omega)=-(2\pi)^3\sum_{n,m}e^{\frac{\Omega+\mu N_n-E_n}{T}}|\psi_{nm}(0)|^2\times$$

$$\times(1\pm e^{-\omega_{mn}/T})\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_{mn})\delta(\omega-\omega_{mn}).\tag{17.19}$$

Lehmann[28] 首先为量子电动力学的格林函数得出了(17.18)型的表示．借助它們可以判断 $G^R$ 和 $G^A$ 在 $\omega$ 很大时的行为．注

意积分$\int_{-\infty}^{\infty} \rho dx$ 是有限的，我們得：

$$G^R \approx G^A \approx -\frac{1}{\omega}\int_{-\infty}^{\infty} \rho dx.$$

另一方面，利用 $G^R$ 的定义(17.15)式，可以算出对 $\rho$ 的积分．事实上，由海森堡算符在 $t_1 = t_2$ 时的对易規則得：

$$G^R(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2; t_1 = t_2 + 0) = -i\delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2),$$

$$G^R(\boldsymbol{p}; t_1 = t_2 + 0) = -i.$$

将 $G^R(\boldsymbol{p}; t_1 - t_2 + 0)$ 通过 $G^R(\boldsymbol{p}, \omega)$ 表达：

$$G^R(\boldsymbol{p}, t_1 = t_2 + 0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega G^R(\boldsymbol{p}, \omega) e^{-i\omega a}, \quad a \to +0,$$

并以 $G^R$ 的(17.18)式代入：

$$-i = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx \rho(x, \boldsymbol{p}) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega a}}{x - \omega - i\delta} = -i\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, \boldsymbol{p}) dx$$

因此

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, \boldsymbol{p}) dx = 1. \tag{17.20}$$

函数 $G^R$ 和 $G^A$ 在 $\omega$ 很大时为：

$$G^R \approx G^A \approx \frac{1}{\omega}, \tag{17.21}$$

即与无相互作用粒子的相应函数一样．

推迟和超前函数滿足一个无穷方程組(Боголюбов 和 Тябликов[31])．然而沒有类似温度格林函数的图解法来計算它．因而确定 $G^R$ 和 $\mathfrak{G}$ 的关系是有意义的． 我們为此建立 $\mathfrak{G}$ 的类似(17.18)的积分表示．

利用定义(11.1)式，我們可写出 $(\tau > 0)$：

$$\mathfrak{G}(\boldsymbol{r}, \tau) = -\sum_{n, m} e^{\frac{\Omega + \mu N_n - E_n}{T}} e^{\omega_{nm}\tau - i\boldsymbol{p}_{nm}\boldsymbol{r}} |\psi_{nm}(0)|^2. \tag{17.22}$$

在(17.22)式中按公式

$$\mathfrak{G}(\boldsymbol{p}, \omega_k) = \int_0^{1/T} d\tau \int d\boldsymbol{r} e^{i\omega_k \tau - i\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}} \mathfrak{G}(\boldsymbol{r}, \tau),$$

变换到傅立叶分量，其中对费米粒子 $\omega_k = (2k + 1)\pi T$，对玻色



粒子 $\omega_k = 2k\pi T$，我們得到：

$$\mathfrak{G}(\boldsymbol{p}, \omega_k) = -(2\pi)^3 \sum_{n, m} e^{\frac{\Omega + \mu N_n - E_n}{T}} |\psi_{nm}(0)|^2 \delta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_{mn}) \times \times \frac{1 \pm e^{-\omega_{mn}/T}}{\omega_{mn} - i\omega_k}. \tag{17.23}$$

函数(17.23)可表示成1)：

$$\mathfrak{G}(\boldsymbol{p}, \omega_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(\boldsymbol{p}, x)}{x - i\omega_n} \tag{17.24}$$

其中 $\rho$ 仍和(17.19)式中一样，由此得到 $\omega_n > 0$ 时 $\mathfrak{G}$ 和 $G^R(\omega)$ 的关系：

$$\mathfrak{G}(\omega_n) = G^R(i\omega_n), \quad \omega_n > 0. \tag{17.25}$$

另一方面，从(17.24)式得到：

$$\mathfrak{G}(\omega_n) = \mathfrak{G}^*(-\omega_n). \tag{17.26}$$

由此可見，知道了在上半平面解析的函数 $G^R(\omega)$，我們可以利用(17.25)和(17.26)式为所有"频率" $\omega_n$ 确定温度格林函数 $\mathfrak{G}$．

然而更有意义的是逆命题：根据已知的 $\mathfrak{G}$ 确定函数 $G^R$．設想我們已知所有頻率 $\omega_n$ 的 $\mathfrak{G}$，并建立了在上半个 $\omega$ 平面解析的函数 $F(\omega)$，它具有以下性质：

$$F(i\omega_n) = \mathfrak{G}(\omega_n), \quad \omega_n > 0.$$

这时根据复变函数論的熟知定理2)，我們立刻得出，在整个上半平面 $F(\omega)$ 和 $G^R(\omega)$ 重合．

这样，求函数 $G^R(\omega)$ 的問題就归結为把 $\mathfrak{G}(\omega_n)$ 从不連續点集上解析延拓到整个上半平面(Абрикосов, Горьков, Дзялошинский[31], Фрадкин[32])．虽然这个問題并沒有一般解，在各种具体情况中解析延拓还是可以完成的．以后各章里我們将遇到若干这种例子．

---

1) 在玻色情况下 $\omega_n = 0$ 时积分(17.24)式似在 $x = 0$ 点有奇异性． 然而从(17.19)式看出，$x$ 很小时 $\rho \sim x$．

2) 所提到的定理是：設在无穷点的序列上二解析函数取相同値，且序列的极限点在解析区内，則二函数重合．这里整数点 $i\omega_n$ 构成无穷序列，而无穷远点是极限点．

知道了推迟格林函数 $G^R(\omega)$、$D^R(\omega)$ 或电磁場推迟格林函数 $D^R_{\alpha\beta}(\omega)$（見 §29），可以决定系統的許多非平衡性质．例如，求得金属中电子 $G^R(\omega)$ 函数的极点，就可以算出电子自由程与能量之关系，而声子 $D^R(\omega)$ 函数的极点，給出声吸收系数．函数 $D^R_{\alpha\beta}(\omega)$ 决定系統的介电系数 $\varepsilon(\omega)$，同时也就决定了金属的低頻电导（$\omega\to 0$ 时有 $\varepsilon(\omega)\to\frac{4\pi i\sigma}{\omega}$）．于是温度格林函数方法中的解析延拓，使我們能越出計算热力学势这个純統計間題，在計算 $\Omega$ 的同时，还确定某些非平衡特性．

然而許多輸运系数（如粘滞性，热传导等）与多粒子格林函数有关．原则上为后者也能求得类似(17.24)的关系式．可是由于这些函数与許多頻率有关（例如，双粒子函数含有三个頻率），一般关系式常常很复杂．在大多数有重要实际意义的情形中，所需格林函数的部分变量重合（在論超导的第七章中就将遇到类似的例子）．这时它們的解析性质无异于单粒子函数，也不难为之求出时間量和温度量的关系．

例如考虑慢中子在液体中的散射．为簡单起見，我們設液体由无自旋的玻色粒子組成．大家知道，慢中子和液体原子的相互作用可以借点作用描述（例如参閱[16]）：

$$V(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}) = 2\pi\frac{m+m_n}{mm_n}a\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}), \tag{17.27}$$

其中 $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{R}$ 为入射中子和液体原子的徑矢，$m_n$, $m$ 分別为它們的质量，$a$——散射幅．对所有液体原子求和(17.12)式，我們就得到慢中子和液体的相互作用能量：

$$V(\boldsymbol{r}) = 2\pi\frac{m+m_n}{mm_n}a\sum_k\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}_k). \tag{17.28}$$

在液体粒子的二次量子化表象中 $V(\boldsymbol{r})$ 的形状是：

$$V(\boldsymbol{r}) = 2\pi\frac{m+m_n}{mm_n}a\psi^+(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r}),$$

其中 $\psi$, $\psi^+$ 是薛定格表象中液体粒子的算符．

动量传递为 $\boldsymbol{q}$ 的中子散射跃迁矩陣元正比于



$$a\int e^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}}\langle i|\psi^+(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r})|f\rangle d\boldsymbol{r}$$

（$i$——液体始态，$f$——終态）．由此得微分散射截面（$\Delta$ 是能量传递）：

$$d\sigma\sim a^2\int d\boldsymbol{r}_1d\boldsymbol{r}_2e^{-i\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)}\langle i|\psi^+(\boldsymbol{r}_1)\psi(\boldsymbol{r}_1)|f\rangle\times$$
$$\times\langle f|\psi^+(\boldsymbol{r}_2)\psi(\boldsymbol{r}_2)|i\rangle\delta(E_i-E_f+\Delta).$$

将上式对終态 $f$ 求和，然后对始态 $i$ 求吉布斯平均：

$$d\sigma\sim a^2\sum_{i,f}\int d\boldsymbol{r}_1d\boldsymbol{r}_2e^{-i\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)}e^{\frac{\Omega+\mu N_i-E_i}{T}}\langle i|\psi^+(\boldsymbol{r}_1)\psi(\boldsymbol{r}_1)|f\rangle\times$$
$$\times\langle f|\psi^+(\boldsymbol{r}_2)\psi(\boldsymbol{r}_2)|i\rangle\delta(E_f-E_i-\Delta).$$

最后将算符 $\psi(\boldsymbol{r})$ 的表达式(17.6)代入，結果有：

$$d\sigma\sim a^2(2\pi)^3V\sum_{i,f}e^{\frac{\Omega+\mu N_i-E_i}{T}}|\langle i|\psi^+(0)\psi(0)|f\rangle|^2\times$$
$$\times\delta(\boldsymbol{p}_{fi}-\boldsymbol{q})\delta(\omega_{fi}-\Delta), \tag{17.29}$$

其中 $V$——系統体积，$\omega_{fi}=E_f-E_i$，$\boldsymbol{p}_{fi}=\boldsymbol{p}_f-\boldsymbol{p}_i$．

容易証明，(17.29)式和以下函数

$$K(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2,t_1-t_2)=$$
$$=-i\mathrm{Sp}\left\{e^{\frac{\Omega+\mu\hat{N}-\hat{H}}{T}}T_t\{\tilde{\psi}^+(\boldsymbol{r}_1,t_1)\tilde{\psi}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\tilde{\psi}^+(\boldsymbol{r}_2,t_2)\tilde{\psi}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\}\right\},$$

的傅立叶分量的虛部只差一个因子，即：

$$d\sigma\sim -Va^2\frac{\mathrm{Im}K(\boldsymbol{q},\Delta)}{1+e^{-\Delta/T}}. \tag{17.30}$$

函数 $K$ 乃是变量成对重合的双粒子格林函数，其解析性质无异于单玻色粒子格林函数 $G$．如果和 $G^R$ 与 $\mathfrak{G}$ 类似地引入 $K^R$ 和 $\mathfrak{K}$，则对后者可以逐字重复关于函数 $G$, $G^R$ 和 $\mathfrak{G}$ 所說的一切，只须将(17.1)——(17.21)式中算符 $\psi(1)$, $\psi^+(2)$ 相应地换成 $\psi^+(1)\psi(1)$ 和 $\psi^+(2)\psi(2)$．

因此为了求 $d\sigma$，只須求得温度格林函数 $\mathfrak{K}$，并确定它在上半平面的解析延拓 $K^R$．此后由下式得截面：

$$d\sigma \sim -Va^2 \frac{\mathrm{Im}\, K^R(\boldsymbol{q}, \Delta)}{1 - e^{-\Delta/T}}. \tag{17.31}$$

有时将(17.31)式写成另一形式:

$$d\sigma = A \frac{S(\boldsymbol{q}, \Delta)}{1 - e^{-\Delta/T}}$$

其中 $A$ 是常数,而 $S(\boldsymbol{q}, \Delta)$ 是所謂結构函数:

$$S(\boldsymbol{q}, \Delta) = 2\mathrm{Im} K^R(\boldsymbol{q}, \Delta).$$

不难驗証,函数 $S(\boldsymbol{q}, \Delta)$ 乃是密度算符对易子平均値的傅立叶分量:

$$\langle [\rho(0), \rho(x)] \rangle = (2\pi)^{-4} \int S(\boldsymbol{q}, \omega) e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r} - i\omega t} d\boldsymbol{q} d\omega.$$

对函数 $S(\boldsymbol{q}, \omega)$ 存在着一个有用的公式(M. Cohen 和 R. P. Feynman[35], P. Nozières, D. Pines[36]),它对于玻色和费米粒子都成立:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \omega d\omega\, S(\boldsymbol{q}, \omega) = \frac{\bar{n} \hbar \boldsymbol{q}^2}{2m}, \tag{17.32}$$

($\bar{n}$ 乃是系統内粒子数密度: $\bar{n} = \langle \rho(x) \rangle$, 而 $m$ 是自由原子质量.) 为了推导此式,最好利用粒子数密度算符和密度通量算符所满足的連續性方程:

$$\frac{\partial \rho(x)}{\partial t} + \mathrm{div} \boldsymbol{j}(x) = 0, \tag{17.33}$$

其中 $\rho(x) = \psi^+(x)\psi(x)$;如果液体粒子間的相互作用与其速度无关,则密度通量算符为:

$$\boldsymbol{j}(x) = -\frac{i\hbar}{2m} (\psi^+ \nabla \psi - (\nabla \psi^+) \psi).$$

方程(17.33)表示物质守恆律. 应用此方程于对易子 $[\rho(1), \rho(2)]$, 当 $t_1 = t_2$ 时有:

$$\frac{\partial}{\partial t_1} [\rho(1), \rho(2)]_{t_1 = t_2} = -\mathrm{div}_1 [\boldsymbol{j}(1), \rho(2)]_{t_1 = t_2},$$

再利用时間变量相同时算符 $\psi$ 和 $\psi^+$ 的对易关系(6.2),就得到:



$$\frac{\partial}{\partial t_1} [\rho(1), \rho(2)]_{t_1 = t_2} = \frac{i\hbar}{m} \mathrm{div}_1 \Big( \rho(1) \nabla_1 \delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) - \frac{1}{2} \delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \nabla_1 \rho(1) \Big).$$

取此算符等式之平均值,并注意由于系統的空間均匀性 $\nabla \bar{n} = 0$, 求得傅立叶分量应满足之等式:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega S(\boldsymbol{q}, \omega) d\omega = \frac{n \boldsymbol{q}^2 \hbar}{m},$$

然而 $S(\boldsymbol{q}, -\omega) = -S(\boldsymbol{q}, \omega)$,故得(17.32)式. 由(17.30)式还得出:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S(\boldsymbol{q}, \omega)}{1 - e^{-\omega/T}} d\omega = \int e^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}} \langle \rho(0) \rho(\boldsymbol{r}) \rangle d\boldsymbol{r} = \bar{n} S(\boldsymbol{q}),$$

式中 $S(\boldsymbol{q})$ (当 $\boldsymbol{q} \neq 0$ 时) 就是我們在 §1 中引入的关联函数. 最后一个关系式变换成以下形式更为方便:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty S(\boldsymbol{q}, \omega) \mathrm{cth} \frac{\omega}{2T} d\omega = \bar{n} S(\boldsymbol{q}).$$

最后我們說明,如何計算(16.12)型的对 $\omega_n$ 的和. 注意对很大的 $\omega_n$ 函数 $\mathfrak{G}$ 为:

$$\mathfrak{G} \approx \frac{1}{i\omega_n} \tag{17.34}$$

(它直接得自(17.24)式和(17.20)式),因而和

$$T \sum_{\omega_n} \mathfrak{G}(\omega_n) e^{-i\omega_n \tau} \tag{17.35}$$

在 $\tau = 0$ 时发散. 实际上从 $\mathfrak{G}(\tau)$ 的定义看出,这表示它在 $\tau = 0$ 处有一跃变.

我們令 $\tau$ 任意小,但不为零. 这时級数(17.35)式收斂. 注意(17.26)式,将它写成:

$$2T \sum_{\omega_n > 0}' \cos \omega_n \tau \mathrm{Re} \mathfrak{G}(\omega_n) + 2T \sum_{\omega_n > 0}' \sin \omega_n \tau \mathrm{Im} \mathfrak{G}(\omega_n)$$

(求和符号上的撇“′”表示, $\omega_n = 0$ 的项, 取权重为1/2). 由(17.34)

式知，当 $\omega_n \to \infty$ 时 $\mathrm{Re}\mathfrak{G}$ 比 $\frac{1}{\omega_n}$ 更快地趋向零，故第一个和中可令 $\tau = 0$. 为計算第二个和須注意，在对 $\omega_n$ 求和时只有 $\omega_n\tau \sim 1$ 起主要作用，卽 $\tau \to 0$ 时大 $\omega_n$ 起作用. 因此对 $\omega_n$ 的求和可換成求积分$\left(T\Sigma \to \frac{1}{2\pi}\int\right)$，当然 $\mathfrak{G}(\omega_n)$ 应取漸近值(17.34)式. 这样就有

$$\lim_{\tau\to 0} 2T \sum_{\omega_n\geq 0}{}' \sin\omega_n\tau \mathrm{Im}\mathfrak{G}(\omega_n) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\tau x}{x}dx = -\frac{1}{2}\mathrm{sign}\tau.$$

我們由此得到計算和(17.35)式的如下規則:

$$\lim_{\tau\to 0} T\sum_{\omega_n}\mathfrak{G}(\omega_n)e^{-i\omega_n\tau} = 2T\sum_{\omega_n\geq 0}{}'\mathrm{Re}\mathfrak{G}(\omega_n) - \frac{1}{2}\mathrm{sign}\tau. \quad (17.36)$$



# 第四章 費米液体理論[1] *

## § 18. 动量传递很小时頂角部分的性質. 零声[2]

在本章里我們首先說明，量子場論方法如何为費米液体一般理論提出根据. 为此我們討論 $T=0$ 时具有任意短程相互作用力的費米粒子系統. 这种情况下格林函数的性质已在 § 7 中研究过. 那里証明了，函数 $G^R$ 在复变数 $\varepsilon$ 下半平面正实半軸[3]附近的极点对应"粒子"型元激发，而函数 $G^A$ 在上半平面 $\varepsilon < 0$ 半軸附近的极点对应空穴. 由于这两个函数都是 $G$ 函数（从变量 $\varepsilon$ 的不同实半軸)的解析延拓，可以肯定，在 $\varepsilon = 0$, $|\boldsymbol{p}| = p_0$ 点的邻域中函数 $G$ 的形状是:

$$G(\boldsymbol{p}, \varepsilon) = \frac{a}{\varepsilon - v(|\boldsymbol{p}| - p_0) + i\delta\,\mathrm{sign}\,(|\boldsymbol{p}| - p_0)}, \quad (18.1)$$

其中系数 $a$ 的意义已在 §7 中說明(見(7.40)); $\delta \to +0$; $v(|\boldsymbol{p}|-p_0)$ 是差 $\varepsilon(\boldsymbol{p})-\mu$ 在 $|\boldsymbol{p}|=p_0$ 附近的展开式(注意 $p_0$ 由方程 $\varepsilon(p_0)=\mu$ 定义). 展开系数 $v$ 是元激发在費米面上的速度，它等于 $p_0/m^*$，其中 $m^*$ 为元激发的有效質量.

我們討論頂角部分 $\Gamma$ 的性質. 在費米液体理論中这个函数和 $G$ 一道起着重要作用. 我們考虑 $p_1$ 接近 $p_3$，而 $p_2$ 接近 $p_4$ 时頂角部分的行为. 引入記号:

$$\Gamma(p_1, p_2; p_1 + k, p_2 - k) \equiv \Gamma(p_1, p_2, k), \quad (18.2)$$

其中能量动量传递 $k = (\boldsymbol{k}, \omega)$ 是很小的四維矢量（卽 $|\boldsymbol{k}| \ll p_0$,

1) 本章里将格林函数的频率变量記为 $\varepsilon$ 比較方便.
2) 本节在相当程度上基于兰道[37]所得的結果.
3) 对于 § 7 中定义的給定 $N$ 的格林函数，这相当于 $\varepsilon > \mu$.
* 本章所討論的内容只适用于排斥力为主的正常費米系統. 在吸引力情况下将出現超导現象，因而(18.1)式不适用(見第七章)——(校者注).

$|\omega| \ll \mu$). 我們来研究表示于图 57 的这种頂角部分中的最簡图形. 这些图形的表达式包含两个格林函数的积分. 对于图形(a)和(b) $k=0$ 并不是特殊情况,然而图形(c)两个格林函数的极点在 $k\to 0$ 时彼此接近起来. 我們以后将看到,这使 $\Gamma$ 中出現奇异

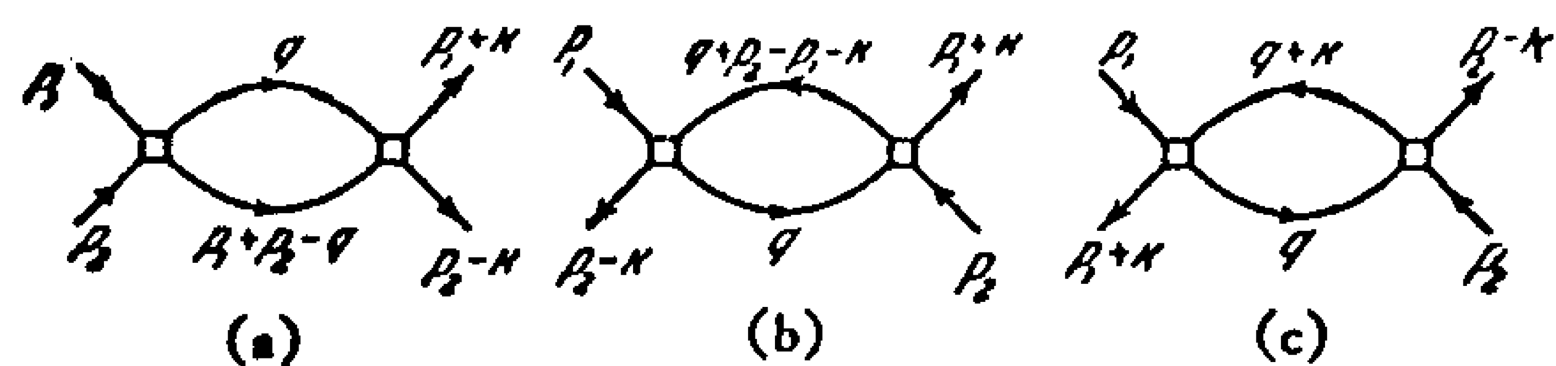


图 57

性. 应当指出,虽然图 57 諸图形式上只适用于成对作用力,事实上(c)型的图对任何相互作用都是特殊的.

以 $\Gamma^{(1)}$ 記一切可能的不包括"奇异元素"($G(p)G(p+k)$綫)的 $\Gamma$ 之图形总合. 不难看出,求和图 58 所示的"阶梯",其中頂点是



图 58

$\Gamma^{(1)}$,而所有的綫都是奇异的,就可得出完全的 $\Gamma$. 这种求和可借积分方程表示:

$$\Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1, p_2, k) = \Gamma^{(1)}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1, p_2) - i\int \Gamma^{(1)}_{\alpha\xi,\gamma\eta}(p_1, q)G(q) \times$$
$$\times G(q+k)\Gamma_{\eta\beta,\xi\delta}(q, p_2, k)\frac{d^4q}{(2\pi)^4}. \qquad (18.3)$$

由于 $k=0$ 时函数 $\Gamma^{(1)}$ 沒有奇异性(短程作用力),我們已令其中 $k=0$.

現在討論(18.3)中的积分. 它由两項合成,一項来自距 $\varepsilon=0$, $|\boldsymbol{p}|=p_0$ 点很远的区域,另一項是在此点邻域的积分,后一項决定整个表达式的奇异性. 如果 $k$ 很小,这个邻域也可以取得很小,在相应的积分里只有在 $G$ 函数极点的邻域的积分才是重要的. 由于两个 $G$ 的变量接近,可认为积分号下其它量都随 $q$ 緩慢变化. 仅当



极点处于实軸的不同側面时,它們才有貢献. 为此必須 $|\boldsymbol{q}|<p_0$, $|\boldsymbol{q}+\boldsymbol{k}|>p_0$,或相反. 注意到 $k$ 很小,就不难看出,这时 $|\boldsymbol{q}|\approx p_0$ 而 $\varepsilon\approx 0$. 因此,在对 $q$ 的积分里与圍繞极点有关的那部分中,乘积 $G(q)G(q+k)$ 可换成 $A\delta(\varepsilon)\delta(|\boldsymbol{q}|-p_0)$.

对 $\varepsilon$ 和 $|\boldsymbol{q}|$ 积分 $G(q)G(q+k)$,就定出系数 $A$. 它等于

$$\frac{2\pi i a^2}{v}\frac{\boldsymbol{kv}}{\omega-\boldsymbol{kv}},$$

其中 $\boldsymbol{v}$ 是絕对值为 $v$、方向为 $\boldsymbol{q}$ 的矢量. 故乘积 $G(q)G(q+k)$ 可写成

$$G(q)G(q+k) = \frac{2\pi i a^2}{v}\frac{\boldsymbol{kv}}{\omega-\boldsymbol{kv}}\delta(\varepsilon)\delta(|\boldsymbol{q}|-p_0)+\varphi(q). \qquad (18.4)$$

其中 $\varphi(q)$ 代表乘积 $G(q)G(q+k)$ 的正規部分,它只在远区域的积分中重要(因而已令其 $k=0$).

$\boldsymbol{k}$, $\omega\to 0$ 时表达式(18.4)的极限和 $\omega$ 与 $\boldsymbol{k}$ 之比密切相关. $\omega\to 0$, $\boldsymbol{k}\to 0$ 时 $\Gamma$ 的极限也是这样.

先討論 $\omega\to 0$, $\dfrac{|\boldsymbol{k}|}{\omega}\to 0$ 时 $\Gamma$ 的极限. 这个极限我們記为 $\Gamma^{\omega}$. 从(18.3)和(18.4)得到:

$$\Gamma^{\omega}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1, p_2) = \Gamma^{(1)}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1, p_2) - i\int \Gamma^{(1)}_{\alpha\xi,\gamma\eta}(p_1, q)\varphi(q) \times$$
$$\times \Gamma^{\omega}_{\eta\beta,\xi\delta}(q, p_2)\frac{d^4q}{(2\pi)^4}. \qquad (18.5)$$

从(18.3)和(18.5)两个方程可消去 $\Gamma^{(1)}$. 为此我們有条件地将这些方程写成算符形式(乘积应理解为积分):

$$\begin{aligned}\Gamma^{\omega} &= \Gamma^{(1)} - i\Gamma^{(1)}\varphi\Gamma^{\omega},\\ \Gamma &= \Gamma^{(1)} - i\Gamma^{(1)}(i\Phi+\varphi)\Gamma.\end{aligned} \qquad (18.6)$$

这里 $i\Phi$ 表示(18.4)的第一項. 从第一个方程式得到:

$$\Gamma^{\omega} = (1+i\Gamma^{(1)}\varphi)^{-1}\Gamma^{(1)}.$$

在(18.6)第二个方程式中将含有 $\varphi$ 的項移至左面,并以算符 $(1+i\Gamma^{(1)}\varphi)^{-1}$ 作用之. 然后得:

$$\Gamma = \Gamma^{\omega} + \Gamma^{\omega}\Phi\Gamma.$$

将此关系写成明显的形式，就有：

$$\Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1, p_2, k) = \Gamma^{\omega}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1, p_2) + \frac{a^2p_0^2}{(2\pi)^3 v}\int \Gamma^{\omega}_{\alpha\xi,\gamma\eta}(p_1, q) \times$$

$$\times\, \Gamma_{\eta\beta,\xi\delta}(q, p_2, k)\frac{v\boldsymbol{k}}{\omega - v\boldsymbol{k}}\, d\Omega. \qquad (18.7)$$

現在取另一极限，即 $|\boldsymbol{k}| \to 0$，$\frac{\omega}{|\boldsymbol{k}|} \to 0$. 这个量我們記为 $\Gamma^k$. 从方程(18.7)求得 $\Gamma^k$ 与 $\Gamma^{\omega}$ 的关系：

$$\Gamma^k_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1, p_2) = \Gamma^{\omega}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1, p_2) - \frac{p_0^2a^2}{v(2\pi)^3}\int \Gamma^{\omega}_{\alpha\xi,\gamma\eta}(p_1, q) \times$$

$$\times\, \Gamma^k_{\eta\beta,\xi\delta}(q, p_2)\, d\Omega. \qquad (18.8)$$

让我們研究 $\boldsymbol{k}$, $\omega$ 很小时函数 $\Gamma(p_1, p_2; k)$ 的极点. 由于在极点邻域 $\Gamma(p_1, p_2; k) \gg \Gamma^{\omega}(p_1, p_2)$，可略去方程式(18.7)右端的 $\Gamma^{\omega}$. 然后注意变量 $p_2$ 以及足标 $\beta$ 和 $\delta$ 在方程式中起着参数的作用. 因此在极点附近函数 $\Gamma$ 可以表示成两个函数的乘积 $\chi_{\alpha\gamma}(p_1; k) \times \chi'_{\beta\delta}(p_2; k)$. 此后方程(18.7)两端的 $\chi'_{\beta\delta}(p_2; k)$ 消去. 引入記号：

$$\nu_{\alpha\gamma}(\boldsymbol{n}) = \frac{\boldsymbol{nk}}{\omega - v\boldsymbol{nk}}\chi_{\alpha\gamma}(p_1; k),$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是沿 $\boldsymbol{p}_1$ 方向的单位矢量. 为 $\nu_{\alpha\gamma}$ 得方程式：

$$(\omega - v\boldsymbol{nk})\nu_{\alpha\gamma}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{nk}\frac{p_0^2a^2}{(2\pi)^3}\int \Gamma^{\omega}_{\alpha\xi,\gamma\eta}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{l})\nu_{\eta\xi}(\boldsymbol{l})\, d\Omega. \qquad (18.9)$$

关系式(18.9)和零声与自旋波的方程式的形状一致(見§2，(2.24)式). 下一节中我們証明，这是完全合乎規律的，因为 $\Gamma$ 的极点决定費米液体的声子型元激发能譜.

方程式(18.9)中 $a^2\Gamma^{\omega}$ 起着費米液体理論(§2)中引入的函数 $f$ 的作用. 这个量本身并沒有直接的物理意义. 然而它借(18.8)式而与 $a^2\Gamma^k$ 相联系. 我們現在就要証明，这个量与两个 $|\boldsymbol{p}_1| = |\boldsymbol{p}_2| = p_0$ 的准粒子向前散射的幅度只差常数因子.

考虑关于两个粒子在真空中散射的輔助問題. 設在时刻 $t = -\infty$ 这个系統的波函数等于 $a^+_{p_3\gamma}a^+_{p_4\delta}\Phi_0$，这里 $\Phi_0$ 是真空波函数. 当 $t = \infty$ 时系統轉入状态 $S(\infty)a^+_{p_3\gamma}a^+_{p_4\delta}\Phi_0$. 因而粒子跃迁到状态 $\boldsymbol{p}_1\alpha$, $\boldsymbol{p}_2\beta$ 的散射幅比例于

$$-i\langle a_{p_1\alpha}a_{p_2\beta}S(\infty)a^+_{p_3\gamma}a^+_{p_4\delta}\rangle_0, \qquad (18.10)$$

其中 $\langle\cdots\rangle_0$ 表示对真空平均. 算符 $S(\infty)$ 由(8.8)式决定，也就是說，它展成 $H_{int}$ 的級数之后，乃是 $\psi$ 算符 $T$ 乘积的积分之和.

根据(8.10)式，每个这样的 $T$ 乘积可表示成 $N$ 乘积的集合. 显然在我們的矩陣元中，只有含有四个 $\psi$ 算符的各种收縮的 $N$ 乘积才是重要的. 由于收縮是普通数字，它們不参与求平均. 这时有两个粒子，因而

$$N(\psi^+(x_3)\psi^+(x_4)\psi(x_1)\psi(x_2)) = \psi^+(x_3)\psi^+(x_4)\psi(x_1)\psi(x_2).$$

把矩陣元(8.10)对真空求平均时，这个 $N$ 乘积給出因子：

$$\exp\{i(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{r}_2\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{r}_3\boldsymbol{p}_3 - \boldsymbol{r}_4\boldsymbol{p}_4) -$$

$$- i(\varepsilon_0(\boldsymbol{p}_1)t_1 + \varepsilon_0(\boldsymbol{p}_2)t_2 - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}_3)t_3 - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}_4)t_4)\}.$$

在(18.10)式中这个因子和只包含收縮的表达式一齐对坐标积分. 結果我們得到一切具有四个顶点的图形的总合，而且每个端点的能量和动量的关系为 $\varepsilon = \varepsilon_0(\boldsymbol{p})$.

这样的量相当于以前引入的双粒子格林函数(10.17)的最后一項去掉外端 $G^{(0)}$ 綫. 在我們所討論的两个粒子在真空中散射問題里，这些 $G^{(0)}$ 函数和完全 $G$ 函数重合. 实际上根据(7.3)有

$$G^{(0)}(\boldsymbol{r}, t) = 0 \quad 当 \quad t < 0.$$

而 $G$ 的修正項的任何图中至少有一对綫方向相反[1]（即一条 $G^0(t > 0)$，一条 $G^{(0)}(t < 0)$），故 $G^{(0)}$ 的任何修正都等于零.

由于同样的原因，顶角部分的图形中只剩下所有 $G^{(0)}$ 綫指向一方的图，如图57(a)之类.

由所有这些得出，散射幅(18.10)等于[2] $\Gamma'_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1p_2, p_3p_4)|_{\varepsilon_i=\varepsilon_0(p_i)}$，其中 $\Gamma'$ 是所討論問題的顶角部分.

1) 图4(a)型的图是例外. 但是§8中已指出，这些图中的 $G^{(0)}(0)$ 应理解为极限 $\lim_{\tau\to 0} G^{(0)}(-\tau)$，它在我們的情况下等于零.

2) 所有的公式中我們省去了常数因子. 与微扰論比較(見第一章)，就看出它等于 $\frac{4\pi}{m}$.

表达双粒子格林函数和顶角部分的关系的(9.17)式这时成为:

$$G^{II'}_{\alpha\beta\gamma\delta}(p_1p_2;p_3p_4)=G^{(0)}(p_1)G^{(0)}(p_2)(2\pi)^4\times$$
$$\times[\delta(p_1-p_3)\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}-\delta(p_1-p_4)\delta_{\beta\gamma}\delta_{\alpha\delta}]+$$
$$+iG^{(0)}(p_1)G^{(0)}(p_2)G^{(0)}(p_3)G^{(0)}(p_4)\Gamma'_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1p_2;p_3p_4). \quad (18.11)$$

此式中的动量满足守恆律. $G^{II'}$ 可以看成两个粒子的格林函数(其名称亦由此而来). (18.11)式第一項对应粒子的自由运动,第二項对应其彼此散射.

回到費米液体. 比較公式(10.17)和(18.11). 当 $\varepsilon$ 很小而 $|\boldsymbol{p}|$ 接近 $p_0$ 时,根据(18.1)式,格林函数的形状很接近自由粒子的函数. 为了使 $G^{II}$ 能够被視为两个相互作用粒子的格林函数,它应当除以 $a^2$. 这时自由項的归一化与能量为 $\varepsilon(\boldsymbol{p})$ 的实际粒子的归一化完全相同.

(10.17)式中第二項对应准粒子的散射. 与实际粒子的公式比較后,我們得出結論,

$$a^2\Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1p_2;p_3p_4)|_{\varepsilon_j=\varepsilon(p_j)-\mu} \quad (18.12)$$

起着准粒子散射幅的作用.

在 $|\boldsymbol{p}_1|=|\boldsymbol{p}_2|=p_0$ 的特殊情形下,所有 $\varepsilon_i=0$. 这时动量传递很小的散射幅等于 $a^2\Gamma(p_1p_2,k)$ $(\omega=0)$,而向前散射幅是 $a^2\Gamma^k$.

如果假定粒子間与自旋有关的相互作用純粹来自交换,则联系 $a^2\Gamma^k$ 和函数 $f=a^2\Gamma^\omega$ 的关系式(18.8)可以解出. 这时我們可将 $a^2\Gamma^k$ 写成:

$$\frac{p_0^2}{\pi^2 v}a^2\Gamma^k=A(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2)+B(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2)\sigma_1\sigma_2, \quad (18.13)$$

而根据(2.28) $\frac{p_0^2}{\pi^2 v}f=F$. $\Phi$ 和 $Z$ 的方程(見(2.28)式)分离:

$$A(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2)=\Phi(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2)-\int\Phi(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}')A(\boldsymbol{n}',\boldsymbol{n}_2)\frac{d\Omega}{4\pi},$$
$$B(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2)=Z(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2)-\int Z(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}')B(\boldsymbol{n}',\boldsymbol{n}_2)\frac{d\Omega}{4\pi}. \quad (18.14)$$



对于各向同性液体,費米面上所有的量只和 $\cos(\widehat{n_1n_2})=\cos x$ 有关. 把它們按 Legendre 多项式展开,例如 $A(x)=\Sigma A_lP_l(\cos x)$. 然后立刻得到展开系数之間的关系:

$$A_l=\frac{\Phi_l}{1+\frac{\Phi_l}{2l+1}},\quad B_l=\frac{Z_l}{1+\frac{Z_l}{2l+1}}. \quad (18.15)$$

## §19. 有效質量. 边界动量和粒子数的关系[1]. 能譜的玻色支. 比热

**1. 几个輔助关系式.** 我們首先为函数 $G$ 推导几个有用的关系式. 設系統处于无限弱的場 $\delta U(t)$ 中,这个場是空間均匀但随时間緩慢变化的. 相互作用哈密頓量为 $H_{int}=\int\psi_\alpha^+(\boldsymbol{r})\delta U(t)\psi_\alpha(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}$. 如果对 $H_{int}$ 变换到相互作用表象,则 $G$ 函数对 $\delta U$ 的級数展开第一級項为:

$$\delta G_{\alpha\beta}(x,x')=-\int d^4y\delta U(t_y)\{\langle T(\tilde\psi_\alpha(x)\tilde\psi_\gamma^+(y)\tilde\psi_\gamma(y)\tilde\psi_\beta^+(x'))\rangle-$$
$$-\langle T(\tilde\psi_\alpha(x)\tilde\psi_\beta^+(x'))\rangle\langle\tilde\psi_\gamma^+(y)\tilde\psi_\gamma(y)\rangle\}.$$

这里 $\tilde\psi$ 是无外場 $\delta U$ 时相互作用粒子的海森堡算符. 利用(10.17)式得:

$$\delta G_{\alpha\beta}(x,x')=\delta_{\alpha\beta}\int d^4y\delta U(t_y)G(x-y)G(y-x')-$$
$$-i\int d^4yd^4x_1\cdots d^4x_4\delta U(t_y)G(x-x_1)G(y-x_2)\times$$
$$\times G(x_3-x')G(x_4-y)\Gamma_{\alpha\gamma;\beta\gamma}(x_1,x_2;x_3,x_4).$$

变换为傅立叶分量,有:

$$\delta G_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}G(p)\delta U(\omega)G(p+k_1)-iG(p)G(p+k_1)\times$$
$$\times\int\Gamma_{\alpha\gamma,\beta\gamma}(p,q;k_1)G(q)\delta U(\omega)G(q+k_1)\frac{d^4q}{(2\pi)^4},$$

其中 $k_1=(0,\omega)$.

---

1) 这些結果是兰道和 Питаевский 得到的,它們部分地发表于文献[38]中.

由于外場 $\delta U$ 不影响粒子自旋，$\delta G_{\alpha\beta}$ 应正比于 $\delta_{\alpha\beta}$. 取 $\frac{1}{2}S_p$，得：

$$\delta G = G(p)\delta U G(p+k_1) - iG(p)G(p+k_1)\times$$
$$\times\frac{1}{2}\int\Gamma_{\alpha\beta,\alpha\beta}(p,q;k_1)G(q)\delta U(\omega)G(q+k_1)\frac{d^4q}{(2\pi)^4}.$$

另一方面，如果在哈密頓量中增加一項：

$$\delta U(t)\int\psi_\alpha^+(\boldsymbol{r})\psi_\alpha(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r} = \delta U(t)\hat{N},$$

則在 $\delta U\to$ 常数的极限情况下，函数 $G$ 只是乘上 $e^{-i\delta U(t-t')}$，这相当于在 $\varepsilon$ 上增加一項 $-\delta U$. 因此 $\omega\to 0$ 时，$\frac{\delta G}{\delta U}\to -\frac{\delta G}{\delta\varepsilon}$. 因而求得：

$$\frac{\partial G}{\partial\varepsilon} = -\{G^2(p)\}_\omega\left[1-\frac{i}{2}\int\Gamma^\omega_{\alpha\beta,\alpha\beta}(p,q)\{G^2(q)\}_\omega\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\right],$$

其中 $\{G^2(p)\}_\omega = \varphi$（見(18.4)）表示 $G(p)G(p+k_1)$ 在 $\omega\to 0$ 时的极限. 我們来討論在 $G(p)$ 的极点附近的这个关系. 这时 $G(p)$ 可写成(18.1)的形状. 除以 $-\{G^2(p)\}_\omega$ 后，得到第一个关系式：

$$\frac{\partial G^{-1}(p)}{\partial\varepsilon} = \frac{1}{a} = 1-\frac{i}{2}\int\Gamma^\omega_{\alpha\beta,\alpha\beta}(p,q)\{G^2(q)\}_\omega\frac{d^4q}{(2\pi)^4}. \quad (19.1)$$

第二个关系式我們推导如次. 設粒子具有无限小电荷 $\delta e$，而系統处于空間略有不均匀但不随时間变化的磁場中. 这时哈密頓量中动量算符要加上一項 $-\frac{\delta e}{c}\boldsymbol{A}$. 如果电荷 $\delta e$ 非常小，则哈密頓量的变化为 $-\frac{\delta e}{mc}\int\psi_\alpha^+(\boldsymbol{r})\hat{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\psi_\alpha(\boldsymbol{r})dV$，其中 $\hat{\boldsymbol{p}}$ 是动量算符. 和前面一样得到格林函数的变化：

$$\delta G = -G(p)\frac{\delta e}{mc}(\boldsymbol{pA})G(p+k_2)+\frac{i}{2}G(p)G(p+k_2)\times$$
$$\times\int\Gamma_{\alpha\beta,\alpha\beta}(p,q;k_2)G(q)\frac{\delta e}{mc}(\boldsymbol{qA})G(q+k_2)\frac{d^4q}{(2\pi)^4},$$

其中 $k_2=(\boldsymbol{k},0)$（我們假定这时 $\boldsymbol{k}$ 很小）. 另一方面，由規范不变



性知道，$\boldsymbol{k}\to 0$ 时，动量的任何函数都应成为 $\boldsymbol{p}-\frac{\delta e}{c}\boldsymbol{A}$ 的函数. 因此，$\boldsymbol{k}\to 0$ 时 $\frac{\delta G}{\delta e\frac{\boldsymbol{A}}{c}} = -\frac{\delta G}{\delta\boldsymbol{p}}$.

因而在 $\delta e\to 0$, $\boldsymbol{k}\to 0$ 的极限情况下，我們得到 $G(p)$ 在极点附近的第二个关系式：

$$\frac{\partial G^{-1}}{\partial\boldsymbol{p}} = -\frac{\boldsymbol{v}}{a} = -\frac{\boldsymbol{p}}{m^*a} =$$
$$= -\frac{\boldsymbol{p}}{m}+\frac{i}{2}\int\Gamma^k_{\alpha\beta,\alpha\beta}(p,q)\frac{\boldsymbol{q}}{m}\{G^2(q)\}_k\frac{d^4q}{(2\pi)^4}. \quad (19.2)$$

考慮系統作为整体以很小的緩慢变化的速度 $\delta\boldsymbol{u}(t)$ 运动时，函数 $G$ 的变化，我們就得到第三个关系式.

系統哈密頓量的变化在于增加了一項

$$-\delta\boldsymbol{u}\hat{\boldsymbol{P}} = -\delta\boldsymbol{u}\int\psi_\alpha^+(\boldsymbol{r})\hat{\boldsymbol{p}}\psi_\alpha(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r},$$

其中 $\hat{\boldsymbol{P}}$ 是系統的总动量算符. 函数 $G$ 的变化表示如下：

$$\delta G = -G(p)\boldsymbol{p}\delta\boldsymbol{u}(\omega)G(p+k_1)+\frac{i}{2}G(p)G(p+k_1)\times$$
$$\times\int\Gamma_{\alpha\beta,\alpha\beta}(p,q;k_1)\boldsymbol{q}\delta\boldsymbol{u}(\omega)G(q)G(q+k_1)\frac{d^4q}{(2\pi)^4},$$

其中 $k_1=(0,\omega)$. 另一方面，$\omega=0$ 时这个变换就等于过渡到以恆定速度 $\delta\boldsymbol{u}$ 运动的坐标系. 根据伽俐略公式，这时系統的能量变化是 $-\delta\boldsymbol{up}$. 频率 $\varepsilon$ 变成 $\varepsilon+\delta\boldsymbol{up}$，因而格林函数的变化是 $\frac{\partial G}{\partial\varepsilon}\boldsymbol{p}\delta\boldsymbol{u}$.

这样，当 $\omega\to 0$, $\delta\boldsymbol{u}\to 0$，在极点附近就得到：

$$\boldsymbol{p}\frac{\partial G^{-1}}{\partial\varepsilon} = \frac{\boldsymbol{p}}{a} = \boldsymbol{p}-\frac{i}{2}\int\Gamma^\omega_{\alpha\beta,\alpha\beta}(p,q)\boldsymbol{q}\{G^2(q)\}_\omega\frac{d^4q}{(2\pi)^4}. \quad (19.3)$$

最后，如果考虑函数 $G$ 在不随时間变化、但空間略有不均匀的弱場 $\delta U(\boldsymbol{r})$ 影响下的变化，就得到最后一个关系式. 这时 $G$ 的变化等于

$$\delta G = G(p)\delta U(\boldsymbol{k})G(p+k_2) - \frac{i}{2}G(p)G(p+k_2)\times$$

$$\times\int \Gamma_{\alpha\beta,\alpha\beta}(p,q;k_2)G(q)\delta U(\boldsymbol{k})G(q+k_2)\frac{d^4q}{(2\pi)^4},$$

其中 $k_2=(\boldsymbol{k},0)$.

另一方面,在恆定外場中如下的平衡条件应成立:

$$\mu+\delta U=\text{常数}.$$

在 $\boldsymbol{k}\to 0$ 的极限,化学势改变小常量 $-\delta U$.

所以在 $\boldsymbol{k}\to 0$, $\delta U\to 0$ 时我們得到:

$$\frac{\partial G^{-1}}{\partial\mu}=1-\frac{i}{2}\int\Gamma^k_{\alpha\beta,\alpha\beta}(p,q)\{G^2(q)\}_k\frac{d^4q}{(2\pi)^4}. \qquad (19.4)$$

这公式对任何动量都成立.

**2. 費米液体理論基本关系的証明.** 借助公式(19.1)—(19.4)以及联系 $\Gamma^k$ 和 $\Gamma^\omega$ 的(18.8)式,可以导出費米液体理論的基本关系式. 順便指出,(18.8)式适用于 $p_1$ 与 $p_2$ 为任意动量时的 $\Gamma$,它們完全不必在費米面附近.

首先把(18.8)式代入(19.2)式. 这时得到:

$$-\frac{\boldsymbol{p}}{m^*a}+\frac{\boldsymbol{p}}{m}=\frac{i}{2}\int\Gamma^\omega_{\alpha\beta,\alpha\beta}(p,q)\frac{\boldsymbol{q}}{m}\{G^2(q)\}_k\frac{d^4q}{(2\pi^4)}-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{p_0^2a^2}{(2\pi)^3v}\int\Gamma^\omega_{\alpha\beta,\alpha\beta}(p,q)\left(-\frac{\boldsymbol{q}}{m^*a}+\frac{\boldsymbol{q}}{m}\right)d\Omega.$$

从(18.4)式得:

$$\{G^2(p)\}_k=\{G^2(p)\}_\omega-\frac{2\pi ia^2}{v}\delta(\varepsilon)\delta(|\boldsymbol{p}|-p_0). \qquad (19.5)$$

将它代入前式第一个积分中并利用(19.3)式. 消去共同因子后,在 $|\boldsymbol{p}|=p_0$, $\varepsilon=0$ 点得到:

$$\frac{1}{m}=\frac{1}{m^*}+\frac{p_0}{2(2\pi)^3}\int a^2\Gamma^\omega_{\alpha\beta,\alpha\beta}(\chi)\cos\chi d\Omega. \qquad (19.6)$$

不难看出,这个公式和(2.12)式一致,而且 $a^2\Gamma^\omega_{\alpha\beta,\alpha\beta}=\mathrm{Sp}_{\sigma\sigma'}f(\chi,\sigma,\sigma')$.

現在証明(2.1)式. 討論函数 $G$ 在极点,即 $|\boldsymbol{p}|\to p_0$, $\varepsilon\to 0$



点附近的表达式(18.1). 此式中系数 $a$, $v$ 和动量 $p_0$ 与化学势 $\mu$ 有关. 对 $\mu$ 微分 $G$ 式. 容易看出,由于对 $\mu$ 微分 $a$ 和 $v$ 而产生的項在极点附近($\sim(|\boldsymbol{p}|-p_0)/\mu$ 或 $\varepsilon/\mu$),比微分 $p_0$ 而来的項小. 这样就得到:

$$\frac{\partial G}{\partial\mu}\approx -G^2\frac{v}{a}\frac{dp_0}{d\mu}.$$

由此

$$v\frac{dp_0}{d\mu}=a\left(\frac{\partial G^{-1}}{\partial\mu}\right)_{\substack{\varepsilon=0\\|\boldsymbol{p}|=p_0}}.$$

将(19.4)式代入,并把 $\Gamma^k$ 通过(18.8)式表达. 这給出:

$$\frac{v}{a}\frac{dp_0}{d\mu}=1-\frac{i}{2}\int\Gamma^\omega_{\alpha\beta,\alpha\beta}(p,q)\{G^2(q)\}_k\frac{d^4q}{(2\pi)^4}-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{p_0^2a^2}{(2\pi)^3v}\int\Gamma^\omega_{\alpha\beta,\alpha\beta}(p,q)\left(\frac{v}{a}\frac{dp_0}{d\mu}-1\right)d\Omega.$$

根据(19.5)代入 $\{G^2\}_k$,并引用(19.1)式,簡化后得出:

$$v\frac{dp_0}{d\mu}=\left(1+\frac{p_0^2}{2(2\pi)^3v}\int a^2\Gamma^\omega_{\alpha\beta,\alpha\beta}(p,q)d\Omega\right)^{-1}. \qquad (19.7)$$

系統中的总粒子数由(7.37)式給定. 对 $\mu$ 微分該式,得到[1]:

$$\frac{d(N/V)}{d\mu}=-2i\int\frac{\partial G(p)}{\partial\mu}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}=$$

$$=2i\int\frac{\partial G^{-1}(p)}{\partial\mu}\{G^2(p)\}_k\frac{d^4p}{(2\pi)^4}.$$

将(19.4)式代入,并借助(18.8)式将 $\Gamma^k$ 通过 $\Gamma^\omega$ 表示. 这时得到:

$$\frac{d(N/V)}{d\mu}=2i\int\{G^2(p)\}_k\frac{d^4p}{(2\pi)^4}+$$

$$+\int\{G^2(p)\}_k\Gamma^\omega_{\alpha\beta,\alpha\beta}(p,q)\{G^2(q)\}_k\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}-$$

$$-\frac{ip_0^2a^2}{(2\pi)^3v}\int\{G^2(p)\}_k\Gamma^\omega_{\alpha\beta,\alpha\beta}(p,q)\left(\frac{v}{a}\frac{dp_0}{d\mu}-1\right)\frac{d^4p}{(2\pi)^4}d\Omega.$$

1) 这里为簡单起見,省去了积分下的因子 $e^{i\varepsilon t}(t\to+0)$.

再代入(19.5)式，并利用(19.1)式．結果得到：

$$\frac{d(N/V)}{d\mu}=2i\int\{G^2(p)\}_\omega\frac{d^4p}{(2\pi)^4}+\int\{G^2(p)\}_\omega\Gamma^\omega_{\alpha\beta,\alpha\beta}(p,q)\times$$

$$\times\{G^2(q)\}_\omega\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}+\frac{8\pi a p_0^2}{(2\pi)^3v}-\frac{8\pi p_0^2(a-1)}{(2\pi)^3v}v\frac{dp_0}{d\mu}-$$

$$-8\pi\left[\frac{p_0^2a^2}{(2\pi)^3v}\right]^2\frac{1}{2}\int\Gamma^\omega_{\alpha\beta,\alpha\beta}(p,q)d\Omega\frac{v}{a}\frac{dp_0}{d\mu}.$$

根据(19.1)式，上式右端前两项乃是：

$$-2i\int\frac{\partial G}{\partial\varepsilon}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}=-2i\int[G(\varepsilon=\infty)-G(\varepsilon=-\infty)]\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3},$$

然而此式等于零，因为按照(7.21)式 $\varepsilon\to\pm\infty$ 时，$G$ 趋向零．这还可从另一个事实看出，即所写出的式子等于改变計算能量的起点时，系統內粒子数的变化．

在剩下的最后一項里根据(19.7)式表出 $\int a^2\Gamma^\omega d\Omega$．我們得到：

$$\frac{d(N/V)}{d\mu}=\frac{8\pi p_0^2}{(2\pi)^3}\frac{dp_0}{d\mu}.\qquad(19.8)$$

以后要証明，此式可以对 $\mu$ 积分．最終有：

$$\frac{N}{V}=\frac{8\pi}{3}\frac{p_0^3}{(2\pi)^3}.$$

借助(19.7)可以驗証声速的公式(2.19)．为此只須指出，由于(19.8)式，(19.7)就和(2.18)式一致．

**3. 能譜的玻色支．** 現在討論声子元激发問題．为此我們作类似(7.32)—(7.33)式的分析．系統的状态在时刻 $t=t'$ 由波函数

$$\Psi_0(t')=\sum_{p,\alpha}\psi_{p\alpha}(t')\psi^+_{p+k\alpha}(t')\Phi_i(t')\qquad(19.9)$$

(这里 $|\boldsymbol{k}|\ll p_0$；$\psi_{p\alpha}$——相互作用表象中动量为 $\boldsymbol{p}$ 的粒子的場算符)描述，考虑它如何随时間变化．依次作与(7.32)—(7.33)一样的运算，得出几率幅度：

$$\langle\Psi_0^*(t)\Psi(t')\rangle=\frac{1}{V^2}\sum_{p_1p_2\alpha\beta}\langle\tilde\psi_{p_2\beta}(t)\tilde\psi^+_{p_2-k\beta}(t)\tilde\psi_{p_1\alpha}(t')\tilde\psi^+_{p_1+k\alpha}(t')\rangle=$$



$$=-\int G^{II}_{\alpha\beta,\alpha\beta}(\boldsymbol{p}_1,t',\boldsymbol{p}_2,t;\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{k},t',\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{k},t)\frac{d\boldsymbol{p}_1}{(2\pi)^3}\frac{d\boldsymbol{p}_2}{(2\pi)^3}=$$

$$=-\int G^{II}_{\alpha\beta,\alpha\beta}(p_1,p_2;p_1+k,p_2-k)\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4p_2}{(2\pi)^4}e^{-i\omega(t-t')}\frac{d\omega}{2\pi},$$

$$k=(\boldsymbol{k},\omega).$$

以 $G^{II}$ 的(10.17)式代入．这时我們得到：

$$\langle\Psi_0(t)\Psi(t')\rangle=\int\left[2\int G(p)G(p+k)\frac{d^4p}{(2\pi)^4}-\right.$$

$$-i\int G(p_1)G(p_1+k)\Gamma_{\alpha\beta,\alpha\beta}(p_1,p_2;k)\times$$

$$\left.\times G(p_2)G(p_2-k)\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4p_2}{(2\pi)^4}\right]e^{-i\omega(t-t')}\frac{d\omega}{2\pi}.\qquad(19.10)$$

方括弧內的表达式(我們記为 $ia\Pi$)可借助(18.4)，(18.7)和(19.1)諸式継續变換．变换的目的在于消去包含离 $|\boldsymbol{p}|=p_0$，$\varepsilon=0$ 点很远区域积分的項．其作法一如本节中其它推导．頂角部分 $\Gamma$ 借助(18.7)通过 $\Gamma^\omega$ 表示，而 $\int\Gamma^\omega\varphi$ 型积分按(19.1)式代換．

結果函数 $\Pi$ 等于：

$$\Pi=\frac{2p_0^2}{(2\pi)^3v}\int\frac{\boldsymbol{kv}}{\omega-\boldsymbol{kv}}d\Omega+\left(\frac{p_0^2}{(2\pi)^3v}\right)^2\int\frac{\boldsymbol{kv}_1}{\omega-\boldsymbol{kv}_1}\times$$

$$\times a^2\Gamma_{\alpha\beta,\alpha\beta}(p_1,p_2;k)\frac{\boldsymbol{kv}_2}{\omega-\boldsymbol{kv}_2}d\Omega_1d\Omega_2.$$

直接驗証表明，$\Pi$ 可以写成 $\frac{p_0^2}{(2\pi)^3v}\int\Pi_{1\alpha\alpha}d\Omega$，其中 $\Pi_{1\alpha\gamma}$ 滿足方程式：

$$(\omega-\boldsymbol{kv})\Pi_{1\alpha\gamma}(\omega,\boldsymbol{k},\boldsymbol{n})-\frac{p_0^2(\boldsymbol{kv})}{(2\pi)^3v}\frac{1}{2}\int a^2\Gamma^\omega_{\gamma\eta,\alpha\xi}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}')\times$$

$$\times\Pi_{1\eta\xi}(\omega,\boldsymbol{k},\boldsymbol{n}')d\Omega'=(\boldsymbol{kv})\delta_{\alpha\gamma}.\qquad(19.11)$$

和在§7中一样，从公式(19.10)看出 $t\to\infty$ 时 $\langle\Psi_0^*(t)\Psi(t)\rangle$ 的数值取决于函数 $\Pi$ 在复变数 $\omega$ 下半平面上的极点．如果在(19.11)式中抛去右端，就得到极点的方程．将所得方程和(18.9)比較，我們看出数值 $\Pi_1$ 相当于 $\boldsymbol{v}$．既然我們关心的不是 $\Pi_1$，而是

$\mathrm{Sp}_\sigma \int \Pi_1 d\Omega$，則只須从(18.9)的解中取在垂直矢量 $\boldsymbol{k}$ 的平面中各向同性的解. 改換函数 $\Psi_0(t)$ 的取法，我們可借同一方法求出函数 $\nu_{\sigma\gamma}$ 所有分量(既对角度，又对自旋)的方程式.

这样就証明了，費米液体中可能存在一类元激发，其能譜由函数 $\Gamma$ 的极点，即方程式(18.9)給定. 这些元激发遵从玻色統計，因为它們对应的算符是費米算符的二次型(見(19.9)式). 在§2里已說明，这类元激发乃是零声譜的各支. 这就闡明了函数 $\Gamma$ 在动量与能量传递很小的区域內的极点的物理意义，同时証明了方程式(18.9)和(2.24)等价.

从(19.9)式得知，声子的元激发可以看成动量接近的准粒子和空穴束縛对.

**4. 边界动量 $p_0$ 和粒子数关系的另一推导法**[1]. 这里我們叙述(2.1)式的另一推导法. 这个推导直接給出(2.1)式，而不是微分关系(19.8).

将决定密度的(7.37)式写成如下形式：

$$\frac{N}{V} = 2i\int\left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\ln G(p) - G(p)\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\Sigma(p)\right]e^{i\varepsilon t}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}, \quad (19.12)$$

其中 $t\to+0$，而 $\Sigma$ 是完全不可約自能部分 $(G=(\varepsilon-\xi-\Sigma)^{-1})$. 我們証明，方括弧中第二項的积分等于零. 为此首先要指出，$\Sigma(p)$ 可看成 $G$ 的某个泛函对 $G(p)$ 的变分导数，即

$$\delta X = \int \Sigma(p)\delta G(p)\frac{d^4p}{(2\pi)^4}. \quad (19.13)$$

計算变分导数 $\frac{\delta\Sigma(p)}{\delta G(p)}$. 为此討論相应于 $\Sigma$ 的图形，并在每个图形中依次变分各条 $G$ 綫. 取图10(c)的自能部分为例. 如果依次将三条 $G$ 綫之一分出，每次将这条 $G$ 綫的頻率和动量記为 $\varepsilon_q, q$，則不难看出，結果等于这个 $G$ 函数乘上两个图形之和，这两个图形正是§18中引入的函数 $\Gamma^{(1)}(p,q)$ 的二級近似，即函数 $\Gamma(p,q)$ 中不含有两个相同 $G$ 函数的"奇异元素"的那部分的二級近似. 对构成 $\Sigma$ 的全部图形完成同一手續，就得到：

$$\delta\Sigma(p) = -\frac{i}{2}\int\Gamma^{(1)}_{\alpha\beta,\alpha\beta}(p,q)\delta G(q)\frac{d^4q}{(2\pi)^4}.$$

由此得：

$$\frac{\delta\Sigma(p)}{\delta G(q)} = -\frac{i}{2}\Gamma^{(1)}_{\alpha\beta,\alpha\beta}(p,q). \quad (19.14)$$

这个量对置換 $p\rightleftharpoons q$ 是对称的；我們知道，这是泛函 $X$ 存在的充分条件.

泛函 $X$ 可以表示成只包括完全 $G$ 綫的图形之总和. 从(19.13)式看出，将 $\Sigma$ 的每个图形(由 $G$ 綫构成的骨架图)以完全 $G$ 綫"封閉"之，就得出所需的图形. 但为了得到由(19.13)定义的 $X$ 的正确表达式，还应引入与图形类型有关的系数(例如只有一种相互作用时，系数等于 $\frac{1}{n}$，此处 $n$ 是頂点数目).

如果所有 $G$ 綫的頻率都改变小量 $\delta\varepsilon^{(0)}$，构成 $X$ 的图形并不改变，这是因为对頻率的积分限乃是 $(-\infty,+\infty)$，而每个頂点的 $\delta$ 函数中带«+»号和带«-»号的 $\varepsilon_i$ 一样多. 由此得出：

$$\frac{\delta X}{\delta\varepsilon^{(0)}} = \int\Sigma(p)\frac{\partial G(p)}{\partial\varepsilon}\frac{d^4p}{(2\pi)^4} = 0.$$

回到(19.12)式. 方括弧中第二項的积分可写成：

$$-2i\int G(p)\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Sigma(p)e^{i\varepsilon t}\frac{d^4p}{(2\pi)^4} =$$

$$= -2i\int G(p)\Sigma(p)\frac{dp}{(2\pi)^4}\Big|_{-\infty}^{\infty} + 2i\int\Sigma(p)\frac{\partial G(p)}{\partial\varepsilon}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}.$$

这里第二項等于零. 至于第一項，則根据(7.21)式，$\varepsilon\to\infty$ 时 $G(p,\varepsilon)\approx G^{(0)}(p,\varepsilon)\approx\frac{1}{\varepsilon}$，即 $\Sigma(p)$ 不能是正比于 $\varepsilon$ 而增长，因而 $\varepsilon\to\infty$ 时 $G(p)\Sigma(p)\to 0$. 所以我們就証明了，(9.12)式第二个积分为零. 因此

$$\frac{N}{V} = 2i\int\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\ln G(p)e^{i\varepsilon t}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}. \quad (19.15)$$

1) 本段采用了 Luttinger 和 Ward[88] 的結果.

§7 中已指出，$G$ 不是解析函数，可是存在着在上半平面解析的函数 $G_R(\varepsilon)$，它在 $\varepsilon>0$ 时等于 $G(\varepsilon)$，而在 $\varepsilon<0$ 时等于 $G^*(\varepsilon)$。还可以証明，函数 $G_R$ 在上半平面沒有零点[1]。由此得：

$$\frac{N}{V} = 2i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\ln G_R(p)e^{i\varepsilon\tau}\frac{d^4p}{(2\pi)^4} +$$

$$+ 2i\int_{-\infty}^{0}\frac{d\varepsilon}{2\pi}\int\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\ln\frac{G(p)}{G^*(p)} =$$

$$= 2i\int_{-\infty}^{0}\frac{d\varepsilon}{2\pi}\int\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\ln\frac{G(p)}{G^*(p)} =$$

$$= \frac{2i}{2\pi}\int\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\ln\frac{G(p)}{G^*(p)}\Bigg|_{-\infty}^{0}$$

（含有 $G_R$ 的积分中可将积分路綫移至 $\operatorname{Im}\varepsilon=\infty$ 的区域，于是它趋向零）。

以 $\varphi$ 記 $G$ 函数的相角，則

$$\frac{N}{V} = -\frac{2}{\pi}\int\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}[\varphi(0)-\varphi(-\infty)].$$

討論从 $\varepsilon=0$ 到 $\varepsilon=-\infty$ 时 $G$ 函数相角的变化。从 §7 知道，$\varepsilon<0$ 时 $\operatorname{Im}G>0$，而在 $\varepsilon=0$ 时 $\operatorname{Im}G=0$。当 $\varepsilon\to-\infty$ 时，$\operatorname{Im}G$ 比 $\operatorname{Re}G$ 減小得更快，而 $\operatorname{Re}G\approx\frac{1}{\varepsilon}<0$。由于 $\operatorname{Im}G$ 的符号一定，在 $G$ 的复数平面上代表对应給定 $\varepsilon$ 的 $\operatorname{Im}G$ 和 $\operatorname{Re}G$ 的点，只能在上半平面移动，即相角只能从 0 变到 $\pi$。既然 $\varepsilon\to-\infty$ 时，$\frac{\operatorname{Im}G}{\operatorname{Re}G}\to-0$，則 $\varphi(-\infty)=\pi$。$\varepsilon=0$ 点的相角，决定于 $\operatorname{Re}G(0,\boldsymbol{p})\equiv G(0,\boldsymbol{p})$ 的符号。如果 $G(0,\boldsymbol{p})>0$，則 $\varphi(0)=0$。如果 $G(0,\boldsymbol{p})<0$，則 $\varphi(0)=\pi$。

这样我們就从(19.15)式得到

$$\frac{N}{V} = 2\int_{G(0,\boldsymbol{p})>0}\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}. \tag{19.16}$$

1) 其証明同于証明复数介电常数 $\varepsilon(\omega)$ 在变量 $\omega$ 上半平面沒有零点（見[52]，§62）。



$G(0,\boldsymbol{p})>0$ 的区域由某个表面包围，在这个表面上函数 $G$ 或趋近零，或趋向无穷大。$G(0,\boldsymbol{p})$ 趋向零（$\Sigma\to\infty$），看来对应超导（見 §34）。至于 $G(0,\boldsymbol{p})$ 趋向无穷大，則这发生在普通費米液体中，而实际出現在費米面上。

在費米面（这里是費米球 $|\boldsymbol{p}|=p_0$）附近 $G(0,\boldsymbol{p})=-\frac{a}{\xi}$，其中 $a>0$，即 $G(0,\boldsymbol{p})>0$ 的区域相当于 $\xi<0$（費米球内部）。算出(19.16)式的积分，就得到(2.1)式。

**5. 比热.** 迄今我們討論了 $T=0$ 时的費米液体。研究温度大于零时費米液体的性質也是有意义的。自然应期待，温度很低时所有的量仍由 $T=0$ 时費米液体的特征量决定。我們以比热的計算为例，説明这一点。我們为此目的而采用的分出温度修正項的方法，在其它計算中也是有用的。

我們从系統总粒子数作为 $\mu$ 和 $T$ 的函数的表达式（16.12）出发：

$$\frac{N(\mu,T)}{V} = 2T\sum_{\varepsilon}\int_{\tau\to+0}\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\mathfrak{G}(\varepsilon,\boldsymbol{p})e^{i\varepsilon\tau}. \tag{19.17}$$

知道了这个函数就可能利用热力学公式

$$\left(\frac{\partial N}{\partial T}\right)_\mu = \left(\frac{\partial S}{\partial\mu}\right)_T. \tag{19.18}$$

决定熵。

考虑 $N$ 的公式中的 $\mathfrak{G}$ 函数。如果注意到，这是完全 $\mathfrak{G}$ 函数，它是含有对頻率求和的一切可能图形相加的結果，則很清楚，$\mathfrak{G}(\varepsilon,\boldsymbol{p})$ 和温度的关系不仅仅在于不連續变量 $\varepsilon=\pi T(2n+1)$。因此我們将它記作 $\mathfrak{G}(T;\varepsilon,\boldsymbol{p})$。从第三章知道，函数 $\mathfrak{G}$ 和自能部分 $\Sigma$ 的关系是：

$$\mathfrak{G}^{-1}(T;\varepsilon,\boldsymbol{p}) = \mathfrak{G}^{(0)-1}(\varepsilon,\boldsymbol{p}) - \Sigma(T;\varepsilon,\boldsymbol{p}). \tag{19.19}$$

注意函数 $\mathfrak{G}^{(0)}(\varepsilon,\boldsymbol{p})$ 仅仅通过 $\varepsilon$ 和温度发生关系。設 $T\to0$，但 $\varepsilon=$ 常数。(19.19) 式变成：

$$\mathfrak{G}^{-1}(0;\varepsilon,\boldsymbol{p}) = \mathfrak{G}^{(0)-1}(\varepsilon,\boldsymbol{p}) - \Sigma(0;\varepsilon,\boldsymbol{p}). \tag{19.20}$$

从(19.19)和(19.20)式求得：

$$\mathfrak{G}^{-1}(T;\varepsilon,\boldsymbol{p})=\mathfrak{G}^{-1}(0;\varepsilon,\boldsymbol{p})-[\Sigma(T;\varepsilon,\boldsymbol{p})-\Sigma(0;\varepsilon,\boldsymbol{p})]. \tag{19.21}$$

函数 $\Sigma(0;\varepsilon,\boldsymbol{p})$ 和 $\Sigma(T;\varepsilon,\boldsymbol{p})$ 的差别在于，其中所有对频率的求和按公式

$$T\sum_{\varepsilon}\to\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\varepsilon$$

换成了积分。

可以用如下方法求得低温下的差 $\Sigma(T)-\Sigma(0)$. 討論 $\Sigma(T)$ 和 $\Sigma(0)$ 的两个相同图形，例如，$\Sigma_1(T)$ 和 $\Sigma_1(0)$. 我們将認为，这些图形是由完全 $\mathfrak{G}$ 綫构成的。如果在 $\Sigma_1(T)$ 中将所有的求和換成积分，則所得图形仍然与 $\Sigma_1(0)$ 不同，这是因为构成此图的諸 $\mathfrak{G}(T)$ 綫与 $\mathfrak{G}(0)$ 不同。在一級近似下只須考虑一条 $\mathfrak{G}(T)$ 綫与 $\mathfrak{G}(0)$ 的差别，而令其它綫等于 $\mathfrak{G}(0)$. 求和与积分的差别也对 $\Sigma_1(T)-\Sigma_1(0)$ 有貢献。只有当相应頻率很低，即数量級为 $T$ 时，后一差別才表現出来。一級近似下有重要意义的頻率范围，是 $\mathfrak{G}$ 綫中某一綫具有数量級为 $T$ 的頻率，而其余的頻率高得多。因此可从图形中分出一条頻率低的 $\mathfrak{G}$ 綫，而在其余地方将求和換成积分，将 $\mathfrak{G}(T)$ 換成 $\mathfrak{G}(0)$.

因此我們必須对 $\Sigma_1$ 图所有的 $\mathfrak{G}$ 綫求变分。計算完全和上节相同。对构成 $\Sigma$ 的全部图形完成这一手續，就得到：

$$\Sigma(T,\varepsilon,\boldsymbol{p})-\Sigma(0,\varepsilon,\boldsymbol{p})=\frac{1}{2}\int\frac{d\boldsymbol{q}}{(2\pi)^3}\frac{d\varepsilon_1}{2\pi}\mathcal{T}^{(1)}_{\alpha\beta,\alpha\beta}(0;\varepsilon,\boldsymbol{p};\varepsilon_1,\boldsymbol{q})[\mathfrak{G}(T,\varepsilon_1,\boldsymbol{q})-\mathfrak{G}(0,\varepsilon_1,\boldsymbol{q})]+\frac{1}{2}\left[T\sum_{\varepsilon_1}-\frac{1}{2\pi}\int d\varepsilon_1\right]\times$$
$$\times\int\frac{d\boldsymbol{q}}{(2\pi)^3}\mathcal{T}^{(1)}_{\alpha\beta,\alpha\beta}(0;\varepsilon,\boldsymbol{p};\varepsilon_1,\boldsymbol{q})\mathfrak{G}(0,\varepsilon_1,\boldsymbol{q}).$$

应用(19.21)式，并对 $\Sigma(T)-\Sigma(0)$ 解此方程(为此只須写出与(18.3)相似的 $\mathcal{T}$ 的方程)，我們就求得：

$$\Sigma(T;\varepsilon,\boldsymbol{p})-\Sigma(0;\varepsilon,\boldsymbol{p})\approx\frac{1}{2}\left[T\sum_{\varepsilon_1}-\frac{1}{2\pi}\int d\varepsilon_1\right]\times$$
$$\times\int\frac{d\boldsymbol{q}}{(2\pi)^3}\mathcal{T}_{\alpha\beta,\alpha\beta}(0;\varepsilon,\boldsymbol{p};\varepsilon_1,\boldsymbol{q})\mathfrak{G}(0;\varepsilon_1,\boldsymbol{q}). \tag{19.22}$$

由此根据(19.21)得到 $\mathfrak{G}(T)$ 的第一級近似：

$$\mathfrak{G}(T;\varepsilon,\boldsymbol{p})=\mathfrak{G}(0;\varepsilon,\boldsymbol{p})+\frac{1}{2}\mathfrak{G}^2(0;\varepsilon,\boldsymbol{p})\times$$
$$\times\left[T\sum_{\varepsilon_1}-\frac{1}{2\pi}\int d\varepsilon_1\right]\int\frac{d\boldsymbol{q}}{(2\pi)^3}\mathcal{T}_{\alpha\beta,\alpha\beta}(0;\varepsilon,\boldsymbol{p};\varepsilon_1,\boldsymbol{q})\mathfrak{G}(0;\varepsilon_1,\boldsymbol{q}).$$

将此式代入(19.17)，然后减去 $\frac{1}{V}N(\mu,0)$. 显然我們可写出准确到一級項的式子：

$$\frac{1}{V}[N(\mu,T)-N(\mu,0)]=2\left[T\sum_{\varepsilon}-\frac{1}{2\pi}\int d\varepsilon\right]\mathfrak{G}(0;\varepsilon,\boldsymbol{p})+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int d\varepsilon\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\mathfrak{G}^2(0;\varepsilon,\boldsymbol{p})\left[T\sum_{\varepsilon_1}-\frac{1}{2\pi}\int d\varepsilon_1\right]\times$$
$$\times\int\frac{d\boldsymbol{q}}{(2\pi)^3}\mathcal{T}_{\alpha\beta,\alpha\beta}(0;\varepsilon,\boldsymbol{p};\varepsilon_1,\boldsymbol{q})\mathfrak{G}(0;\varepsilon_1,\boldsymbol{q})=$$
$$=2\left[T\sum_{\varepsilon}-\frac{1}{2\pi}\int d\varepsilon\right]\int\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\mathfrak{G}(0;\varepsilon,\boldsymbol{p})\times$$
$$\times\left[1+\frac{1}{2}\int\frac{d\varepsilon_1}{2\pi}\int\frac{d\boldsymbol{q}}{(2\pi)^3}\mathcal{T}_{\alpha\beta,\alpha\beta}(0;\varepsilon,\boldsymbol{p};\varepsilon_1,\boldsymbol{q})\mathfrak{G}^2(0;\varepsilon_1,\boldsymbol{q})\right]. \tag{19.23}$$

最后一个等式里应用了对称性質：

$$\mathcal{T}_{\alpha\beta,\alpha\beta}(\varepsilon,\boldsymbol{p};\varepsilon_1,\boldsymbol{q})=\mathcal{T}_{\alpha\beta,\alpha\beta}(\varepsilon_1,\boldsymbol{q};\varepsilon,\boldsymbol{p}).$$

这个表达式还可以略加变換。与(19.4)式的推导完全类似，我們可在温度方法[1]中求出相应的公式：

$$\frac{\partial\mathfrak{G}^{-1}(T;\varepsilon,\boldsymbol{p})}{\partial\mu}=$$
$$=1+\frac{1}{2}T\sum_{\varepsilon_1}\int\frac{d\boldsymbol{q}}{(2\pi)^3}\mathcal{T}_{\alpha\beta,\alpha\beta}(T;\varepsilon,\boldsymbol{p};\varepsilon_1,\boldsymbol{q})\mathfrak{G}^2(T;\varepsilon_1,\boldsymbol{q}).$$

在 $T\to0$，$\varepsilon=$ 常数的极限得：

1) "温度方法"指"温度格林函数方法"或"$T>0$ 时的量子場論方法"，我們按原著直譯，以下均同——譯者注。

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\mathfrak{G}^{-1}(0;\varepsilon,\boldsymbol{p}) =$$

$$= 1+\frac{1}{2}\int\frac{d\varepsilon_1}{2\pi}\int\frac{d\boldsymbol{q}}{(2\pi)^3}\mathcal{T}_{\alpha\beta,\alpha\beta}(0;\varepsilon,\boldsymbol{p};\varepsilon_1,\boldsymbol{q})\mathfrak{G}^2(0;\varepsilon_1,\boldsymbol{q}).$$

代入(19.23)式,有:

$$\frac{1}{V}[N(\mu,T)-N(\mu,0)] =$$

$$= 2\left[T\sum_{\varepsilon}-\frac{1}{2\pi}\int d\varepsilon\right]\int\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\mathfrak{G}(0;\varepsilon,\boldsymbol{p})\frac{\partial}{\partial\mu}\mathfrak{G}^{-1}(0;\varepsilon,\boldsymbol{p}) =$$

$$= -2\left[T\sum_{\varepsilon}-\frac{1}{2\pi}\int d\varepsilon\right]\int\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\frac{\partial}{\partial\mu}\ln\mathfrak{G}(0;\varepsilon,\boldsymbol{p}).$$

在 $\mu=$ 常数条件下对温度微分上式,与(19.18)比較得:

$$\frac{S}{V} = -2\frac{\partial}{\partial T}\left[T\sum_{\varepsilon}\int\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\ln\mathfrak{G}(0;\varepsilon,\boldsymbol{p})\right]. \qquad (19.24)$$

可用以下方式作进一步計算. 借助温度函数 $\mathfrak{G}$ 和推迟与超前格林函数的关系,将熵的表达式写成两个迴路积分之和:

$$\frac{S}{V} = -2\frac{\partial}{\partial T}\left\{\int\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\left[\frac{1}{4\pi i}\int_{C_1}\operatorname{th}\frac{\varepsilon}{2T}\ln G_R(\varepsilon,\boldsymbol{p})d\varepsilon+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{4\pi i}\int_{C_2}\operatorname{th}\frac{\varepsilon}{2T}\ln G_A(\varepsilon,\boldsymbol{p})d\varepsilon\right]\right\} =$$

$$= 2\int\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\pi iT}\left[\int_{C_1}\varepsilon\left(-\frac{\partial n_F(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right)\ln G_R(\varepsilon,\boldsymbol{p})d\varepsilon+\right.$$

$$\left.+\int_{C_2}\varepsilon\left(-\frac{\partial n_F}{\partial\varepsilon}\right)\ln G_A(\varepsilon,\boldsymbol{p})d\varepsilon\right],$$

其中 $n_F$——費米函数,而迴路 $C_1$ 和 $C_2$ 示于图 59(a). 函数 $G_R$ 在上半平面沒有零点,而函数 $G_A$ 在下半平面沒有零点[1]. 利用这个性质和 $G_R$, $G_A$ 在相应半平面中的解析性,以及 $\varepsilon\to\pm\infty$ 时 $\frac{\partial n_F}{\partial\varepsilon}$ 迅速趋向零,可令迴路 $C_1$, $C_2$ 沿实軸伸展(見图 59(b)). 这时得到:

1) 見第 178 頁附注.



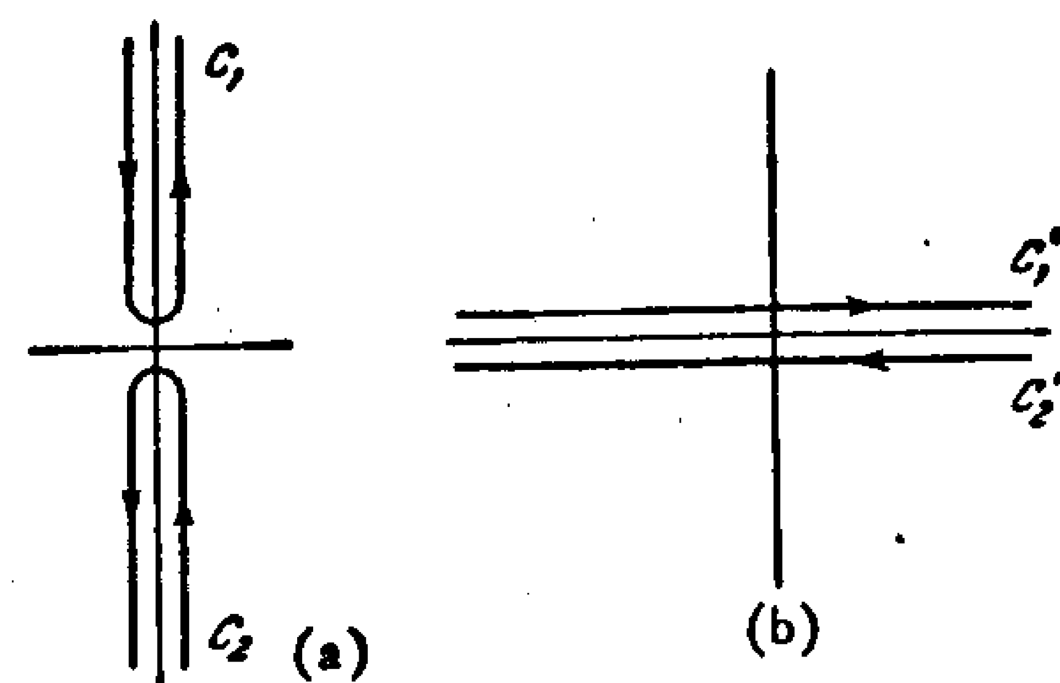



图 59

$$\frac{S}{V} = 2\int\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\pi iT}\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon\left(-\frac{\partial n_F(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right)[\ln G_R(\varepsilon,\boldsymbol{p})-$$

$$-\ln G_A(\varepsilon,\boldsymbol{p})]d\varepsilon.$$

利用普通的費米函数积分規則[1],得:

$$\frac{S}{V} = \frac{2\pi^2T}{3}\frac{1}{2\pi i}\int\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\left[G_R^{-1}\frac{\partial G_R}{\partial\varepsilon}-G_A^{-1}\frac{\partial G_A}{\partial\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} =$$

$$= \frac{2\pi^2T}{3}\frac{1}{2\pi}\int\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}2\operatorname{Im}\left[G_R^{-1}\frac{\partial G_R}{\partial\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0}.$$

后一等式是由于实軸上 $G_R^* = G_A$. 不难看出,对 $\boldsymbol{p}$ 的积分主要取在費米面附近. 代以 $G_R\approx\dfrac{a}{\varepsilon-\xi+i\delta}$,得:

$$\frac{S}{V} = \frac{p_0m^*}{3}T. \qquad (19.25)$$

显然比热就等于熵.

注意在計算温度修正項时,只有 $\varepsilon=0$, $\xi=0$ 点(即函数 $G_R$(或 $G$)在 $T=0$ 的实极点)的邻域才是重要的. 看来,这是計算任何温度修正項的共同規律. 即在第一級近似下温度修正項永远由函数 $G$(或 $\Gamma$)在 $T=0$ 的极点决定,换言之,它們由元激发能譜决定.

**6. 費米液体中准粒子的衰减[2].** 表征費米液体能譜的基本参

1) $\int_{-\infty}^{\infty}f(\varepsilon)\frac{\partial n_F(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}d\varepsilon = -f(0)-\frac{\pi^2}{6}T^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial\varepsilon^2}\right]_{\varepsilon=0}+\cdots.$

2) 本段基于 Г. М. Элиашберг 的工作[140].

数，即常数 $a$ 和 $v$，随温度的变化甚弱．从一般考虑可知，修正项应正比于 $(T/\varepsilon_F)^2$．这个結論不适用于衰減．在 §2 中以稀薄气体为例（見第 17 和 18 頁上的注），我們証明了，当 $\varepsilon \gg T$ 时衰減应比例于 $\varepsilon^2$，而在 $\varepsilon \ll T$ 时，和 $T^2$ 成正比．因此，温度大于零的情形对于計算衰減是有意义的．

同时有两个或两个以上准粒子参加的各种碰撞过程，导致准粒子的衰減．統計簡并限制了准粒子散射所能涉及的相空間范围，因而可以認为几率最大的过程只有两个准粒子参与．

推迟格林函数 $G_R(\varepsilon, \boldsymbol{p})$ 的虛部，在頻率 $\varepsilon$ 很小而动量 $\boldsymbol{p}$ 接近費米边界动量时，决定准粒子的衰減．在前一段里算出了 $G_R(\varepsilon, \boldsymbol{p})$ 对温度展开的第一項．为了求得这項，我們在温度自能部分 $\Sigma(\varepsilon, \boldsymbol{p})$ 的图形中，把所有对不連續頻率 $\varepsilon_n$ 的求和，除了一个之外，都換成了求积．換言之，我們从 $\Sigma$ 的每个图形中分出了一条綫，并認为它对应的頻率很小．假定其它頻率是大的，相应的求和就換成了积分．

然而这样求得的 $G_R$ 的修正項却是純实数．因此我們須計算对 $\varepsilon$ 和 $T$ 的下一个展开項．为此应認为每个图形中不是一个，而是两个頻率小，相应地要保留两个对不連續頻率的求和．这相当于在温度自能部分的图形中分出三条 $\mathfrak{G}$ 綫．这时任意图形的形状示于图 60 中．和从前一样，可以用几种方式分出这些綫来．我們認为其余頻率很大，因而在图 60 中以实心方框代表的頂角部分中，可令 $T = 0$，而 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon = 0$．这样我們就得到：

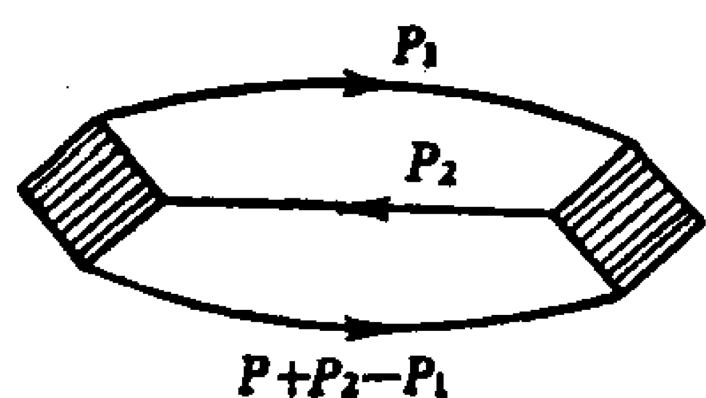


图 60

$$-\frac{T^2}{(2\pi)^6}\sum_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}\int d\boldsymbol{p}_1 d\boldsymbol{p}_2 \Gamma_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}_2; \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1)\times$$
$$\times \Gamma_2(\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_1; \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p})\mathfrak{G}(\boldsymbol{p}_1)\mathfrak{G}(\boldsymbol{p}_2)\mathfrak{G}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1) \tag{19.26}$$

其中 $\Gamma_1$ 和 $\Gamma_2$ 对应一定图形和分出三条綫的一定方式（这里对自旋也求和）．



現在从对虛頻率的求和变換为对实頻率的求积．先为 $\varepsilon_2$ 完成此变換．根据函数 $\mathfrak{G}$ 和 $G$ 的解析性質，可将对 $\varepsilon_2$ 的求和換成迴路积分

$$-\frac{T}{2(2\pi)^7 i}\int d\boldsymbol{p}_1 d\boldsymbol{p}_2 \Gamma_1\Gamma_2\Big\{\sum_{\varepsilon_1>\varepsilon}\mathfrak{G}(\varepsilon_1)\int_C d\varepsilon_2\, \mathrm{th}\left(\frac{\varepsilon_2}{2T}\right)\cdot$$
$$\cdot G_{RA}(\varepsilon_2)G_{RA}(\varepsilon_2+i\varepsilon-i\varepsilon_1)+$$
$$+\sum_{\varepsilon_1<\varepsilon}\mathfrak{G}(\varepsilon_1)\int_{C'} d\varepsilon_2\, \mathrm{th}\left(\frac{\varepsilon_2}{2T}\right)G_{RA}(\varepsilon_2)G_{RA}(\varepsilon_2+i\varepsilon-i\varepsilon_1)+$$
$$+\mathfrak{G}(\varepsilon)\int_{C''} d\varepsilon_2\, \mathrm{th}\left(\frac{\varepsilon_2}{2T}\right)G^2_{RA}(\varepsilon_2)\Big\}$$

积分路綫 $C$ 示于图 61 中．积分路綫 $C'$ 和 $C$ 的差别在于，直綫 $\mathrm{Im}\,\varepsilon_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon$ 位于直綫 $\mathrm{Im}\,\varepsilon_2 = 0$ 之下．积分路綫 $C''$ 只有水平部分．$G_{RA}(\varepsilon)$ 在 $\mathrm{Im}\,\varepsilon > 0$ 时表示 $G_R(\varepsilon)$，而当 $\mathrm{Im}\,\varepsilon < 0$ 时表示 $G_A(\varepsilon)$．对大圓的积分趋向零，因而只剩下沿水平綫的积分．这就导致：

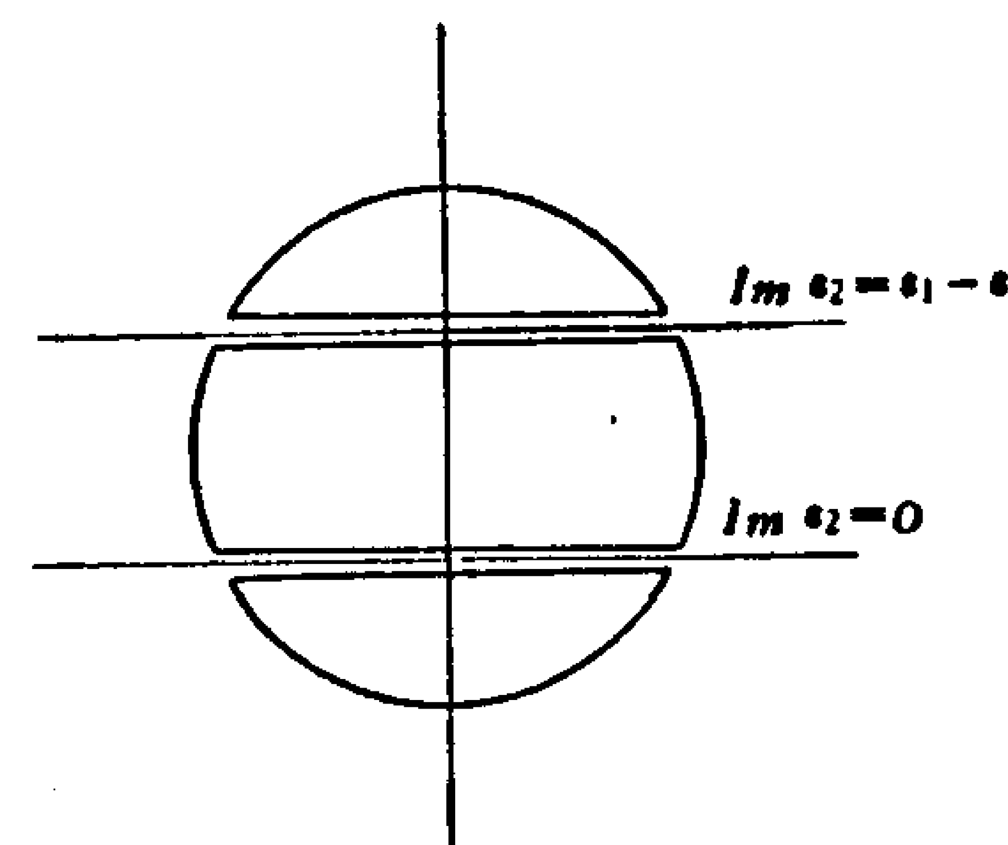


图 61

$$-\frac{T}{(2\pi)^7}\int d\boldsymbol{p}_1 d\boldsymbol{p}_2 \Gamma_1\Gamma_2\Big\{\sum_{\varepsilon_1>\varepsilon}\mathfrak{G}(\varepsilon_1)\int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon_2\, \mathrm{th}\left(\frac{\varepsilon_2}{2T}\right)\times$$
$$\times[\mathrm{Im}\,G_R(\varepsilon_2)G_A(\varepsilon_2+i\varepsilon-i\varepsilon_1)+$$
$$+\mathrm{Im}\,G_R(\varepsilon_2)G_R(\varepsilon_2+i\varepsilon_1-i\varepsilon)]+$$
$$+\sum_{\varepsilon_1<\varepsilon}\mathfrak{G}(\varepsilon_1)\int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon_2\, \mathrm{th}\left(\frac{\varepsilon_2}{2T}\right)[\mathrm{Im}\,G_R(\varepsilon_2)G_R(\varepsilon_2+$$
$$+i\varepsilon-i\varepsilon_1)+\mathrm{Im}\,G_R(\varepsilon_2)G_A(\varepsilon_2+i\varepsilon_1-i\varepsilon)]+$$
$$+\mathfrak{G}(\varepsilon)\int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon_2\, \mathrm{th}\left(\frac{\varepsilon_2}{2T}\right)\mathrm{Re}\,G_R(\varepsilon_2)\cdot\mathrm{Im}\,G_R(\varepsilon_2)\Big\}. \tag{19.27}$$

这里应用了关系式 $G_A(\varepsilon) = G_R^*(\varepsilon)$，因而 $G_R(\varepsilon) - G_A(\varepsilon) = 2i\,\mathrm{Im}\,G_R(\varepsilon)$，同时还利用了周期性 $\mathrm{th}(x + i\pi n) = \mathrm{th}\,x$．

现在将对 $\varepsilon_1$ 的求和换成迴路积分. 这时得到 $(\varepsilon > 0)$:

$$-\frac{1}{(2\pi)^8}\int d\boldsymbol{p}_1 d\boldsymbol{p}_2 \Gamma_1\Gamma_2\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon_1 \operatorname{cth}\left(\frac{\varepsilon_1}{2T}\right) G_R(\varepsilon_1 + i\varepsilon) \times\right.$$
$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon_2 \operatorname{th}\left(\frac{\varepsilon_2}{2T}\right)[\operatorname{Im} G_R(\varepsilon_2)\operatorname{Im} G_R(\varepsilon_2+\varepsilon_1) -$$
$$- \operatorname{Im} G_R(\varepsilon_2)\operatorname{Im} G_R(\varepsilon_2-\varepsilon_1)] +$$
$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon_1 \operatorname{th}\left(\frac{\varepsilon_1}{2T}\right)\operatorname{Im} G_R(\varepsilon_1)\int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon_2 \operatorname{th}\left(\frac{\varepsilon_2}{2T}\right) \times$$
$$\times [\operatorname{Im} G_R(\varepsilon_2) G_R(\varepsilon_2 + i\varepsilon - \varepsilon_1) +$$
$$\left. + \operatorname{Im} G_R(\varepsilon_2) G_A(\varepsilon_2 + \varepsilon_1 - i\varepsilon)]\right\}. \tag{19.28}$$

注意这里围繞 $\operatorname{cth}\dfrac{\varepsilon_1}{2T}$ 的极点 $\varepsilon_1 = 0$ 的积分, 正好与 (19.27) 的最后一項相消了.

为了求出对 $\operatorname{Im}\Sigma_R(\varepsilon, \boldsymbol{p})$ 的貢献, 只須将 $i\varepsilon$ 换成 $\varepsilon + i\delta$, 并取虚部. 結果可写为:

$$-\frac{1}{(2\pi)^8}\int d\boldsymbol{p}_1 d\boldsymbol{p}_2 \Gamma_1\Gamma_2 \int d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \operatorname{Im} G_R(\varepsilon_1, \boldsymbol{p}_1)\operatorname{Im} G_R(\varepsilon_2, \boldsymbol{p}_2) \times$$
$$\times \operatorname{Im} G_R(\varepsilon_2 + \varepsilon - \varepsilon_1, \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_1) \times$$
$$\times \left(\operatorname{th}\frac{\varepsilon_1}{2T} - \operatorname{cth}\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{2T}\right)\left(\operatorname{th}\frac{\varepsilon_2}{2T} - \operatorname{th}\frac{\varepsilon_2 + \varepsilon - \varepsilon_1}{2T}\right) \tag{19.29}$$

由于我們只关心很小的 $\varepsilon$,积分中重要的是小的 $\varepsilon_1$ 和 $\varepsilon_2$,以及 $p_0$ 附近的动量值. 这时 $\operatorname{Im} G_R(\varepsilon, \boldsymbol{p}) \approx -a\pi\delta(\varepsilon - \xi(\boldsymbol{p}))$. 由此可見, 这个方法确乎可以考虑双准粒子碰撞. 对分出三条綫的一切方式求和, 然后对一切图形求和, 我們得到最終表达式, 它和 (19.29) 的差别只在于因子 $\Gamma_1\Gamma_2$ 换成了

$$\frac{1}{2}\Gamma(\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2; \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1)\Gamma(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_1; \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}) =$$
$$= \frac{1}{2}|\Gamma(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}_2; \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1)|^2.$$



这里出现了因子 1/2,是因为分出的三条綫中有两条是等价的. 我們現在将看到,(19.29)式的数量級为 $\dfrac{\varepsilon^2}{p_0 v}$ 或 $\dfrac{T^2}{p_0 v}$. 我們在此不作証明而指出,如果在 $\Sigma$ 的图形中分出三条以上实綫,则可得到更高阶的小量.

以 $\delta$ 函数代替 $\operatorname{Im} G_R(\varepsilon, \boldsymbol{p})$,并注意对动量的积分取在費米面附近, 即 $d\boldsymbol{p} \to \left(\dfrac{p_0^2}{v}\right) d\xi d\Omega$,我們从(19.29)式得到:

$$a\operatorname{Im}\Sigma_R(\varepsilon) = -\frac{\pi}{32}\operatorname{ch}\frac{\varepsilon}{2T}\int\frac{d\Omega_1 d\Omega_2}{(4\pi)^2} \times$$
$$\times \left|\frac{a^2 p_0^2}{\pi^2 v}\Gamma(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}_2; \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1)\right|^2 \times$$
$$\times \int d\xi_1 d\xi_2 \frac{\delta(\varepsilon + \xi_2 - \xi_1 - \xi_3)}{\operatorname{ch}\dfrac{\xi_1}{2T}\operatorname{ch}\dfrac{\xi_2}{2T}\operatorname{ch}\dfrac{\xi_3}{2T}} \tag{19.30}$$

其中 $\xi_3 = \xi(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1)$.

积分中的 $\delta$ 函数实际上只是限制了动量的值: $|\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1| = p_0$. 因此在 (19.30) 式中可完成对 $\xi_1$ 和 $\xi_2$ 的积分. 最終結果是:

$$a\operatorname{Im}\Sigma_R(\varepsilon) = -\frac{\pi^3}{16}A\frac{T^2}{p_0 v}\left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{\pi T}\right)^2\right], \tag{19.31}$$

$$A = \int\frac{d\Omega_1 d\Omega_2}{(4\pi)^2}\left|\frac{a^2 p_0^2}{\pi^2 v}\Gamma(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}_2; \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1)\right|^2 \times$$
$$\times \delta(|\boldsymbol{n} + \boldsymbol{n}_2 - \boldsymbol{n}_1| - 1),$$

这里 $\boldsymbol{n}_i$ 为 $\boldsymbol{p}_i$ 方向的单位矢量.

从这个式子看出, $\dfrac{a^2 p_0^2}{\pi^2 v}\Gamma(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}_2; \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1)$ 起着准粒子互相散射幅的作用. 它只与角度有关, 因而可在 $T = 0$ 时計算. 前面已經講过,(19.31)式 $A$ 中对自旋的求和未明显地写出.

函数 $\Sigma_R$ 的解析性質同于 $G_R$, 因此时間自能函数的修正項虚部为:

$$\mathrm{Im}\,\Sigma(\varepsilon) = \mathrm{Im}\,\Sigma_R(\varepsilon)\,\mathrm{th}\frac{\varepsilon}{2T}. \tag{19.32}$$

## § 20. 相碰粒子总动量很小时頂角部分的奇異性[1)]

除了能量和动量传递很小时的奇异性，頂角部分还有一个奇异性；以后将看到(第七章)，它对超导理論是有意义的．现在我們考虑总动量 $p_1 + p_2$ 很小的情况，这时能量 $\varepsilon_1$ 和 $\varepsilon_2$，以及动量之和 $\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{s}$ 都小．

討論图 57 所示的图形．不难看出，这时图 57.(a) 是奇异图形．正是这个图形中积分下两个 $G$ 函数的极点彼此接近．

我們用与 § 18 类似的方法处理这个頂角部分．引入記号：

$$\Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1, p_3, s) = \Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1, -p_1+s; p_3, -p_3+s).$$

再以 $\Gamma^{(2)}$ 記所有"非奇异"图形之和．在 $\Gamma^{(2)}$ 中可令 $s = 0$．为了得到完全的 $\Gamma$，须对图 58 型的"阶梯"图形求和．在这样作以前，先对 $s$ 的第四个分量（記作 $\lambda$）微分 $\Gamma$．每个阶梯图这时給出若干項之和，每一項中只有一个"台阶"被微分．如果固定所微分的"台阶"，則其左右两端的图形分成两个独立阶梯，每側阶梯之和又是完全頂角部分．这样就得到方程式：

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1, p_3; s) = \frac{i}{2}\int\Gamma_{\alpha\beta,\xi\eta}(p_1, q; s)G(q)\frac{\partial}{\partial\lambda}\times$$

$$\times G(-q+s)\Gamma_{\xi\eta,\gamma\delta}(q, p_3; s)\frac{d^4q}{(2\pi)^4}. \tag{20.1}$$

积分下的表达式 $G(q)\frac{\partial}{\partial\lambda}G(-q+s)$ 在 $\varepsilon = 0$，$|\boldsymbol{q}| = p_0$ 附近为：

$$-\frac{a^2}{[\varepsilon - v(|\boldsymbol{q}| - p_0) + i\delta\,\mathrm{sign}(|\boldsymbol{q}| - p_0)]}\times$$

1) 本节基于 А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, Л. Д. Ландау 和 И. М. Халатников 的未发表的結果．



$$\times\frac{1}{[\varepsilon - \lambda + v(|\boldsymbol{q} - \boldsymbol{s}| - p_0) - i\delta\,\mathrm{sign}(|\boldsymbol{q} - \boldsymbol{s}| - p_0)]^2}. \tag{20.2}$$

由此看出，对 $\frac{d^4q}{(2\pi)^4} \to \frac{p_0^2 d|\boldsymbol{q}|\,d\Omega\,d\varepsilon}{(2\pi)^4}$ 的积分基本上取在 $|\boldsymbol{q}| = p_0$，$\varepsilon = 0$ 的邻域中．如果假定 $\Gamma$ 在这个积分区間里变化不快，則对 $d|\boldsymbol{q}|$ 和 $d\varepsilon$ 积分时，可認为 $\Gamma$ 是常数而只积分(20.2)式．結果我們得到：

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1, p_3; s) =$$

$$= \frac{a^2p_0^2}{2(2\pi)^3 v}\int\Gamma_{\alpha\beta,\xi\eta}(p_1 q; s)\Gamma_{\xi\eta,\gamma\delta}(q p_3; s)\frac{\lambda}{\lambda^2 - (\boldsymbol{v}\boldsymbol{s})^2 + i\delta}\,d\Omega. \tag{20.3}$$

现在求 $\Gamma$ 对 $\boldsymbol{s}$ 的梯度．微分第二个 $G$ 函数时不应忘記，$\boldsymbol{v}\boldsymbol{s}$ 不仅直接出现在分母中，而且还决定虚部的符号．因此在 $\varepsilon = 0$，$|\boldsymbol{q}| = p_0$ 附近 $G(q)\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{s}}G(-q+s)$ 的形状是：

$$-\frac{a^2\boldsymbol{v}}{[\varepsilon - v(|\boldsymbol{q}| - p_0) + i\delta\,\mathrm{sign}(|\boldsymbol{q}| - p_0)]}\times$$

$$\times\frac{1}{\left[\varepsilon-\lambda+v(|\boldsymbol{q}|-p_0)-\boldsymbol{v}\boldsymbol{s}-i\delta\,\mathrm{sign}\left(|\boldsymbol{q}|-p_0-\frac{(\boldsymbol{v}\boldsymbol{s})}{v}\right)\right]^2}+$$

$$+\frac{2\pi i a^2\delta(\varepsilon-\lambda)\delta(\boldsymbol{v}\boldsymbol{s}-v(|\boldsymbol{q}|-p_0))\boldsymbol{v}}{\lambda - \boldsymbol{v}\boldsymbol{s} + i\delta\,\mathrm{sign}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{s})}.$$

此式对 $d\varepsilon d|\boldsymbol{q}|$ 积分給出 $\Gamma$ 的如下关系式：

$$\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{s}}\Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1, p_3; s) = -\frac{a^2p_0^2}{2(2\pi)^3 v}\int\Gamma_{\alpha\beta,\xi\eta}(p_1, q; s)\times$$

$$\times\Gamma_{\xi\eta,\gamma\delta}(q, p_3; s)\frac{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{s})}{\lambda^2 - (\boldsymbol{v}\boldsymbol{s})^2 + i\delta}\,d\Omega. \tag{20.4}$$

合并(20.3)和(20.4)式得到：

$$\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1, p_3; s) + \boldsymbol{s}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{s}}\Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1, p_3; s) =$$

$$= \frac{a^2 p_0^2}{2(2\pi)^3 v}\int \Gamma_{\alpha\beta,\xi\eta}(p_1, q; s)\Gamma_{\xi\eta,\gamma\delta}(q, p_3; s)d\Omega. \quad (20.5)$$

如果不考虑磁相互作用，则粒子間的力只与自旋的相对取向有关．如果再注意到粒子相互作用中总自旋守恒，则方程式(20.5)分离成两个独立方程式．一个方程式对应自旋相反$\left(例如\ \alpha = \frac{1}{2}, \beta = -\frac{1}{2}\right)$的粒子相互作用，另一个对应自旋平行粒子的相互作用．这两个方程式完全等同．差别来自初始条件（即来自$\Gamma^{(2)}$）．因此以后各处将两个不同分量都簡单地記作$\Gamma$．

先作一个以后会得到証实的假定，即$\Gamma(p_1, p_3; s)$和夹角$(\widehat{p_1, s})$与$(\widehat{p_3, s})$无关．这时它可按$\cos\theta$的Legendre多项式展开，其中$\theta$是$p_1$和$p_3$的夹角：

$$\Gamma(p_1, p_3; s) = \sum_l \Gamma_l P_l(\cos\theta). \quad (20.6)$$

注意$\Gamma_{\alpha\beta,\xi\eta}(p_1, p_3; s)$对反平行自旋是反对称的，而对平行自旋是对称的．初始粒子的动量置换相应于把$\cos\theta$换成$-\cos\theta$．由于$\Gamma_{\alpha\beta,\xi\eta}(p_1, p_2; p_3, p_4)$应对置换$p_1\alpha \rightleftarrows p_2\beta$反对称，故在展开式(20.6)中，自旋平行时只有奇諧波，自旋相反时只有偶諧波．

方程式(20.5)对个别的$\Gamma_l$分离而有：

$$\lambda\frac{\partial \Gamma_l}{\partial \lambda} + s\frac{\partial \Gamma_l}{\partial s} = \frac{4\pi a^2 p_0^2}{(2\pi)^3 v}\frac{\Gamma_l^2}{2l+1} \quad (20.7)$$

（(20.5)中对自旋求和导致因子2）．

方程式(20.7)的解等于：

$$\Gamma_l(\lambda, |s|) = -\frac{(2\pi)^3 v(2l+1)}{2\pi a^2 p_0^2}\cdot\frac{1}{\ln\lambda|s| + f_l\left(\frac{\lambda}{|s|}\right)}, \quad (20.8)$$

其中$f_l$是任意函数．

方程式(20.3)和(20.4)使我們有可能得到$x\to 0$和$x\to\infty$时$f_l(x)$的极限表达式．在方程(20.3)中令$|s|\to 0$．按球諧波展开$\Gamma$得：



$$\lambda\frac{d\Gamma_l}{d\lambda} = \frac{4\pi a^2 p_0^2}{(2\pi)^3 v(2l+1)}\Gamma_l^2. \quad (20.9)$$

这个方程式的解是：

$$\Gamma_l(\lambda, 0) = -\frac{(2\pi)^3 v(2l+1)}{4\pi a^2 p_0^2}\cdot\frac{1}{\ln\frac{\lambda}{c_1^l}}, \quad (20.10)$$

其中$c_1^l$为常数．因此$x\to\infty$时$f_l(x)\to\ln\frac{x}{(c_1^l)^2}$．类似地从方程(20.4)在$\lambda\to 0$时得到：

$$\Gamma_l(0, |s|) = -\frac{(2\pi)^3 v(2l+1)}{4\pi a^2 p_0^2}\cdot\frac{1}{\ln\frac{v|s|}{c_2^l}}. \quad (20.11)$$

可見$x\to 0$时，$f_l(x)\to\ln\frac{v^2}{(c_2^l)^2 x}$．

常数$c_1^l$和$c_2^l$的量綱为能量，并且可能是复数．如果常数$c_1^l$的数量級为費米能量，则从(2.10)式得出，当$\lambda\to 0$时，$\Gamma_l(\lambda, 0)$按$\frac{1}{\ln\frac{c_1^l}{\lambda}}$律趋向零．然而这个常数很小的特殊情况也是可能的．这时$\Gamma_l(\lambda, 0)$在$\lambda$的某个值(一般說來是复数值)处有极点．这种情形和超导現象有密切联系，其意义将在第七章中闡明．

*　　*　　*

我們研究了相碰粒子总动量很小时的$\Gamma$，并就此結束各向同性費米液体的微观討論．

目前只知道一种各向同性費米液体——液体$He^3$．各向异性費米液体是更广的一类——这就是金属中的电子．然而除了各向异性之外，金属中的电子液体还具有一些特殊性，如远程庫伦力，与晶格振动的相互作用等等．以下两节中将以电子和声子相互作用的各向同型模型和簡并等离子体为例，討論这些特殊性的一些方面．

毫无疑問，金属中电子費米液体的一般討論属于最重要的，应当用量子場論方法解决的問題．例如对超导現象就应当进行更深

入的研究，目前这种研究还只基于十分简单的模型(见第七章).

## §21. 电子和声子的相互作用[1]

在本节中将以各向同性模型为例，討論金属中电子和声子的相互作用. 我們假定金属处于以下温度范围内：

$$T_c \ll T \ll \omega_D, \tag{21.1}$$

其中 $T_c$ 为超导轉变温度，而 $\omega_D$ 是声子的德拜频率. 第一个不等式之所以必要，是因为在这个模型中，温度足够低时要出現超导(見第七章).

当然，这样的模型和正常金属相去甚远. 这是因为，实际金属是各向异性的，而且电子之間还有庫伦相互作用. 在本节末尾，我們将指出，庫伦作用引起那些质的变化.

**1. 頂角部分.** 在 §16 中已得出了温度高于零时电子和声子的戴逊方程. 先討論这些方程中的頂角部分 $\mathcal{T}$. 我們現在証明，它和零級近似值 $g$ 之差，是数量級为 $\sqrt{\dfrac{m}{M}}$ 的小量，其中 $m$ 为电子質量，而 $M$ 是原子核的質量. 計算图 55 所示的 $\mathcal{T}$ 的一級修正項. 我們将認为，电子的动量值約为 $p_0$，而声子的动量和能量为条件[2] $k \lesssim k_D \sim p_0$, $\omega \lesssim \omega_D$ 所限.

根据 §14，一級图形等于

$$\mathcal{T}^{(1)}(p+q, p; q) = -g^3 T \sum_{\varepsilon_1} \times$$
$$\times \int \mathfrak{D}^{(0)}(p-p_1)\mathfrak{G}^{(0)}(p_1+q)\mathfrak{G}^{(0)}(p_1)\frac{dp_1}{(2\pi)^3} \tag{21.2}$$

其中 $\mathfrak{D}^{(0)}$ 和 $\mathfrak{G}^{(0)}$ 由以下公式給出：

$$\mathfrak{G}^{(0)}(p) = \frac{1}{i\varepsilon - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}) + \mu}, \tag{21.3}$$

$$\varepsilon = \pi T(2n+1),\ \varepsilon_0(\boldsymbol{p}) = \frac{p^2}{2m},\ \mu = \frac{p_0^2}{2m};$$

1) 本节基于 А. Б. Мигдал[41] 和 Г. М. Элиашберг[40] 的工作.

2) 本节中我們把声子的四維动量記为 $q = (\boldsymbol{k}, \omega)$，而以字母 $k$ 表示 $|\boldsymbol{k}|$.



$$\mathfrak{D}^{(0)}(q) = -\frac{\omega_0^2(\boldsymbol{k})}{\omega^2 + \omega_0^{(2)}(\boldsymbol{k})}. \tag{21.4}$$

我們将假定，声子譜是有限的，即 $k < k_D \sim p_0$. 动量更大时，$\mathfrak{D}^{(0)}$ 趋向零. 这条限制的物理意义是：波长小于原子間距离的振动不能存在.

当 $|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_1| \sim p_0$，而 $|\varepsilon - \varepsilon_1| \ll \omega_D$ 时，(21.2) 式中的函数 $\mathfrak{D}^{(0)}$ 可換成常数 $\mathfrak{D}^{(0)} = -1$. 在 $|\varepsilon - \varepsilon_1| \gg \omega_D$ 的范围内，函数 $\mathfrak{D}^{(0)}$ 按 $(\varepsilon - \varepsilon_1)^{-2}$ 衰減. 因此我們可以估計 $\mathcal{T}^{(1)}$ 的积分值：

$$\mathcal{T}^{(1)} \approx g^3 T \sum_{|\varepsilon-\varepsilon_1|<\omega_D} \int_{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_1|<k_D} \mathfrak{G}^{(0)}(p_1+q)\mathfrak{G}^{(0)}(p_1)\frac{d\boldsymbol{p}_1}{(2\pi)^3}. \tag{21.5}$$

对 $\varepsilon_1$ 的求和給出因子 $\omega_D \sim up_0 \sim \mu\sqrt{\dfrac{m}{M}}$，其中 $u$ 是声速. 結果 $\mathcal{T}^{(1)}$ 的数量級为(参閱 §9 中(9.6)式)：

$$\mathcal{T}^{(1)} \sim g^3\frac{p_0^2}{v}\sqrt{\frac{m}{M}} \sim g\zeta\sqrt{\frac{m}{M}}$$

$(\zeta \sim 1)$，只要对 $\boldsymbol{p}_1$ 的积分不給出因子 $1/\omega_D$.

在这里值得怀疑的情形是 $k \ll p_0$，而 $\omega \ll \omega_D$. 这时 $\mathcal{T}^{(1)}$ 的积分中，两个 $\mathfrak{G}^{(0)}$ 函数的极点彼此靠近起来. 不难看出，对动量的积分主要区間在 $|\boldsymbol{p}| \sim p_0$ 附近，而对能量的求和主要在 $\varepsilon \ll \mu$ 范围. 这时 $\mathfrak{G}^{(0)}$ 可換成

$$\mathfrak{G}^{(0)} = \frac{1}{i\varepsilon - v(|\boldsymbol{p}| - p_0)}, \tag{21.6}$$

其中 $v = \dfrac{p_0}{m}$. 这和 §18 中討論过的情况很相似，然而也有一些本質差別. 和 §18 相似，两个 $\mathfrak{G}^{(0)}$ 函数的乘积在 $|\boldsymbol{p}_1| \approx p_0$ 而 $\varepsilon_1$ 很小时，有一尖銳的极大值. 两个 $\mathfrak{G}^{(0)}$ 函数在无穷区間上的积分和求和，形式上是发散的，因而与积分順序关系甚大. 在 §18 中我們先对频率积分，然后再对 $\xi = v(|\boldsymbol{p}| - p_0)$ 积分. 这是因为，对 $\varepsilon$ 的积分确乎取在无穷区間上，而对 $\xi$ 的积分实質上为 $|\xi| \ll \mu$ 所限. 在我們現在所討論的情形中，$\mathfrak{D}^{(0)}$ 函数的存在使得积分收斂，如(21.5)式所示. 因此，对频率求和与对 $\xi$ 求积的順序是任意

的，我們将先对 $\xi_1$ 积分，再对 $\varepsilon_1$ 求和．結果得到(注意条件 $T \ll \omega_D$ 很重要)：

$$-\frac{p_0^2}{(2\pi)^3 v}\int \frac{i\omega}{\boldsymbol{vk} - i\omega}\, d\Omega.$$

只有当 $\omega \gtrsim vk$ 时，这个量才不是小量．我們将看到，这种情形对今后并不重要．

考慮更高級的图形，并不改变以上估值．因此：

$$\mathcal{T} = g\left[1 + O\left(\sqrt{\frac{m}{M}}\right)\right]. \qquad (21.7)$$

**2. 声子格林函数．** 現在求声子格林函数．戴逊方程由(16.3)式給出．討論方程中的不可約自能部分：

$$\mathfrak{N}(q) = 2g^2 T \sum_\varepsilon \int \mathfrak{G}(p)\mathfrak{G}(p - q)\frac{dp}{(2\pi)^3} \qquad (21.8)$$

将 $\mathfrak{N}$ 解析延拓到实頻率区域． 設声子頻率 $\omega = 2\pi n T$ 为正数．这时(21.8)式中对 $\varepsilon$ 的求和可变換成迴路积分

$$\mathfrak{N}(q) = \frac{g^2}{2\pi i}\int_C d\varepsilon\, \mathrm{th}\frac{\varepsilon}{2T}\int G_{RA}(\varepsilon, \boldsymbol{p})G_{RA}(\varepsilon - i\omega, \boldsymbol{p} - \boldsymbol{k})\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3},$$

积分路綫示于图 61 中．在 $\mathrm{Im}\,\varepsilon = 0$ 和 $\mathrm{Im}\,\varepsilon - i\omega = 0$ 两条綫上，格林函数具有奇异性，因此积分中的函数 $G_{RA}(\varepsilon)$ 在 $\mathrm{Im}\,\varepsilon > 0$ 时应理解为 $G_R(\varepsilon)$，而在 $\mathrm{Im}\,\varepsilon < 0$ 时取作 $G_A(\varepsilon)$． 由于沿大圓的积分趋向零，只剩下沿 $\mathrm{Im}\,\varepsilon = 0$ 和 $\mathrm{Im}\,\varepsilon = \omega$ 两条綫的积分． 在后一积分中作代換 $\varepsilon - i\omega \to \varepsilon$，同时利用 $\mathrm{th}\left(\frac{\varepsilon}{2T} + i\pi n\right) = \mathrm{th}\frac{\varepsilon}{2T}$. 此外，再注意到 $G_R(\varepsilon) = G_A^*(\varepsilon)$，結果我們得到：

$$\mathfrak{N} = \frac{g^2}{\pi(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon\int d\boldsymbol{p}\, \mathrm{th}\frac{\varepsilon}{2T}[\mathrm{Im}\, G_R(\boldsymbol{p}, \varepsilon)G_A(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{k}, \varepsilon - i\omega) + \mathrm{Im}\, G_R(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{k}, \varepsilon)G_R(\boldsymbol{p}, \varepsilon + i\omega)]. \qquad (21.9)$$

現在已不难解析延拓到 $\omega$ 的实数値．結果得到推迟函数 $\Pi_R$．分出这个函数的实部和虛部，就得到：

$$\mathrm{Re}\,\Pi_R = \frac{2g^2}{(2\pi)^4}\int d^4P\, \mathrm{th}\frac{\varepsilon}{2T}[\mathrm{Im}\, G_R(\boldsymbol{p}, \varepsilon)\mathrm{Re}\, G_R(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{k}, \varepsilon - \omega) + \mathrm{Im}\, G_R(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{k}, \varepsilon)\mathrm{Re}\, G_R(\boldsymbol{p}, \varepsilon + \omega)], \qquad (21.10)$$



$$\mathrm{Im}\,\Pi_R = -\frac{2g^2}{(2\pi)^4}\int d^4p\left(\mathrm{th}\frac{\varepsilon}{2T} - \mathrm{th}\frac{\varepsilon - \omega}{2T}\right)\times \mathrm{Im}\, G_R(\boldsymbol{p}, \varepsilon)\mathrm{Im}\, G_R(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{k}, \varepsilon - \omega).$$

以后要証明，函数 $G_R$ 的形狀为：

$$G_R = \frac{1}{\varepsilon - \xi(\boldsymbol{p}) - \Sigma_R(\varepsilon)}, \qquad (21.11)$$

其中 $\Sigma$ 只和 $\varepsilon$ 有关． 当 $\varepsilon < \omega_D$ 时 $\Sigma(\varepsilon) \simeq -b\varepsilon$，其中 $b$ 是数量級为一的常数，而当 $\varepsilon \gg \omega_D$ 时，$\Sigma(\varepsilon) \approx$ 常数 $\sim \omega_D$.

先討論长波声子的情形 $k \ll p_0$．这时可近似地写 $\xi(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}) = \xi(\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{vk}$，同时由于积分中的主要区域是 $\xi \sim vk$，可認为 $\xi(\boldsymbol{p}) = \varepsilon_0(\boldsymbol{p}) - \mu \approx v(|\boldsymbol{p}| - p_0)$．对于以后将討論到的 $k \sim p_0$ 的声子，这种近似是不能用的．

将 $G_R$ 代入(21.10)后，可完成对 $\xi$ 的积分．$\mathrm{Re}\,\Pi_R$ 的积分形式上是发散的，因此我們应注意到，对 $\xi$ 的积分区間是有限的，并把积分限記为 $-L_1$, $L_2$． 这些积分限的数量級为 $\mu \sim p_0 v$，即远大于 $\Sigma$．因此我們得：

$$\mathrm{Re}\,\Pi_R = -\frac{p_0^2}{(2\pi)^3 v}\int d\Omega\int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon\, \mathrm{th}\frac{\varepsilon}{2T}\times \left\{\frac{\theta(L_2 - \varepsilon)\theta(\varepsilon + L_1)}{-\omega + \boldsymbol{vk} - \Sigma(\varepsilon - \omega) + \Sigma(\varepsilon)} + \frac{\theta(L_2 - \boldsymbol{vk} - \varepsilon)\theta(\varepsilon + L_1 + \boldsymbol{vk})}{\omega - \boldsymbol{vk} - \Sigma(\varepsilon + \omega) + \Sigma(\varepsilon)}\right\}$$

其中

$$\theta(x) = \begin{cases}1, & x > 0;\\ 0, & x < 0.\end{cases}$$

既然 $\Sigma(\varepsilon) \lesssim \omega_D$，对 $\varepsilon$ 的积分的主要区間是 $\varepsilon = -L_1$, $L_2$ 的邻域，而在这两个区域中 $\Sigma(\varepsilon \pm \omega_D) \approx \Sigma(\varepsilon)$．注意这一点，并認为 $\omega \sim uk \ll vk$，就得到：

$$\mathrm{Re}\,\Pi_R = -\frac{2g^2 p_0^2}{(2\pi)^3 v}\int d\Omega\frac{\boldsymbol{vk}}{\boldsymbol{vk} - \omega} \approx -\frac{g^2 m p_0}{\pi^2}. \qquad (21.12)$$

$\mathrm{Im}\, \Pi_R$ 的积分 (21.10) 是收斂的，因此可认为对 $\xi$ 的积分限是无穷的。这样就有：

$$\mathrm{Im}\, \Pi_R = -\frac{\pi g^2 p_0^2}{(2\pi)^3 v}\int d\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon \left(\mathrm{th}\frac{\varepsilon}{2T} - \mathrm{th}\frac{\varepsilon-\omega}{2T}\right) \times$$
$$\times\, \delta(\boldsymbol{vk} - \omega + \Sigma(\varepsilon) - \Sigma(\varepsilon - \omega)).$$

当 $\omega \ll T$ 时，积分中重要的是 $\varepsilon \sim T$，而当 $\omega \gg T$ 时，积分中重要的是 $\varepsilon \sim \omega$。在我們所討論的情形中 $\omega \sim uk \ll \omega_D (k \ll p_0 \sim k_D)$，因而无論如何 $\varepsilon \ll \omega_D$。所以在 $\delta$ 函数的变量中可置 $\Sigma(\varepsilon) = -b\varepsilon$，其中 $b$ 为常数（見后面），而有 $\delta(\boldsymbol{vk} - \omega(1+b))$。对 $\varepsilon$ 的积分給出 $2\omega$，于是得：

$$\mathrm{Im}\, \Pi_R = -\frac{g^2 p_0 m}{2\pi}\frac{\omega}{vk}. \tag{21.13}$$

应指出，$\mathrm{Re}\, \Pi_R$ 和 $\mathrm{Im}\, \Pi_R$ 二者都同微扰論一級近似，即在 (21.8) 中以 $\mathfrak{G}^{(0)}$ 代 $\mathfrak{G}$ 所得者相同。对于 $\mathrm{Re}\, \Pi_R$，这是因为积分区間对应高頻率，那里自能 $\Sigma$ 已和頻率无关，而对于 $\mathrm{Im}\, \Pi_R$，这是来自 $\varepsilon \ll \omega_D$ 时 $\Sigma(\varepsilon)$ 的綫性关系。

現在討論 $k \sim k_D \sim p_0$ 的情形。这时 $vk \gg \omega_D$ 总成立。既然 $\Sigma \lesssim \omega_D$，則 (21.10) 中的 $G$ 函数可换成自由函数 $G^{(0)}$。因为 $\omega \sim \omega_D \gg T$，$\mathrm{th}\frac{\varepsilon}{2T}$ 可代之以 $\mathrm{sign}\, \varepsilon$。在 $\mathrm{Re}\, \Pi_R$ 的积分中可令 $\omega = 0$。然而这时 $\xi = \frac{p^2}{2m} - \frac{p_0^2}{2m}$ 不能以近似式代替。結果得到：

$$\mathrm{Re}\, \Pi_R = -\frac{2g^2\pi}{(2\pi)^4}\int d\boldsymbol{p}[\mathrm{Re}G_R^{(0)}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}, \xi(\boldsymbol{p}))\mathrm{sign}\,\xi(\boldsymbol{p}) +$$
$$+ \mathrm{Re}G_R^{(0)}(\boldsymbol{p}, \xi(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}))\mathrm{sign}\,\xi(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})] =$$
$$= -\frac{4g^2}{(2\pi)^3}\int_{\substack{\xi(\boldsymbol{p}+\frac{\boldsymbol{k}}{2})>0\\ \xi(\boldsymbol{p}-\frac{\boldsymbol{k}}{2})<0}} d\boldsymbol{p}\frac{1}{\xi\left(\boldsymbol{p}+\frac{\boldsymbol{k}}{2}\right) - \xi\left(\boldsymbol{p}-\frac{\boldsymbol{k}}{2}\right)} =$$
$$= -\frac{g^2 m p_0}{2\pi^2} h\left(\frac{k}{2p_0}\right), \tag{21.14}$$

其中



$$h(x) = 1 + \frac{1-x^2}{2x}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|.$$

現在討論 $\mathrm{Im}\, \Pi_R$。只保留来自 $\mathrm{th}\frac{\varepsilon-\omega}{2T}$ 的 $\omega$，我們得：

$$\mathrm{Im}\, \Pi_R = \frac{g^2\omega}{(2\pi)^2}\int d\boldsymbol{p}\delta(\xi(\boldsymbol{p}) - \xi(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})) =$$
$$= \frac{g^2 p_0 m}{2\pi}\cdot\frac{\omega}{vk}\theta(2p_0 - k). \tag{21.15}$$

这里所得的表达式，包含了公式 (21.12) 和 (21.13)，作为在 $k \ll p_0$ 时成立的特例，因此，它們可被看成普适公式。利用温度戴逊方程的解析延拓，得到：

$$D_R^{-1}(\boldsymbol{k}, \omega) = D_{0R}^{-1} - \Pi_R = \frac{1}{\omega_0^2(k)}\Big\{\omega^2 - \omega_0^2(\boldsymbol{k}) \times$$
$$\times \left[1 - \zeta h\left(\frac{k}{2p_0}\right) - \zeta\frac{i\pi m\omega}{p_0 k}\theta(2p_0 - k)\right]\Big\}, \tag{21.16}$$

式中以常数 $\zeta = \frac{g^2 p_0 m}{2\pi^2} \sim 1$ 代替了 $g^2$。

函数 $D_R$ 的极点决定眞正的声子能譜及其衰減：

$$\omega(\boldsymbol{k}) = \omega_0(\boldsymbol{k})\sqrt{1 - \zeta h\left(\frac{k}{2p_0}\right)}, \tag{21.17}$$

$$\gamma_1(\boldsymbol{k}) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\omega_0^2(k)m}{p_0 k}\theta(2p_0 - k). \tag{21.18}$$

根据 (21.17)，当 $k \ll p_0$ 时有 $\omega(k) \simeq \omega_0(k)\sqrt{1 - 2\zeta}$。

在 $k = 2p_0$ 附近，导数 $\frac{d\omega(k)}{dk}$ 具有对数奇异性：

$$\frac{d\omega(k)}{dk} = \frac{\omega(2p_0)}{4p_0}\frac{\zeta}{1-\zeta}\ln\frac{4p_0}{|2p_0 - k|}, \tag{21.19}$$

在这点衰減突变为零。应当指出，$\omega(k)$ 和 $\gamma_1$ 的这种性質，是推导 $\Pi$ 的过程中引入近似的結果。例如，在 (21.10) 式的 $G^{(0)}$ 函数中不忽略 $\omega$，則这些奇异性就消失，而有：

$$\gamma_1 \sim \arctan\frac{\omega m}{p_0(k - 2p_0)} \quad (k > 2p_0),$$

卸渐趋近零，而非突变为零[1]. 显然，对以上所得諸式的修正項，只在 $|k-2p_0|\sim\frac{\omega}{v}\sim\frac{\omega_D}{v}\ll p_0$ 范围內才是重要的. 为了在这个范围內准确地計算 $\omega(k)$ 和 $\gamma_1$，不仅在(21.10)式中不能忽略 $\omega$，而且不能把 $G$ 换成 $G^{(0)}$. 此外，$\mathcal{J}$ 和 $g$ 的差别也必須計入了. 因此，計算变得极为复杂. 由于这里涉及的范围很窄，就不值得花費很大力量去求这些結果了.

从(21.18)和(21.17)式看出，当 $\zeta$ 不十分接近 1/2 时，衰減 $\gamma_1(k)$ 的相对值很小. 实际有：

$$\frac{\gamma_1(k)}{\omega(k)}=\frac{\pi\zeta\omega_0^2(k)}{2p_0k\omega(k)}\sim\frac{\pi}{2}\cdot\frac{u}{v}\cdot\frac{\zeta}{1-2\zeta}\sim\sqrt{\frac{m}{M}}(1-2\zeta)^{-1}. \tag{21.20}$$

声子格林函数 $D_R(k,\omega)$ 可写成以下形式：

$$D_R(k,\omega)=\frac{\omega_0^2(k)}{2\omega(k)}\left(\frac{1}{\omega-\omega(k)+i\gamma_1(k)}-\frac{1}{\omega+\omega(k)+i\gamma_1(k)}\right). \tag{21.21}$$

由此可見，函数 $D_R(k,\omega)$ 和 $D_R^{(0)}(k,\omega)$ 的差别，在于改变频率和常数因子.

**3. 电子格林函数.** 我們轉而討論电子格林函数. 函数 $\mathfrak{G}$ 的戴逊方程(16.3)中包含有自能 $\Sigma$，它满足如下方程：

$$\Sigma(\boldsymbol{p},\varepsilon)=-\frac{g^2}{(2\pi)^3}\sum_{\varepsilon_1}\int d\boldsymbol{p}_1\mathfrak{G}(\varepsilon_1,\boldsymbol{p}_1)D(\varepsilon-\varepsilon_1,\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_1). \tag{21.22}$$

和前面一样，我們完成向实頻率区域的解析延拓. 为此将(21.22)写成迴路积分：

$$\Sigma(\boldsymbol{p},\varepsilon)=\frac{ig^2T}{2(2\pi)^4}\int d\boldsymbol{p}_1\int d\varepsilon_1\,\mathrm{th}\frac{\varepsilon_1}{2T}G_{RA}(\varepsilon_1,\boldsymbol{p}_1)\mathscr{D}_{RA}(i\varepsilon-\varepsilon_1,\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_1)-\frac{g^2T}{(2\pi)^3}\int d\boldsymbol{p}_1\mathfrak{G}(\varepsilon,\boldsymbol{p}_1)\mathfrak{D}(0,\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_1). \tag{21.23}$$

---
1) $\frac{d\omega}{dk}$ 所能达到的最大值約为 $v$.



积分路綫和图 61 所示者相似($\varepsilon>0$). $G_{RA}$ 和 $D_{RA}$ 的意义也与前面一样. 迴路积分中未包括(21.22)中 $\varepsilon_1=\varepsilon$ 的那項，因此上式中出現了第二項. 我們再提醒一次，$\mathfrak{D}$ 函数只具有偶頻率 $2\pi nT$.

又和前面一样，沿大圓的积分消失，只剩下沿水平綫 $\varepsilon_1=0$ 和 $\varepsilon_1=i\varepsilon$ 的积分. 注意 $G_A=G_R^*$，而 $\mathrm{th}\left(\frac{\varepsilon+i\pi T(2n+1)}{2T}\right)=\mathrm{cth}\frac{\varepsilon}{2T}$，与 $\mathcal{T}$ 类似地变换(21.23)式. 这时围繞 $\varepsilon_1=i\varepsilon$ 的积分正好与(21.23)式第二項相消. 此后不难延拓到变量 $\varepsilon$ 的上半平面. 結果就得到：

$$\Sigma_R(\boldsymbol{p},\varepsilon)=-\frac{g^2}{(2\pi)^4}\int d\boldsymbol{p}_1\int_{-\infty}^{+\infty}d\varepsilon_1\,\mathrm{th}\frac{\varepsilon_1}{2T}\,\mathrm{Im}\,G_R(\varepsilon_1,\boldsymbol{p}_1)D_R\times(\varepsilon-\varepsilon_1,\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_1)-\frac{g^2}{(2\pi)^4}\int d\boldsymbol{p}_1\int_{-\infty}^{\infty}d\varepsilon_1\,\mathrm{cth}\frac{\varepsilon_1}{2T}\times G_R(\varepsilon-\varepsilon_1)\mathrm{Im}\,D_R(\varepsilon_1,\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_1). \tag{21.24}$$

根据(17.14)和(17.18)式有：

$$G_R(\varepsilon,\boldsymbol{p})=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}\,G_R(\varepsilon_1,\boldsymbol{p})}{\varepsilon_1-\varepsilon-i\delta}d\varepsilon_1, \tag{21.25}$$

类似的式子对 $D_R$ 也成立. 将(21.25)代入(21.24)，并作变量代换，得：

$$\Sigma_R(\boldsymbol{p},\varepsilon)=-\frac{g^2}{(2\pi)^4\pi}\int d\boldsymbol{p}_1\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}d\varepsilon_1\times\frac{\mathrm{Im}\,G_R(\varepsilon_1,\boldsymbol{p}_1)\mathrm{Im}\,D_R(\omega,\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_1)}{\omega+\varepsilon_1-\varepsilon-i\delta}\times\left(\mathrm{th}\frac{\varepsilon_1}{2T}+\mathrm{cth}\frac{\omega}{2T}\right). \tag{21.26}$$

先完成对 $\boldsymbol{p}_1$ 的积分. 为此引入新变量 $\xi_1=\frac{p_1^2}{2m}-\frac{p_0^2}{2m}$，$k=|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_1|$：

$$\int_0^{\infty}|\boldsymbol{p}_1|^2d|\boldsymbol{p}_1|\int_{-1}^{1}dx=\frac{m}{|\boldsymbol{p}|}\int_0^{k_D}kdk\int_{\xi(|\boldsymbol{p}|-k)}^{\xi(|\boldsymbol{p}|+k)}d\xi_1. \tag{21.27}$$

以(21.11)的形式求 $G_R$. 此式虛部的形状为：

$$\operatorname{Im} G_R(\boldsymbol{p}_1, \varepsilon_1) = \frac{\operatorname{Im} \Sigma_R(\varepsilon_1)}{(\varepsilon_1 - \xi_1 - \operatorname{Re} \Sigma_R(\varepsilon_1))^2 + (\operatorname{Im} \Sigma_R(\varepsilon_1))^2}. \tag{21.28}$$

如果認为动量 $|\boldsymbol{p}|$ 接近 $p_0$，则由(21.27)知，$\xi_1$ 的变化范围与 $k$ 有关．当积分中重要的是 $k \sim k_D$ 时，实际上可認为 $\xi_1$ 的变化范围为 $(-\infty, +\infty)$．以后还会遇到另一情形，即重要的是动量 $k \ll p_0$．然而这时积分中所有的能量的数量級都約为 $\omega(\boldsymbol{k}) \ll \omega_D$．在两种情形下都有 $\operatorname{Im} \Sigma(\varepsilon) \ll \varepsilon$，因而 $\operatorname{Im} G_R(\boldsymbol{p}_1, \varepsilon_1) \simeq \pi\delta(\varepsilon_1 - \operatorname{Re} \Sigma_R(\varepsilon_1) - \xi_1) \operatorname{sign} \operatorname{Im} \Sigma_R(\varepsilon_1) = -\pi\delta(\varepsilon_1 - \operatorname{Re} \Sigma_R(\varepsilon_1) - \xi_1)$．将此式代入(21.24)得：

$$\Sigma_R(\boldsymbol{p}, \varepsilon) = \frac{g^2}{(2\pi)^3} \frac{m}{|\boldsymbol{p}|} \int_0^{k_D} k dk \int_{\varepsilon'}^{\varepsilon''} d\varepsilon_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \times$$

$$\times \frac{\operatorname{Im} D_R(\omega, k)}{\omega + \varepsilon_1 - \varepsilon - i\delta} \left( \operatorname{th} \frac{\varepsilon_1}{2T} + \operatorname{cth} \frac{\omega}{2T} \right), \tag{21.29}$$

其中 $\varepsilon'' - \operatorname{Re} \Sigma_R(\varepsilon'') = \xi(|\boldsymbol{p}| + k)$，$\varepsilon' - \operatorname{Re} \Sigma_R(\varepsilon') = \xi(|\boldsymbol{p}| - k)$．以后要看到，起主要作用的值是 $\varepsilon_1 \lesssim \omega_D$．为了使这些小值包含在 $\varepsilon_1$ 的变化范围内，$k$ 必須小于 $2p_0$．因此，对 $k$ 的积分上限实际上是 $k_1 = \min(k_D, 2p_0)$．

討論 $\operatorname{Re} \Sigma_R$．我們先假定，对 $k$ 的积分中重要的是 $k \sim k_D \sim p_0$，这个假定的正确性将在后面被証实．这时可令对 $\varepsilon_1$ 的积分限为无穷大．从 $\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega$ 变到 $\int_0^{\infty} d\omega$：

$$\operatorname{Re} \Sigma_R = \frac{g^2}{(2\pi)^3} \frac{m}{p_0} \int_0^{k_1} k dk \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon_1 \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im} D_R(\omega, k)}{\omega + \varepsilon_1} \times$$

$$\times \left( \operatorname{th} \frac{\varepsilon + \varepsilon_1}{2T} + \operatorname{th} \frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{2T} \right) d\omega.$$

这里应用了反对称性 $\operatorname{Im} D_R(\omega) = -\operatorname{Im} D_R(-\omega)$．由于 $\operatorname{Im} D_R$ 和 $\operatorname{Re} D_R$ 之間的关系（見(21.25)）以及 $\operatorname{Im} D_R$ 的反对称性，$\operatorname{Re} \Sigma_R$ 的式子可写成：

$$\operatorname{Re} \Sigma_R = \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{m}{p_0} \int_0^{k_1} k dk \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \operatorname{Re} D_R(\omega, k) \times$$



$$\times \left( \operatorname{th} \frac{\varepsilon + \omega}{2T} + \operatorname{th} \frac{\varepsilon - \omega}{2T} \right). \tag{21.30}$$

将(21.21)式代入，得到：

$$\operatorname{Re} \Sigma_R = \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{m}{p_0} \int_0^{k_1} k dk \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{\omega_0^2(k)}{\omega^2 - \omega^2(k)} \times$$

$$\times \left( \operatorname{th} \frac{\varepsilon + \omega}{2T} + \operatorname{th} \frac{\varepsilon - \omega}{2T} \right).$$

由此立刻看出，重要的是 $k \sim k_1$，这就証实了前面所作的假定．至于說 $\omega$，则当 $\varepsilon \gg T$ 时，重要的是 $\omega \sim \varepsilon$ 或 $\omega \sim \omega_D$，而当 $\varepsilon \ll T$ 时，重要的是 $\omega \sim T \ll \omega_D$．在一切情形下都可以写：

$$\operatorname{Re} \Sigma_R = \frac{g^2}{8\pi^2} \frac{m}{p_0} \int_0^{k_1} k dk \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} d\omega \frac{\omega_0^2(k)}{\omega^2 - \omega^2(k)}. \tag{21.31}$$

对 $\omega$ 积分得：

$$\operatorname{Re} \Sigma_R = -\frac{g^2}{8\pi^2} \frac{m}{p_0} \int_0^{k_1} k dk \frac{\omega_0^2(k)}{\omega(k)} \ln \left| \frac{\varepsilon + \omega(k)}{\varepsilon - \omega(k)} \right|. \tag{21.32}$$

这个积分中重要的是 $k \sim k_1$，即 $\omega(k) \sim \omega_D$．如果 $\varepsilon \ll \omega_D$，则

$$\operatorname{Re} \Sigma_R \simeq -\frac{g^2 \varepsilon}{4\pi^2} \frac{m}{p_0} \int_0^{k_1} k dk \frac{\omega_0^2(k)}{\omega(k)} = -b\varepsilon, \tag{21.33}$$

其中 $b$ 是数量級为 1 的正常数．当 $\varepsilon \gg \omega_D$ 时有：

$$\operatorname{Re} \Sigma_R \simeq -\frac{g^2}{4\pi^2 \varepsilon} \frac{m}{p_0} \int_0^{k_1} k dk \omega_0^2(k) \sim -\frac{\omega_D^2}{\varepsilon} \to 0.$$

现在考虑 $\Sigma_R$ 的虚部．显然，它来自(21.29)式围繞分母零点的积分：

$$\operatorname{Im} \Sigma_R(\boldsymbol{p}, \varepsilon) = \frac{g^2 \pi}{(2\pi)^3} \frac{m}{p_0} \int_0^{k_1} k dk \int_{\varepsilon'}^{\varepsilon''} d\varepsilon_1 \operatorname{Im} D_R(\varepsilon - \varepsilon_1, k) \times$$

$$\times \left( \operatorname{th} \frac{\varepsilon_1}{2T} + \operatorname{cth} \frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{2T} \right). \tag{21.34}$$

根据(21.21)式 $\operatorname{Im} D_R$ 等于

$$\operatorname{Im} D_R(\omega, k) = -\frac{2\omega_0^2(k) \omega \gamma_1(k)}{[\omega^2 - \omega^2(k)]^2 + 4\omega^2 \gamma_1^2(k)}, \tag{21.35}$$

代入(21.34)式后，原则上可能遇見两种情形．如果 $\omega$ 的变化范围

远大于$\gamma_1(k)$，则

$$\operatorname{Im} D_R(\omega, k) \simeq -\pi\omega_0^2(k)\delta(\omega^2-\omega^2(k))\operatorname{sign}\omega. \quad (21.36)$$

如果$\omega$的变化范围远小于$\gamma_1(k)$，则在(21.35)式分母中，$\omega$和其它量相比，可以略而不計，这时有：

$$\operatorname{Im} D_R(\omega, k) \simeq -\frac{2\omega_0^2(k)\omega\gamma_1(k)}{\omega^4(k)}. \quad (21.37)$$

将(21.36)代入(21.34)，并作变量替换$\varepsilon_1-\varepsilon=\omega$。因子th和cth的存在，使$\omega \sim \max(\varepsilon, T)$起重要作用。另一方面，$\delta$函数又要求$\omega\sim\omega(k)\sim uk$。由此可知，重要的是$k\sim\frac{\varepsilon}{u}$，即$vk\gg\varepsilon$。这表明，对$\omega$的积分限可推至无穷大。这就給出：

$$\operatorname{Im} \Sigma_R(\boldsymbol{p}, \varepsilon) = \frac{g^2 m}{16\pi p_0}\int_0^{k_1}\frac{kdk\omega_0^2(k)}{\omega(k)}\left[\operatorname{th}\frac{\omega(k)+\varepsilon}{2T} - \operatorname{th}\frac{\varepsilon-\omega(k)}{2T} - 2\operatorname{cth}\frac{\omega(k)}{2T}\right]. \quad (21.38)$$

当$\max(\varepsilon, T)\ll\omega_D$时，我們得：

$$\operatorname{Im}\Sigma_R(\varepsilon) = -\frac{\pi\zeta T^3}{4(1-2\zeta)p_0^2u^2}f_1\left(\frac{\varepsilon}{T}\right), \quad (21.39)$$

其中声速$u=\left(\frac{d\omega(k)}{dk}\right)_0$，而函数

$$f_1(x) = \int_0^\infty z^2dz\left[\operatorname{cth}\frac{z}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{th}\frac{z+x}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{th}\frac{z-x}{2}\right]. \quad (21.40)$$

当$\varepsilon\ll T\ll\omega_D$时，由(21.39)式得：

$$\operatorname{Im}\Sigma_R(\varepsilon) = -\frac{7\pi\zeta(3)}{8}\frac{\zeta}{1-2\zeta}\frac{T^3}{p_0^2u^2}; \quad (21.41)$$

而当$T\ll\varepsilon\ll\omega_D$时有：

$$\operatorname{Im}\Sigma_R(\varepsilon) = -\frac{\pi}{12}\frac{\zeta}{1-2\zeta}\frac{|\varepsilon|^3}{p_0^2u^2}. \quad (21.42)$$

在$\varepsilon\gg\omega_D$的情形下（根据本节初的条件，$T\ll\omega_D$），我們得到：

$$\operatorname{Im}\Sigma_R(\varepsilon) = \text{常数} \sim \omega_D. \quad (21.43)$$



以上推导中重要的是$\omega\sim\max(\varepsilon, T)$的值。因此根据以前所述，只有在$\max(\varepsilon, T)\gg\max\gamma_1(k)\sim\sqrt{\frac{m}{M}}\omega_D$时，将(21.35)式换成(21.36)式才是合法的。在相反的极限情形，应当用(21.37)式。这时积分中重要的是$k\sim k_1$，因而

$$\operatorname{Im}\Sigma_R(\varepsilon) = -\frac{g^2 m}{2\pi^2 p_0}\int_0^{k_1}kdk\frac{\omega_0^2(k)\gamma_1(k)}{\omega^4(k)}\int_0^\infty\omega d\omega\times\left[\operatorname{cth}\frac{\omega}{2T} - \frac{1}{2}\operatorname{th}\frac{\omega+\varepsilon}{2T} - \frac{1}{2}\operatorname{th}\frac{\omega-\varepsilon}{2T}\right]. \quad (21.44)$$

对频率的积分可以算出来。結果当$\max(\varepsilon, T)\ll\sqrt{\frac{m}{M}}\omega_D$时有：

$$\operatorname{Im}\Sigma_R(\varepsilon) = -\frac{d}{p_0 v}(\pi^2T^2+\varepsilon^2) \quad (21.45)$$

其中

$$d = \frac{g^2p_0}{4\pi^2}\int_0^{k_1}kdk\frac{\omega_0^2(k)\gamma_1(k)}{\omega^4(k)} = \text{常数}\sim 1.$$

(21.39)式和(21.45)式对应不同的衰減机理。前者决定的衰減，来自电子吸收与輻射声子。然而当准粒子能量十分接近費米面时：$\varepsilon\ll\omega_D\sqrt{\frac{m}{M}}$，电子間通过交换声子而致的相互作用就更重要了，这是(21.45)式衰減的来源。由以前所述(見§2)可知，費米粒子相互作用而致的衰減，正好应具有这种形式。

由$G_R$函数极点的实部，可以决定电子激发能。根据(21.11)有$\varepsilon-\Sigma_R(\varepsilon)=\xi$。

当$\varepsilon\ll\omega_D$时，应用(21.33)式得：

$$\varepsilon = \frac{v}{1+b}(|\boldsymbol{p}|-p_0). \quad (21.46)$$

因此，費米面上准粒子速度減小($b>0$)。此外，在极点附近$G$函数具有(18.1)的形式，其中$a=(1+b)^{-1}<1$。由(21.42)式知，当$\varepsilon\sim\omega_D$时，准粒子的衰減和能量变得差不多大。然而不难看出(見(21.43))，激发能継續增加时，衰減不复增长，而又变得小于准粒子能量。由此可見，一共有两个区needs，其中准粒子这个概念是

有意义的，这就是：$|\varepsilon| \ll \omega_D$ 和 $|\varepsilon| \gg \omega_D$. 在两个区間里，电子能量的形状都是 $v(|\boldsymbol{p}| - p_0)$，然而速度 $v$ 却是不同的.

現在定性地討論一下，考慮电子間直接的庫伦相互作用，会有什么影响. 由于庫伦力在約为晶格周期 $\left(\text{即} \sim \frac{1}{p_0}\right)$ 的距离上就被屏蔽，它仍可認为是短程力. 考虑这些力以后，費米面上的电子速度，以及 $G$ 函数在极点附近的系数 $a$，要有所改变.

衰減的数值将有質的变化. 庫伦互相作用給出由 (19.30) 式表示的衰減. 在 $(\varepsilon, T) \ll \omega_D \sqrt{\frac{m}{M}}$ 范围内，它将与 (21.45) 式相加，后者具有相同的結構和数量級，然而在 $(\varepsilon, T) \gg \omega_D \sqrt{\frac{m}{M}}$ 的范围内，声子衰減起决定作用. 前面已指出过，当 $\varepsilon \gg \omega_D$ 时，声子衰減成为数量級为 $\omega_D$ 的常数. 庫伦衰減在此区間内也存在着，而且当以下不等式成立后，起主要作用：

$$|\varepsilon| \gg \sqrt{p_0 v \omega_D} \sim \omega_D \sqrt[4]{\frac{M}{m}} > \omega_D.$$

可見在 $|\varepsilon| \gg \omega_D$ 范围内，当电子激发譜已取决于庫伦相互作用时，声子衰減在一段区域里还超过电子衰減.

**4. 电子比热綫性項的修正.** 由前面各段所得結果，可以得出关于电子比热的有意义的結論. 初看之下，会以为对电子比热綫性項 (19.25) 的修正，相对数量級应为 $\left(\frac{T}{\mu}\right)^2$. 实际上电声子作用导致更大的修正項 (Г. М. Элиашберг[42]).

考慮 $\text{Re}\,\Sigma_R$ 的一般公式 (21.32). 当 $\varepsilon \ll \omega_D$ 时，我們在第一級近似下得(21.33)式. 不难看出，将(21.32)积分下的对数展至 $\varepsilon^3$ 項，就导致对 $k$ 的对数发散积分. 我們以对数准确度为限，得[1]：

1) 可以指出，$\delta\,\text{Re}\,\Sigma_R$ 和衰減(21.42)是同一个解析函数

$$\delta\Sigma_R = -\frac{1}{12}\frac{\zeta}{(1-2\zeta)}\frac{\varepsilon^3}{p_0^2u^2}\ln\frac{\omega_D^2}{-(\varepsilon+i\delta)^2}$$

的实部和虛部.



$$\delta\,\text{Re}\,\Sigma_R = -\frac{1}{6}\cdot\frac{\zeta}{1-2\zeta}\cdot\frac{\varepsilon^3}{p_0^2u^2}\ln\frac{\omega_D}{|\varepsilon|}.$$

在求熵时(見 § 19 第五段)計入此修正項，得：

$$\delta\left(\frac{S}{V}\right) = 2\int\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-\frac{\partial n_F(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right)\varepsilon\,\text{Im}\,G_R\delta\,\text{Re}\,\Sigma_R(\varepsilon)d\varepsilon.$$

代入 $\text{Im}\,G_R = -\pi\delta(\xi-\varepsilon-\Sigma_R(\varepsilon))$ 并取含費米函数之积分，得：

$$\delta\left(\frac{S}{V}\right) = \frac{7\pi^2}{180}\frac{\zeta}{1-2\zeta}\frac{m}{p_0^2u^2}T^3\ln\frac{\omega_D}{T}.$$

对 $T$ 微分得：

$$\delta\left(\frac{C}{V}\right) = \frac{7\pi^2}{60}\frac{\zeta}{1-2\zeta}\cdot\frac{m}{p_0^2u^2}T^3\ln\frac{\omega_D}{T}. \quad (21.47)$$

因此，对比热綫性項的修正为 $\sim \frac{\zeta}{1-2\zeta}\frac{T^2}{\omega_D^2}\ln\frac{\omega_D}{T}$.

应将此修正項与来自晶格振动的立方項作一比較. 晶格比热的数量級为 $\frac{T^3}{u^3}$. 由此可知，以上修正項与晶格比热的比值为 $\frac{\zeta}{1-2\zeta}\frac{u}{v}\ln\frac{\omega_D}{T}$，故通常很小. 然而这里只涉及一个数量級的出入，因而可能在个别金属中，这个修正項也給出相当显著的貢献[1].

## § 22. 簡并等离子体的某些性質

**1. 問題提法.** 我們討論等离子体，即电子和离子气体的混合物，作为具有庫伦相互作用的系統的例子. 相互作用哈密頓量的形状是：

$$H_{int} = \frac{e^2}{2}\int\psi_\alpha^+(\boldsymbol{r})\psi_\beta^+(\boldsymbol{r}')\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\psi_\beta(\boldsymbol{r}')\psi_\alpha(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{r}' -$$

$$- Ze^2\int\psi_\alpha^+(\boldsymbol{r})\Phi^+(\boldsymbol{r}')\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\Phi(\boldsymbol{r}')\psi_\alpha(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{r}' +$$

1) 金属轉入超导态（見第七章）时，可能发現这項的存在. 这个轉变不影响晶格比热，然而却使电子比热在 $T\to 0$ 时指数下降. 比較超导轉变溫度 $T_c$ 以上以及 $T\to 0$ 时比热立方項的数值，可以发現 $T_c$ 以上立方項中是否出现了修正項 (21.47).

$$+\frac{Z^2e^2}{2}\int \Phi^+(\boldsymbol{r})\Phi^+(\boldsymbol{r}')\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\Phi(\boldsymbol{r}')\Phi(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{r}', \quad (22.1)$$

其中 $\psi_a(\boldsymbol{r})$——电子場算符，而 $\Phi$——离子場算符．我們設电子气体是簡并的，而离子是玻尔兹曼气体．为此温度須滿足不等式

$$\frac{1}{m}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} \gg T \gg \frac{1}{M}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}. \quad (22.2)$$

在計算中我們可以假定离子是費米气体，因为两种統計的玻尔兹曼极限情况是一样的．

其次假定庫伦相互作用是弱效应，为此須要求

$$\frac{e^2}{\bar{E}\bar{r}} \ll 1,$$

其中 $\bar{E}$ 是某个平均能量，而 $\bar{r}$ 是粒子間的平均距离．对离子 $\bar{E}\sim T$，而对电子 $\bar{E}\sim\frac{p_0^2}{2m}$．因此，这个条件和以下要求等价：

$$\frac{T}{e^2} \gg \left(\frac{N}{V}\right)^{1/3} \gg e^2m. \quad (22.3)$$

不难看出，条件(22.3)和关于电子气体簡并的假定不矛盾．

当条件(22.3)成立时，庫伦相互作用几乎总是对等离子体的影响很小．动量传递很小的粒子碰撞起主要作用的情況是例外．由于庫伦位势的傅立叶分量为[1]：

$$U(k) = \frac{4\pi e^2}{k^2}, \quad (22.4)$$

动量传递很小的碰撞有极为重要的作用．

首先应討論一个与庫伦相互作用有关的表面上的困难．§8 $G$ 函数的图形中包括形如图 4(a) 类型的图，它們含有 $U(0)$．温度 $\mathfrak{G}$ 函数也有类似的图形．根据 (22.4) 这些图趋向无穷大．我們从給定化学势变换到給定粒子数，并将庫伦位势換成位势 $U(r)=e^2\frac{e^{-\alpha r}}{r}$．我們假定 $\alpha$ 的数值很小，而在最終結果中令其等于零．为了避免在給定粒子数目时发生的困难，我們将在 $\boldsymbol{r}$，$\tau$ 空間中进行討論．

1) 本节中不用四維矢量，因此我們以普通拉丁字母記三維矢量的絕对值．



試取电子綫 $\mathfrak{G}_e$ 为例．将所有以一条波紋綫和主 $\mathfrak{G}$ 綫相連的不可約自能部分，如图 4(a)，图 8(e)，(f) 之类，加到一起．不难看出，所有这些图形之和給出：

$$\Sigma'(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}', \tau-\tau') = 2e^2\int d\boldsymbol{r}_1[\mathfrak{G}_e(0,-0)-Z\mathfrak{G}_i(0,-0)]\times$$
$$\times\frac{e^{-\alpha|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(\tau-\tau') =$$
$$=\frac{N_e-ZN_i}{V}\frac{4\pi e^2}{\alpha^2}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(\tau-\tau')\equiv 0 \quad (22.5)$$

这是因为电性中和条件 $N_e = ZN_i$．

$\mathfrak{G}_i$ 綫的类似修正項也同样地等于零．这表明，应簡单地令所有包括庫伦势空間积分(零傅立叶分量)的图形等于零．

然后可借助以下的形式方法回到給定 $\mu$ 的表象．将图中所有 $\mathfrak{G}^{(0)}$ 綫表示成

$$\mathfrak{G}_N^{(0)} = \mathfrak{G}_\mu^{(0)}e^{-\mu(\tau_1-\tau_2)}. \quad (22.6)$$

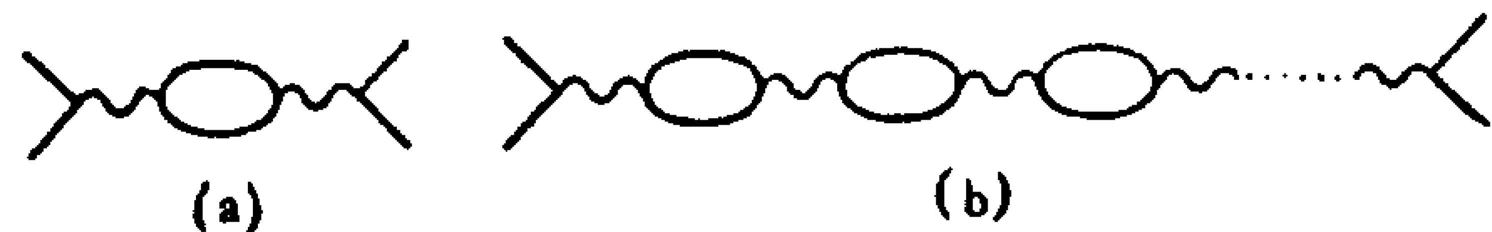
不难驗証，最終的 $\mathfrak{G}$ 函数由含有 $\mathfrak{G}_\mu^{(0)}$ 的图形描述，只是乘上了同一因子 $e^{-\mu(\tau_1-\tau_2)}$．以此因子除之，我們就得到 $\mathfrak{G}_\mu$．

由此看出，处理庫伦势的方法是扔掉所有含 $U(0)$ 的图．但是必須注意，只有化学势的选择滿足条件 $N_e(\mu_e,\mu_i)=ZN_i(\mu_e,\mu_i)$，或者等价条件

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\mu_e} = Z\frac{\partial\Omega}{\partial\mu_i} \quad (22.7)$$

时，这样得到的結果才是正确的．

**2. 动量传递小的頂角部分．** 先考虑动量传递小的頂角部分．由于离子在这里有重要意义，我們采用温度方法．(22.4) 式的一級修正項由图 62(a) 型的两个图形描述．一个图中的封閉环由电子綫組成，另一个由离子綫組成．虽然这个修正項有附加因子 $e^2$，但是它包含着 $\left(\frac{1}{k^2}\right)^2$．因此传递动量很小时它可能极重要，我們必



(a)　　　　(b)

图 62

须求和如图 62(b) 所示的图形的鏈，其中有任意数目的电子环和离子环[1]。

結果发現所有的頂点——电子–电子，离子–离子和离子–电子——都乘上同一因子

$$\mathcal{J}_{12}(\boldsymbol{k}, \omega_m) = \frac{4\pi e^2 Z_1 Z_2}{k^2\left[1 + \frac{4\pi e^2}{k^2}(\mathcal{K}_e(\boldsymbol{k}, \omega_m) + Z^2\mathcal{K}_i(\boldsymbol{k}, \omega_m))\right]} =$$

$$= \frac{4\pi e^2 Z_1 Z_2}{k^2 + 4\pi e^2[\mathcal{K}_e(\boldsymbol{k}, \omega_m) + Z^2\mathcal{K}_i(\boldsymbol{k}, \omega_m)]}; \quad (22.8)$$

这里 $\omega_m = 2\pi T m$，$m$ 是整数，$\mathcal{K}_e$ 对应电子环，$\mathcal{K}_i$ 对应离子环。

已經指出，我們暫时認为离子是費米气体。因此 $\mathcal{K}_e$ 和 $\mathcal{K}_i$ 的計算在第一阶段是等同的：

$$\mathcal{K} = -2T\sum_n\int\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{(i\varepsilon_n - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}) + \mu)(i\varepsilon_n + i\omega_m - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}) + \mu)} =$$

$$= -2T\int\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{i\omega_m - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}) + \varepsilon_0(\boldsymbol{p})}\sum_n \times$$

$$\times\left[\frac{1}{i\varepsilon_n - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}) + \mu} - \frac{1}{i(\varepsilon_n + \omega_m) - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}) + \mu}\right] =$$

$$= 2T\int\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{i\omega_m - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}) + \varepsilon_0(\boldsymbol{p})} \times$$

$$\times\sum_{n>0}\left[\frac{2(\varepsilon_0(\boldsymbol{p}) - \mu)}{\pi^2T^2(2n+1)^2 + (\varepsilon_0(\boldsymbol{p}) - \mu)^2} - \frac{2(\varepsilon_0(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}) - \mu)}{\pi^2T^2(2n+1)^2 + (\varepsilon_0(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}) - \mu)^2}\right] =$$

1) 对于具有庫伦相互作用系統的这种求和，是由 Gell-Mann 和 Brueckner[48] 首先完成的。



$$= \int\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{i\omega_m - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}) + \varepsilon_0(\boldsymbol{p})} \times$$

$$\times\left[\operatorname{th}\frac{\varepsilon_0(\boldsymbol{p}) - \mu}{2T} - \operatorname{th}\frac{\varepsilon_0(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}) - \mu}{2T}\right] =$$

$$= 2\int\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\frac{n(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}) - n(\boldsymbol{p})}{i\omega_m - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}) + \varepsilon_0(\boldsymbol{p})}, \quad (22.9)$$

式中对电子 $n(\boldsymbol{p}) = \dfrac{1}{e^{\frac{\varepsilon_0(\boldsymbol{p})-\mu}{T}} + 1}$，而对于离子 $2n(\boldsymbol{p}) = e^{\frac{\mu-\varepsilon_0(\boldsymbol{p})}{T}}$。

这里已用过了公式

$$\sum_{n>0}\frac{1}{(2n+1)^2 + x^2} = \frac{\pi}{4x}\operatorname{th}\frac{\pi x}{2}. \quad (22.10)$$

我們将假定 $|\boldsymbol{k}| \ll p_0$。离子平均动量約为 $\sqrt{MT}$，根据 (22.2) 它远大于 $p_0$。因此，将(22.9)式按 $\boldsymbol{k}$ 展开后，可簡化为：

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{k}, \omega_m) = 2\int\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\frac{\partial n}{\partial\varepsilon}\frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{k}}{i\omega_m - \boldsymbol{v}\boldsymbol{k}}. \quad (22.11)$$

所討論的頂角部分只和 $\boldsymbol{k}$ 与 $\omega_m$ 有关。因此它可和传递粒子間电磁相互作用的 $\mathfrak{D}$ 函数对应。其实，試取如下的量：

$$\mathfrak{D}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \tau_1 - \tau_2) = \langle T(\tilde{\bar\psi}_\alpha(\boldsymbol{r}_1\tau_1)\tilde{\bar\psi}_\beta(\boldsymbol{r}_2\tau_2)\tilde\psi_\alpha(\boldsymbol{r}_1\tau_1)\tilde\psi_\beta(\boldsymbol{r}_2\tau_2))\rangle,$$

其中 $\langle\cdots\rangle$ 表示普通的温度平均。不难驗証，它对变量 $\tau_1 - \tau_2$ 和 $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ 的傅立叶变换具有玻色温度格林函数的一切性質。另一方面，其傅立叶分量显然等于

$$\mathfrak{D}(\boldsymbol{k}, \omega_m) = \mathcal{K}_e(\boldsymbol{k}, \omega_m)\mathcal{J}_{ee}(\boldsymbol{k}, \omega_m)\mathcal{K}_e(\boldsymbol{k}, \omega_m).$$

其它传递动量很小的頂点也是这样。

从而就明白了，如何从温度函数变换到时間函数。我們知道，为了在格林函数情况下完成这种变换，只須求得在变量 $\omega$ 上半平面上解析，并在 $i\omega_m = i\cdot 2\pi T m$ 点和温度格林函数重合的函数。这样定义的是推迟函数 $D_R$。真正的格林函数在 $\omega>0$ 时等于 $D_R$，而在 $\omega < 0$ 时等于 $D_R^*$。

对函数 $\mathcal{K}_e$ 和 $\mathcal{K}_i$ 也容易完成这步手續。(这样得到的函数我們記作 $\Pi_e$, $\Pi_i$)。从积分(22.11)得知，为此須作代换 $i\omega_m \to \omega +$

$+ i\delta \operatorname{sign}\omega$. 既然在构成函数 $\mathfrak{D}(\boldsymbol{k}, \omega_m)$ 的图形中，只有因子 $\mathcal{T}''$ 和 $\omega_m$ 有关，则以同法可求得函数 $D(\boldsymbol{k},\omega)$. 显然对于函数 $\Gamma(\boldsymbol{k},\omega)$ 也是如此[1]. 因此时間頂角部分 $\Gamma(\boldsymbol{k}, \omega)$ 也同样由公式(22.8), (22.11) 表达，只是式中应作代换 $i\omega_m \to \omega + i\delta \operatorname{sign}\omega$. $\Gamma$ 的分母中出現了对 $k^2$ 的补充項，这正是庫伦相互作用的德拜屏蔽. 在一般情况下它使相互作用成为推迟的(即 $\Gamma$ 和 $\omega$ 有关).

現在討論 $\Gamma$ 随 $\omega$ 和 $k$ 比值的变化. 当 $\omega \ll v_i k$, (22.11) 式給出：

$$\mathcal{T}_e = \Pi_e = \frac{1}{V}\frac{\partial N_e}{\partial \mu_e},\ \mathcal{T}_i = \Pi_i = \frac{1}{V}\frac{\partial N_i}{\partial \mu_i}. \qquad (22.12)$$

就数量級說 $\frac{1}{V}\frac{\partial N}{\partial \mu} \sim \frac{N}{V\mu}$. 对电子 $\mu_e \sim \frac{p_0^2}{m}$,而对离子 $\mu_i \sim T\ln T$. 因此 $\Pi_i \gg \Pi_e$.

从(22.8)和(22.11)式得到：

$$\Gamma_{12} = \frac{4\pi e^2 Z_1 Z_2}{k^2 + \kappa_i^2}, \qquad (22.13)$$

其中 $\kappa_i = \sqrt{\frac{4\pi Z^2 e^2 N_i}{VT}}$ 是离子的德拜半径倒数.

下一个区間：$v_e k \gg |\omega| \gg v_i k$. 在这个区間里

$$\Pi_i = -\frac{k^2}{\omega^2}\frac{N}{MV},\ \Pi_e = \frac{1}{V}\frac{\partial N_e}{\partial \mu} = \frac{p_0 m}{\pi^2}. \qquad (22.14)$$

代入(22.8)得：

$$\Gamma_{12} = \frac{4\pi e^2 Z_1 Z_2 \omega^2}{(k^2 + \kappa_e^2)\omega^2 - k^2\omega_{p1}^2}, \qquad (22.15)$$

其中 $\kappa_e = \sqrt{\frac{4p_0 m e^2}{\pi}}$ 是电子德拜屏蔽半径的倒数，而 $\omega_{p1}$ 等于：

$$\omega_{p1} = \sqrt{\frac{4\pi N_i Z^2 e^2}{MV}}. \qquad (22.16)$$

1) 对級数个别項成立的这种手續，可能不适用于级数的和. 但这里可以驗証，它导致正确的結果.



函数 $\Gamma_{12}$ 的极点为

$$\omega = \frac{\omega_{p1} k}{\sqrt{k^2 + \kappa_e^2}}. \qquad (22.17)$$

当 $k \ll \kappa_e$ 时，$\omega(k)$ 是綫性函数. 这就是所謂离子声波. 声速

$$\frac{\omega}{k} = \frac{\omega_{p1}}{\kappa_e} = p_0\sqrt{\frac{Z}{3Mm}}. \qquad (22.18)$$

当 $k \gg \kappa_e$ 时，$\omega$ 趋向常数 $\omega \approx \omega_{p1}$. 直到 $k \sim \frac{\omega_{p1}}{v}$, $\Gamma_{12}$ 的极点还是实数，因此，当 $\omega_{p1} \gg v_i\kappa_e$ 时，$\omega$ 达到 $\omega_{p1}$ 值. 这个条件因(22.2)第一不等式而成立.

这些振蕩的衰減由 $\Pi_i$ 和 $\Pi_e$ 的虛部决定. 将电子和离子的平衡分布代入(22.11)式 ($i\omega_m \to \omega + i\delta \operatorname{sign}\omega$), 得到：

$$\operatorname{Im}\Pi_i = \frac{|\omega|}{k}\frac{N_i}{V}\sqrt{\frac{2\pi M}{T^3}}\, e^{-\frac{M\omega^2}{2k^2T}},$$

$$\operatorname{Im}\Pi_e = \frac{|\omega|}{k}\frac{m^2}{2\pi}. \qquad (22.19)$$

$\operatorname{Im}\Pi_i$ 的指数冪約为 $\frac{p_0^2}{mT}$ 或略小，而 $\operatorname{Im}\Pi_i$ 和 $\operatorname{Im}\Pi_e$ 的指数前因子之比値約为 $\left(\frac{p_0^2}{mT}\right)^{3/2}\sqrt{\frac{M}{m}}$. 因此，二者都可能是重要的. 确定 $\Gamma_{12}$ 极点的虛部，我們求得振蕩的衰減为：

$$\gamma = \frac{\omega^4}{k^3}\left[\sqrt{\frac{\pi}{8}}\left(\frac{M}{T}\right)^{3/2} e^{-\frac{M\omega^2}{2k^2T}} + \frac{m^2e^2}{\omega_{p1}^2}\right], \qquad (22.20)$$

其中 $\omega$ 由(22.17)式給出.

当 $kv_e \gg \omega \gg \omega_{p1}$, 根据(22.15)有：

$$\Gamma_{12} = \frac{4\pi e^2 Z_1 Z_2}{k^2 + \kappa_e^2}. \qquad (22.21)$$

在 $\omega \sim kv_e$ 的情形下，电子环超过离子环. 根据 (22.11) 式，完全的 $\Pi_e$ 等于：

$$\Pi_e = \frac{p_0^2}{\pi^2 v_e}\left[1 - \frac{\omega}{2kv_e}\ln\left|\frac{\omega + kv_e}{\omega - kv_e}\right| + \frac{i\pi|\omega|}{2kv_e}\theta(kv_e - |\omega|)\right]. \tag{22.22}$$

在 $\omega \gg kv_e$ 区間中,由此得到:

$$\Pi_e = -\frac{p_0^3}{\pi^2 m}\frac{k^2}{3\omega^2}\left[1 + \frac{3}{5}\frac{v_e^2 k^2}{\omega^2}\right].$$

将它代入(22.8)就得到:

$$\Gamma_{12}(\boldsymbol{k}, \omega) = \frac{4\pi e^2 Z_1 Z_2}{k^2\left\{1 - \frac{4\pi e^2 N_e}{m\omega^2 V}\left[1 + \frac{3}{5}\frac{v_e^2 k^2}{\omega^2}\right]\right\}}. \tag{22.23}$$

这个表达式的极点在

$$\omega^2 = \omega_{p2}^2 + \frac{3}{5}v_e^2 k^2 \tag{22.24}$$

处,式中

$$\omega_{p2}^2 = \frac{4\pi e^2 N_e}{mV}, \quad v_e k \ll \omega_{p2}. \tag{22.25}$$

极点对应电子的所謂等离子振蕩. 和离子的等离子振蕩一样, 頻率几乎与波长无关. 振蕩的頻散由小修正項描述. 衰減的計算也同前一种情况一样,即在經过变換的积分 (22.11) 中, 考虑围繞极点所給出的指数小的貢献. 它正比于 $e^{-\frac{m\omega_{p2}^2}{2k^2T}}$. 在温度很低时这个式子不对,因为 $e^2$ 的下一級近似給出更大的項.

从(22.23)式看出,当 $\frac{k}{\omega} \to 0$, $\omega \to 0$ 时, $\Gamma \to -\infty$. 因此在这个例子中看到,对于庫伦相互作用 $\Gamma^\omega$ 含有为无穷大的常数.



图 63

**3. 电子能譜.** 现在求电子格林函数[1). 图 63 是对自能部分的一級修正項. 它的解析表达式为:

$$\Sigma_1 = -4\pi e^2 T\sum_{\varepsilon_1}\int\frac{d\boldsymbol{p}_1}{(2\pi)^3}e^{i\varepsilon_1 t}_{\varepsilon_1\to+0}\mathfrak{G}^{(0)}(\varepsilon_1, p_1)\frac{1}{(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_1)^2}. \tag{22.26}$$

1) 本小节基于論文[11],以及 A. Кочкин 为 $T \neq 0$ 情形所作的計算.



根据(17.33)和(22.10)完成对 $\varepsilon_1$ 的求和,得到:

$$\Sigma_1 = -4\pi e^2\int\frac{d\boldsymbol{p}_1}{(2\pi)^3}n_F(\boldsymbol{p}_1)\frac{1}{(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_1)^2},$$

其中 $n_F$ 为費米函数.

从上式減去再加上同一表达式, 其中取 $n_F(T = 0)$. 离开費米边界时, 差 $n_F(\boldsymbol{p}, T) - n_F(\boldsymbol{p}, 0)$ 迅速趋向零. 因而可以在相应积分中将 $\xi_1 = \frac{\boldsymbol{p}_1^2}{2m} - \frac{p_0^2}{2m}$ 换成 $v(p_1 - p_0)$. 于是完成对角度的积分后得[1):

$$\Sigma_1 = -\frac{e^2}{\pi p}\int_0^{p_0}p_1 dp_1\ln\left|\frac{p_1 + p}{p_1 - p}\right| - \frac{e^2}{\pi v}\int_0^\infty\frac{d\xi_1}{e^{\xi_1/T} + 1}\ln\frac{\xi_1 + \xi}{|\xi_1 - \xi|}.$$

算出第一个积分并略作变换,我們就得出:

$$\Sigma_1 = \frac{e^2 m}{\pi p}\left[\xi\left(\ln\frac{(p + p_0)^2}{2mT} - 1\right) - Tf\left(\frac{\xi}{T}\right)\right] - \frac{e^2}{\pi}p_0 \tag{22.27}$$

其中

$$\xi = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} - \frac{p_0^2}{2m},$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_0^\infty dz\ln z\left[\operatorname{th}\frac{z + x}{2} - \operatorname{th}\frac{z - x}{2}\right].$$

由于这个表达式和 $\varepsilon$ 无关, 它乃是对准粒子能量的修正. 既然費米边界动量不因相互作用而改变, 同时它与化学势的关系为 $\varepsilon(p_0) = \mu$, $p = p_0$ 时的 $\Sigma_1$ 值应看成化学势的改变:

$$\Delta\mu = -\frac{e^2}{\pi}p_0. \tag{22.28}$$

剩下的 $\Sigma_1 - \Delta\mu$ 当 $||\boldsymbol{p}| - p_0| \ll p_0$ 时等于

$$\Sigma_1 - \Delta\mu = \frac{e^2}{\pi v}\left[\xi\left(\ln\frac{2vp_0}{T} - 1\right) - Tf\left(\frac{\xi}{T}\right)\right] \tag{22.29}$$

由此得到:

1) 本小节中以字母 $v$ 記費米面上的电子速度 $\frac{p_0}{m}$.

$$\Sigma_1 - \Delta\mu = \frac{e^2}{\pi v}\xi \ln\frac{2p_0 v}{\xi}, \quad 当 \quad \xi \gg T,$$
$$\Sigma_1 - \Delta\mu = \frac{e^2}{\pi v}\xi\left(\ln\frac{4\gamma v p_0}{\pi T} - 1\right), \quad 当 \quad \xi \ll T, \tag{22.30}$$

式中 $\gamma = e^c \simeq 1.78$($c$——尤拉常数).

从(22.30)式看出,对于很小的 $\xi(\boldsymbol{p})$ 和 $T$, 表达式 (22.27) 是不够确切的. 对准粒子速度的修正项 $\frac{\partial \Sigma_1}{\partial \boldsymbol{p}}$, 在费米边界附近当 $T \to 0$, $\xi \to 0$ 时,正比于 $\ln\frac{vp_0}{T}$ 或 $\ln\frac{vp_0}{\xi}$ 而趋向无穷大. 这种結果之所以产生,是因为当 $p \to p_0$ 时,积分 (22.26) 顶角中的小动量传递变得更重要了. 这时必须考虑全部貫穿于基本虛綫上的环,換言之,須将 $\frac{4\pi e^2}{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_1)^2}$ 換成对应(22.8)式的 $\Gamma_{ee}(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}, \varepsilon_1-\varepsilon)$.

更方便的作法,不是計算整个 $\Sigma$, 而是求 $\Sigma$ 和上面已算出的 $\Sigma_1$ 之差. 这个差仍由(22.26)式表示,只是其中 $\frac{4\pi e^2}{(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p})^2}$ 換成了 $\Gamma_{ee} - \frac{4\pi e^2}{(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p})^2}$. 应指出,在此积分中考虑 $\mathfrak{G}$ 函数的高級近似,并不导致重要的修正,因为在修正之后的 $\mathfrak{G}$ 函数中,$p_0$ 仍和从前一样对应費米边界.

前面已指出过,$\Gamma_{ee}$ 作为頻率的函数,具有玻色粒子格林函数的一切性质. $\Gamma_{ee}$ 及其零級近似的差仍然如此. 由此可見,我們的問題和上节中計算与声子作用着的电子自能,极为相似. 然而这里重要的是小动量值 $k$. 将 $\Gamma_{ee}(\omega, k) - \frac{4\pi e^2}{k^2}$ 記作 $D(\omega, k)$. 那末前节(21.29)式就完全适用于我們所討論的情形($g^2$ 須換成 1).注意 $\Sigma(\varepsilon) \ll \varepsilon$, 而且重要的是 $k \ll p_0$, 我們就得到:

$$\Sigma_R = \frac{1}{(2\pi)^3 v}\int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \int_0^\infty k\,dk \int_{\xi-vk-\varepsilon}^{\xi+vk+\varepsilon} d\omega\, \frac{\operatorname{Im} D_R(\eta, k)}{\eta+\omega-i\delta}\times$$
$$\times\left(\operatorname{th}\frac{\omega+\varepsilon}{2T} + \operatorname{cth}\frac{\eta}{2T}\right). \tag{22.31}$$

由于我們只关心能譜,其零級近似为 $\varepsilon = \xi$, 因而可認为对 $\omega$



的积分限是 $(-vk, +vk)$. $\Sigma_R$ 的实部等于积分(22.31)的主値. 作若干变换,并注意 $\operatorname{Im} D_R(\eta, k)$ 的反对称性以及 $\operatorname{Im} D_R(\eta, k)$ 和 $\operatorname{Re} D_R(\eta, k)$ 的关系,我們求出:

$$\operatorname{Re}\Sigma_R = \frac{\pi}{(2\pi)^3 v}\int_0^\infty d\omega \int_{\omega/v}^\infty k\,dk\, \operatorname{Re} D_R(\omega, k)\times$$
$$\times\left(\operatorname{th}\frac{\varepsilon+\omega}{2T} + \operatorname{th}\frac{\varepsilon-\omega}{2T}\right). \tag{22.32}$$

类似地由(22.31)中环繞极点的积分得:

$$\operatorname{Im}\Sigma_R = \frac{\pi}{(2\pi)^3 v}\int_0^\infty d\omega \int_{\omega/v}^\infty k\,dk\, \operatorname{Im} D_R(\omega, k)\times$$
$$\times\left(2\operatorname{cth}\frac{\omega}{2T} - \operatorname{th}\frac{\omega+\varepsilon}{2T} - \operatorname{th}\frac{\varepsilon-\omega}{2T}\right). \tag{22.33}$$

和从前一样,含有 th 和 cth 的括弧表明,$\varepsilon$ 和 $T$ 两个变量中只有大者起决定作用,(有一个例外情形,即 $D_R$ 的极点重要,見下文). $D_R$ 的値由 $\omega$ 所处的区間决定: $\omega \ll kv_i$, $kv_i \ll \omega \ll kv_e$, $\omega \sim kv_e$. 不难看出,与此相应 $\max(\varepsilon, T)$的値也有三个区間: (a) 小于 $\omega_{p1}$, (b) 处于 $\omega_{p1}$ 和 $\omega_{p2}$ 之間, (c) 大于 $\omega_{p2}$. 根据不等式(22.2)和(22.3), $T \gg \omega_{p1}$. 因此我們只須討論区間 (b) 和 (c).

先考慮 $\omega_{p1} \ll \max(\varepsilon, T) \ll \omega_{p2}$ 的情形. 将 $\operatorname{Re}\Sigma_R$ 中对 $k$ 的积分区間分成两段: $\frac{\omega}{v_e} \lesssim k \lesssim \frac{\omega}{v_i}$, $\frac{\omega}{v_i} \lesssim k < \infty$. 代入

$$D_R = -\frac{(4\pi e^2)^2(Z^2\Pi_i + \Pi_e)}{k^2[k^2 + 4\pi e^2(Z^2\Pi_i + \Pi_e)]}, \tag{22.34}$$

我們看出,区間 $\frac{\omega}{v_i} \lesssim k < \infty$ 的貢献的数量級为 $\frac{e^2}{v}\omega_{p1}\operatorname{th}\frac{\varepsilon}{2T}$, 即远小于 $\Sigma_1$. 相反,区間 $\frac{\omega}{v_e} \lesssim k \lesssim \frac{\omega}{v_i}$ 却給出重要貢献. 注意到重要的値是 $\omega \sim \max(\varepsilon, T) \gg \omega_{p1}$, 可認为 $\Pi_i \ll \Pi_e$, $4\pi e^2\Pi_e = \kappa_e^2$, 从而得:

$$\operatorname{Re}\Sigma_R = -\frac{e^2}{2\pi v}\int_0^\infty d\omega \int_{\omega/v}^\infty \frac{\kappa_e^2\,dk}{k(k^2+\kappa_e^2)}\left(\operatorname{th}\frac{\varepsilon+\omega}{2T} + \operatorname{th}\frac{\varepsilon-\omega}{2T}\right) =$$

$$= -\frac{e^2}{\pi v}\left[\varepsilon \ln \frac{v\kappa_e}{T} - Tf\left(\frac{\varepsilon}{T}\right)\right]. \tag{22.35}$$

$\mathrm{Im}\,\Sigma_R$ 的积分区間也能如此分段．在区間 $\frac{\omega}{v_e} \lesssim k \lesssim \frac{\omega}{v_i}$ 中，函数 $D_R$ 具有对应于离子声波的极点．环繞极点的积分对 $\mathrm{Im}\,\Sigma_R\cdot(\omega, k)$ 的貢献为：

$$-\frac{e^2\omega_{p1}}{4v}\int_0^\infty d\omega\int_{\frac{\omega}{v}}^{\sim\frac{\omega}{v_i}}\frac{k^2dk}{(k^2+\kappa_e^2)^{3/2}}\delta\left(\omega-\omega_{p1}\frac{k}{\sqrt{k^2+\kappa_e^2}}\right)\times$$

$$\times\left(2\mathrm{cth}\,\frac{\omega}{2T}-\mathrm{th}\,\frac{\omega+\varepsilon}{2T}-\mathrm{th}\,\frac{\omega-\varepsilon}{2T}\right)=$$

$$= -\frac{e^2T}{v}\ln\frac{\kappa_i}{\kappa_e}, \tag{22.36}$$

（此結果以对数准确度[1]算出）．

与此同时，$\Pi_i$ 和 $\Pi_e$ 的虚部也可能有重要貢献．作代入之后有：

$$-\frac{e^2}{2\pi v}\int_0^\infty d\omega\int_{\omega/v}^\infty\frac{kdk4\pi e^2\,\mathrm{Im}(\Pi_e+Z^2\Pi_i)}{[k^2+4\pi e^2(\Pi_e+Z^2\Pi_i)]^2}\times$$

$$\times\left(2\mathrm{cth}\,\frac{\omega}{2T}-\mathrm{th}\,\frac{\omega+\varepsilon}{2T}-\mathrm{th}\,\frac{\omega-\varepsilon}{2T}\right).$$

由于 $\mathrm{Im}\,\Pi_i$ 之指数性質，相应积分中重要的是 $k \gtrsim \frac{\omega}{v_i}$．估値表明，这个积分对 $\mathrm{Im}\,\Sigma_K$ 的貢献約为 $\frac{e^2}{v}T$，即在对数准确度下小于(22.36)．

另一个虚部 $\mathrm{Im}\,\Pi_e$ 給出区間为 $\omega \sim \max(\varepsilon, T)$，$k\sim\kappa_e$ 的积分，因此可令对 $k$ 的积分下限等于零：

$$-\frac{e^2}{4v^2}\int_0^\infty d\omega\cdot\omega\left(2\mathrm{cth}\,\frac{\omega}{2T}-\mathrm{th}\,\frac{\omega+\varepsilon}{2T}-\mathrm{th}\,\frac{\omega-\varepsilon}{2T}\right)\times$$

1) 对数准确度的意思是：比値 $\frac{\kappa_i}{\kappa_e}$ 要足够大，以致 $\ln\frac{\kappa_i}{\kappa_e}$ 也相当大，而誤差的数量級为 $\left(\ln\frac{\kappa_i}{\kappa_e}\right)^{-1}$——譯者注．



$$\times\int_0^\infty\frac{\kappa_e^2dk}{(k^2+\kappa_e^2)^2} = -\frac{\pi e^2}{16v^2\kappa_e}[\varepsilon^2+(\pi T)^2]. \tag{22.37}$$

此式第二項小于(22.36)，然而含有 $\varepsilon^2$ 的第一項可能大于离子衰減．

再考虑区間 $\omega_{p2} \ll \max(\varepsilon, T)$．討論 $\mathrm{Re}\,\Sigma_R$ 的积分(22.35)，不难看出，它只給出約为 $\frac{e^2}{v}\omega_{p2}\,\mathrm{th}\,\frac{\varepsilon}{2T}$ 的次要貢献．因此，$\Sigma_R$ 的实部基本上等于 $\Sigma_{R1}$．至于虚部，則 $D_R$ 的离子声波极点的貢献仍是(22.36)．$\mathrm{Im}\,\Pi_i$ 的貢献也照旧，即无足輕重．

来自 $\mathrm{Im}\,\Pi_e$ 的电子衰減由一积分表达，其中重要的是 $k\sim\kappa_e$，$\omega\sim v\kappa_e\sim\omega_{p2}$．如果 $T\gg\omega_{p2}$，則积分的数量級为 $\frac{e^2}{v}T$，即可不予考虑．如果 $T\ll\omega_{p2}$，則在积分中可令 $T=0$．由于現在 $\omega\sim vk$，应代入 $\Pi_e$ 的完全表达式(22.22)．首先要利用的是，$T=0$ 时(22.32)和(22.33)两式的温度括弧相同且等于2．組合此二式，得：

$$(\Sigma_K-\Sigma_{R1})_{\substack{T=0\\ \varepsilon\gg\omega_{p2}}} = \frac{1}{(2\pi)^2v}\int_0^\infty d\omega\int_{\omega/v}^\infty kdkD_R(\omega,k).$$

将(22.34)和(22.22)代入上式，求得：

$$-e^2\kappa_e(\beta_1+i\beta_2), \tag{22.38}$$

其中常数 $\beta_1$ 和 $\beta_2$ 分别等于以下积分的实部和虚部：

$$\frac{1}{2}\int_0^1 dx\left[1-x\left(\mathrm{arth}\,x-\frac{i\pi}{2}\right)\right]^{1/2}. \tag{22.39}$$

（此处取虚部为正値的根号）．(22.38)式的虚部就是所求的衰減．

由方程 $\varepsilon-\xi-\Sigma+\Delta\mu=0$，求得各不同区間中电子激发的能譜和衰減如下：

(a) $\omega_{p1}\ll\max(\xi, T)\ll\omega_{p2}$:

$$\varepsilon(\boldsymbol{p}) = \xi(\boldsymbol{p})\left[1+\frac{e^2}{\pi v}\left(\ln\frac{2p_0}{\kappa_e}-1\right)\right],$$

$$\gamma(\boldsymbol{p}) = \frac{e^2}{v}\left[T\ln\frac{\kappa_i}{\kappa_e}+\frac{\pi\xi^2(\boldsymbol{p})}{16v\kappa_e}\right];$$

(b) $\omega_{p2} \ll \max(\xi, T)$ (22.40)

$$\varepsilon(\boldsymbol{p}) = \xi(\boldsymbol{p})\left[1 + \frac{e^2 m}{\pi p}\left(\ln\frac{(p+p_0)^2}{2mT} - 1\right)\right] - \\ - \frac{e^2 mT}{\pi p} f\left(\frac{\xi(\boldsymbol{p})}{T}\right),$$

$$\gamma(\boldsymbol{p}) = \frac{e^2}{v} T \ln\frac{\kappa_i}{\kappa_e} + e^2\kappa_e\beta_2.$$

作为(22.40)式的特例，在 $\frac{p_0^2}{2m} \gg T \gg \max(\xi(\boldsymbol{p}), \omega_{p2})$ 时有：

$$\varepsilon(\boldsymbol{p}) = \xi(\boldsymbol{p})\left[1 + \frac{e^2}{\pi v}\left(\ln\frac{4\gamma p_0 v}{\pi T} - 1\right)\right],$$

而在 $\xi(\boldsymbol{p}) \gg \max(T, \omega_{p2})$ 时有：

$$\varepsilon(\boldsymbol{p}) = \xi(\boldsymbol{p})\left[1 + \frac{e^2 m}{\pi p}\ln\left|\frac{p+p_0}{p-p_0}\right|\right]. \quad (22.41)$$

**4. 热力学函数.** 我們要討論的最后一个問題是簡并等离子体的热力学函数[1]. 根据(10.22)式有：

$$\Delta\Omega = \Omega - \Omega_0 = \frac{1}{2}\int_0^{e^2} d(e^2)\int d\boldsymbol{r}d^4x' \frac{\delta(\tau-\tau')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\Big[\langle\tilde{\bar{\psi}}_\alpha(x)\tilde{\bar{\psi}}_\beta(x') \times \\ \times \tilde{\psi}_\beta(x')\tilde{\psi}_\alpha(x)\rangle - 2Z\langle\tilde{\bar{\psi}}_\alpha(x)\tilde{\bar{\Phi}}(x')\tilde{\Phi}(x')\tilde{\psi}_\alpha(x)\rangle + \\ + Z^2\langle\tilde{\bar{\Phi}}(x)\tilde{\bar{\Phi}}(x')\tilde{\Phi}(x')\tilde{\Phi}(x)\rangle\Big]. \quad (22.42)$$

括弧 $\langle\cdots\rangle$ 内的式子可以通过函数 $\mathfrak{G}$ 和 $\mathcal{T}$ 表示；例如：

$$\langle\tilde{\bar{\psi}}_\alpha(x)\tilde{\bar{\psi}}_\beta(x')\tilde{\psi}_\beta(x')\tilde{\psi}_\alpha(x)\rangle = -2\mathfrak{G}_e^{(0)}(x-x')\mathfrak{G}_e^{(0)}(x'-x) + \\ + \left(\frac{N_e}{V}\right)^2 - \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 \mathfrak{G}_e^{(0)}(x-x_1)\mathfrak{G}_e^{(0)}(x'-x_2) \times \\ \times \mathfrak{G}_e^{(0)}(x_3-x)\mathfrak{G}_e^{(0)}(x_4-x')\mathcal{T}^{ee}_{\alpha\beta\alpha\beta}(x_1x_2, x_3x_4).$$

$\left(\frac{N_e}{V}\right)^2$ 項可省去，因为它在 (22.42) 中与来自电子–离子以及离子相互作用的类似項消去，这是电性中和条件的表現. 在展开来自电子–离子以及离子–离子相互作用的四个算符平均值时，不必写出有两条 $\mathfrak{G}$ 綫的那項. 这項来自交換作用. 离子和电子不可能交換，而离子間的交換作用很小，因为离子組成玻尔兹曼气体.

因此所得的式子由两項构成. 一項来自两个电子 $\mathfrak{G}$ 函数的乘积(它相当于电子交換能)，另一項乃是各种不同 $\mathfrak{G}$ 綫的諸項之和.

先討論第一項. 它在动量表象中等于：

$$\frac{\Delta\Omega_1}{V} = -\underset{\tau_1,\tau_2\to+0}{4\pi e^2 T^2}\sum_{n_1 n_2}\int\frac{d\boldsymbol{p}_1 d\boldsymbol{p}_2}{(2\pi)^6}\frac{1}{(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)^2} \times \\ \times \frac{e^{i\varepsilon_{n_1}\tau_1}}{i\varepsilon_{n_1} - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}_1) + \mu}\frac{e^{i\varepsilon_{n_2}\tau_2}}{i\varepsilon_{n_2} - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}_2) + \mu}.$$

因子 $e^{i\varepsilon_n\tau}$ 指示哈密頓量 (22.1) 中算符 $\psi$ 的順序. 对 $n_1$ 和 $n_2$ 的求和是相互无关的. 回忆 $\mathfrak{G}$ 函数傅立叶分量的定义，我們得到：

$$T\sum_{\substack{n \\ \tau\to+0}}\frac{e^{i\varepsilon_n\tau}}{i\varepsilon_n - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}) + \mu} = \underset{\tau\to+0}{\mathfrak{G}_e^{(0)}}(-\tau, \boldsymbol{p}) = n(\boldsymbol{p}).$$

因此求出：

$$\frac{\Delta\Omega_1}{V} = -4\pi e^2\int\frac{d\boldsymbol{p}_1 d\boldsymbol{p}_2 n(\boldsymbol{p}_1)n(\boldsymbol{p}_2)}{(2\pi)^6(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)^2}. \quad (22.43)$$

对于玻尔兹曼气体这項很小，因为其中填充数 $n \ll 1$. 这就是忽略离子交換的根据.

現在討論其它各項. 在动量表象中得到：

$$\frac{\Delta\Omega_2}{V} = -\frac{4\pi}{2}\int_0^{e^2} d(e^2)T^3\sum_{n_1 n_2 m}\int\frac{d\boldsymbol{k}d\boldsymbol{p}_1 d\boldsymbol{p}_2}{(2\pi)^9}\frac{1}{k^2} \times \\ \times \{4\mathfrak{G}^e_{n_1}(\boldsymbol{p}_1)\mathfrak{G}^e_{n_1+m}(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{k})\mathfrak{G}^e_{n_2}(\boldsymbol{p}_2)\mathfrak{G}^e_{n_2+m}(\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{k})\mathcal{T}_{ee}(\boldsymbol{k}, \omega_m) - \\ - 8Z\mathfrak{G}^i_{n_1}(\boldsymbol{p}_1)\mathfrak{G}^i_{n_1+m}(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{k})\mathfrak{G}^e_{n_2}(\boldsymbol{p}_2)\mathfrak{G}^e_{n_2+m}(\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{k})\mathcal{T}_{ei}(\boldsymbol{k}, \omega_m) + \\ + 4Z^2\mathfrak{G}^i_{n_1}(\boldsymbol{p}_1)\mathfrak{G}^i_{n_1+m}(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{k})\mathfrak{G}^i_{n_2}(\boldsymbol{p}_2)\mathfrak{G}^i_{n_2+m}(\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{k})\mathcal{T}_{ii}(\boldsymbol{k}, \omega_m)\}.$$

由于頂角部分 $\mathcal{T}$ 本身的数量级为 $e^2$，这項在形式上是 $e^2$ 的四級項. 但这里重要的是，在对 $k$ 的积分和对 $m$ 的求和中小的 $k$ 和 $m$ 起主要作用. 与(22.9)式比較，我們可写出：

$$\frac{\Delta\Omega_2'}{V} = -2\pi\int_0^{e^2} d(e^2)T\sum_m\int\frac{d\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{k^2}\{\Pi_e^2(\omega_m, \boldsymbol{k})\mathcal{T}_{ee}(\omega_m, \boldsymbol{k}) + \\ + 2Z\Pi_i(\omega_m, \boldsymbol{k})\Pi_e(\omega_m, \boldsymbol{k})\mathcal{T}_{ei}(\omega_m, \boldsymbol{k}) +$$

1) 簡并等离子体的热力学函数是 A. A. Веденов[45] 算得的.

$$+ Z^2\mathcal{N}_i^2(\omega_m, \boldsymbol{k})\mathcal{T}_{ii}(\omega_m, \boldsymbol{k})\} = -8\pi^2\int_0^{e^2} e^2 d(e^2) T \times$$
$$\times \sum_m \int d\boldsymbol{k} \frac{1}{k^2} \frac{\mathcal{N}_e^2 + 2Z^2\mathcal{N}_i\mathcal{N}_e + Z^4\mathcal{N}_i^2}{k^2 + 4\pi e^2(\mathcal{N}_e + Z^2\mathcal{N}_i)} =$$
$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^{e^2} e^2 d(e^2) T \sum_m \int dk \frac{1}{k^2} \times$$
$$\times \frac{(\mathcal{N}_e + Z^2\mathcal{N}_i)^2}{k^2 + 4\pi e^2(\mathcal{N}_e + Z^2\mathcal{N}_i)}. \quad (22.44)$$

这里起主要作用的 $k^2$ 值約为 $4\pi e^2(\mathcal{N}_e + Z^2\mathcal{N}_i)$. 我們須确定 $v_e k$, $v_i k$ 和 $\omega_m = 2m\pi T$ 各量的关系. 不难看出,(22.44)式中对 $k$ 的积分随 $4\pi e^2(\mathcal{N}_e + Z^2\mathcal{N}_i)$ 增加. 討論 $\mathcal{N}$ 的(22.11)式. 如果設 $vk \ll T$, 則 $\omega_m = 0$ 时 $\mathcal{N}(\omega_m, k)$ 的值最大. 这时最重要的是 $\mathcal{N}_i \sim \frac{N_i}{TV}$ 的离子环, 因而 $4\pi e^2(\mathcal{N}_e + Z^2\mathcal{N}_i) \sim \frac{e^2}{V}\frac{N_i Z^2}{T}$. 由此得出 $(v_i k)^2 \sim \frac{T}{M}\frac{N_i}{V}\frac{e^2}{T} \sim \frac{e^2 N_i}{VM} \ll T^2$. 因此我們的假設是对的. 我們可在(22.36)中只取 $m = 0$ 的項,并且令 $\mathcal{N}_e + Z^2\mathcal{N}_i \approx \frac{Z^2}{V}\frac{\partial N_i}{\partial \mu}$. 然后对 $k^2$ 积分得:

$$\frac{\Delta\Omega_2}{V} = -\frac{2\sqrt{\pi}}{3}(Ze)^3 T\left(\frac{\partial N_i}{V\partial\mu}\right)^{3/2} = -\frac{2\sqrt{\pi}}{3}(Ze)^3\frac{(N_i/V)^{3/2}}{T^{1/2}}. \quad (22.45)$$

在条件(22.2),(22.3)成立时,这項比(22.43)小. 然而这是唯一数量級为 $e^3$ 的項,因为 $\Delta\Omega_1$ 的修正項数量級为 $e^4$.

如果不要求电子气体滿足強簡并条件, 則 $\Delta\Omega_2$ 可能达到与 $\Delta\Omega_1$ 同数量級. 然而这时还应計入电子环. 因此得到:

$$\frac{\Delta\Omega}{V} = -4\pi e^2\int\frac{d\boldsymbol{p}_1 d\boldsymbol{p}_2}{(2\pi)^6}\frac{n(\boldsymbol{p}_1)n(\boldsymbol{p}_2)}{(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2)^2} -$$
$$-\frac{2\sqrt{\pi}}{3}e^3 T\left(\frac{Z^2}{V}\frac{\partial N_i}{\partial\mu} + \frac{1}{V}\frac{\partial N_e}{\partial\mu}\right)^{3/2},$$

这个公式在滿足以下条件时适用:

$$e^2 m\left(\frac{V}{N}\right) \ll 1, \ T \gg \max\left\{e^2\left(\frac{N}{V}\right)^{1/3}, \frac{1}{M}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}\right\}. \quad (22.46)$$



# 第五章 相互作用玻色粒子系統

## §23. 絕对温度零度时应用場論方法于玻色粒子系統

推广量子場論方法到温度低于"玻色凝聚"点的玻色粒子系統有很大困难. 然而相应的理論形式已經建立(Беляев[46]),我們將在本章里加以研究. 和以前一样,先討論絕对温度零度的情形.

前面各处論述中建立图解法的基础在于, 几个不相互作用的 $\psi$ 算符乘积的平均値可以归結为算符 $\psi\psi^+$ 成对平均値的乘积. 这乃是維克定理的后果;根据这个定理,任何数量場算符的編时乘积的平均値, 都分解为成对及正規乘积的乘积之和. 对于費米粒子系統, 其基态——"眞空"(我們暫时只討論絕对零度的情形)具有这样的性質,即改变产生和消灭算符的定义,可令正規乘积的平均値为零. 对于玻色粒子系統完全是另一回事. 由于統計的性質, 玻色气体在低温之下在动量为零的状态里能集中任意多的粒子. 理想气体温度 $T = 0$ 时最低能級上的粒子数就等于系統內的粒子总数. 因此玻色凝聚状态的特点就是, 当总粒子数 $N$ 和系統的体积趋向无穷大时, 动量为零的基态能級上的粒子数密度趋向有限値. 故而算符 $a_0^+$ 和 $a_0$ 的正規乘积如 $(a_0^+)^n a_0^n$ 的平均値,不仅不为零,反而可能任意大.

先假設系統处于絕对温度零度. 我們方才說过, 理想玻色气体所有粒子都处于动量为零的能級上. 从相互作用表象的算符 $\psi(x)$ 和 $\psi^+(x)$ 中, 分出相当于在 $p = 0$ 的状态中产生和消灭粒子的算符:

$$\psi(x) = \xi_0 + \psi'(x); \quad \psi^+(x) = \xi_0^+ + \psi'^+(x) \quad (23.1)$$

(以后我們采用記号 $\xi_0 = \frac{a_0}{\sqrt{V}}$, $\xi_0^+ = \frac{a_0^+}{\sqrt{V}}$).

当 $V\to\infty$ 时总粒子数 $N=V\xi_0^+\xi_0$ 可能任意大。因此如果在对易关系

$$\xi_0\xi_0^+-\xi_0^+\xi_0=\frac{1}{V}$$

中省略右端，則算符 $\xi_0$ 和 $\xi_0^+$ 在第一級近似里可看成普通数，第一章里正是这样作的。然而我們将看到，这只对于充分弱的相互作用才是有意义的。

系統的总哈密頓量可写成：

$$H=H_0+H_{int},$$

其中

$$H_0=\frac{1}{2m}\int\nabla\psi^+(x)\nabla\psi(x)d\boldsymbol{r},$$

而 $H_{int}$ 是相互作用哈密頓量，其形状我們暂不具体化。所有場論中熟知的、借助 $S$ 矩陣将海森堡表象和相互作用表象算符联系起来的公式，以及 $S$ 矩陣本身的定义

$$S=T\exp\left\{-i\int H_{int}(x)d^4x\right\}. \tag{23.2}$$

都还有效。单粒子格林函数 $G(x,x')$ 通过海森堡表象的算符定义

$$G(x-x')=-i\langle T(\tilde{\psi}(x)\tilde{\psi}^+(x'))\rangle, \tag{23.3}$$

而在相互作用表象中为：

$$G(x-x')=-\frac{i\langle T(\psi(x)\psi^+(x')S)\rangle}{\langle S\rangle} \tag{23.3'}$$

((23.3)式中对 $N$ 个有相互作用粒子的基态求平均，而(23.3')式中对 $N$ 个无相互作用粒子的基态求平均)。然而，不用(23.3)式，而討論格林函数 $G(x-x')$ 的两部分却更为方便：

$$G'(x-x')=-i\langle T(\tilde{\psi}'(x),\tilde{\psi}'^+(x'))\rangle=$$
$$=\frac{-i\langle T(\psi'(x),\psi'^+(x')S)\rangle}{\langle S\rangle}, \tag{23.4}$$

以及

$$G_0(t-t')=-i\langle T(\tilde{\xi}_0(t),\tilde{\xi}_0^+(t'))\rangle=$$
$$=\frac{-i\langle T(\xi_0(t)\xi_0^+(t)S)\rangle}{\langle S\rangle}; \tag{23.5}$$



$G'(x-x')$ 是"凝聚体外"粒子的格林函数，$G_0(t-t')$ 是凝聚体粒子的格林函数。显然 $G_0(t-t')$ 和空間坐标之差无关，因而可定义成总格林函数的动量为零的傅立叶分量：

$$G_0(t-t')=\int G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',t-t')d\boldsymbol{r}'.$$

凝聚体中粒子数密度等于

$$n_0=iG_0(t-t'),$$
$$t'=t+0.$$

至于总粒子数密度，則它总是等于

$$n=n'+n_0=i(G'(0,t-t')+G_0(t-t')),$$
$$t'=t+0. \tag{23.6}$$

和§4一致，我們再次指出，有相互作用存在时，凝聚体內的粒子数不同于总粒子数。

現在直接轉到建立相互作用粒子微扰論的图解法。考慮到凝聚体粒子所起的特殊作用，我們将假定在哈密頓量 $H_{int}$ 中已作了代換(23.1)，算符 $\xi_0$ 和 $\xi_0^+$，$\psi'$ 和 $\psi'^+$ 分开出現于 $H_{int}$ 中。类似地将假定，$S$ 矩陣的定义(23.2)中 $H_{int}$ 也整理成这种形式。我們以后的叙述适用于具有任意相互作用律的粒子、任意数目的算符 $\psi$ 和 $\psi^+$ 的乘积所构成的哈密頓量 $H_{int}(x)$。

作了以上分离之后，編时运算 $T$ 以及对无相互作用粒子基态的求平均，都可以表示成两个相継的运算，分别对凝聚体內和凝聚体外的粒子进行：

$$T=T^0\cdot T',\quad\langle\cdots\rangle=\langle\langle\cdots\rangle'\rangle^0, \tag{23.7}$$

其中 $T^0$ 和 $\langle\cdots\rangle^0$ 应用于算符 $\xi_0$ 和 $\xi_0^+$。把 $S$ 矩陣展为相互作用的冪級数，則每个展开項都包括算符 $\xi_0$，$\xi_0^+$，$\psi'$ 和 $\psi'^+$ 各种乘积的組合。对于自由粒子的算符 $\psi'$ 和 $\psi'^+$ 可应用普通的維克定理，因为凝聚体外粒子的正規乘积的平均值为零。$\psi'\psi'^+$ 的成对編时平均值我們記作 $G^{(0)}(x-x')$，它不为零而等于：

$$G^{(0)}(x-x')=-i\langle T'(\psi'(x)\psi'^+(x'))\rangle'\equiv$$
$$\equiv-i\langle T(\psi'(x)\psi'^+(x'))\rangle. \tag{23.8}$$

相应的傅立叶分量为：

$$G^{(0)}(x-x') = (2\pi)^{-4}\int G^{(0)}(p)e^{ip(x-x')}d^4p,$$
$$G^{(0)}(p) = \frac{1}{\omega - \frac{p^2}{2m} + i\delta}. \quad (23.9)$$

因此，如果将算符 $\xi_0$ 和 $\xi_0^+$ 看成某种(数字)参量，则它們在图形的各种頂点上将起着外場的作用。

考虑如何計算任意数量凝聚体外粒子的格林函数。格林函数的形状是：

$$G_n(x_1\cdots x_n;\, x_1'\cdots x_n') = \frac{(-i)^n\langle T(\psi'(x_1)\cdots\psi'(x_n);\, \psi'^+(x_1')\cdots\psi'^+(x_n')S)\rangle}{\langle S\rangle}. \quad (23.10)$$

根据 (23.7) 将运算 $T$ 和 $\langle\cdots\rangle$ 分成 $T'$, $T^0$ 以及 $\langle\cdots\rangle'$, $\langle\cdots\rangle^0$，先研究以下量的微扰論級数：

$$\overline{G}_n(x_1\cdots x_n;\, x_1'\cdots x_n') = (-i)^n\langle T'(\psi'(x_1)\cdots\psi'(x_n);\, \psi'^+(x_1')\cdots\psi'^+(x_n')S)\rangle'. \quad (23.11)$$

既然运算 $T'$ 和 $\langle\cdots\rangle'$ 不涉及算符 $\xi_0$ 和 $\xi_0^+$，后者对于这些运算就只是参量，而毫不影响凝聚体外粒子算符各种乘积的編时与求平均。因而相应的矩陣元可按普通的費曼图規則写出，它包含編时平均值(23.8)的乘积以及算符 $\xi_0$ 和 $\xi_0^+$ 的冪。在 $S$ 矩陣按 $H_{int}$ 冪的某一級展开項中 $\xi_0$ 及 $\xi_0^+$ 的数目取决于相互作用哈密頓量 $H_{int}$ 的形状，还和在 $H_{int}$ 中代入(23.1)后具体項的选择有关。例如，相互作用(見 § 25)

$$H_{int} = \frac{1}{2}\int \psi^+(x)\psi^+(x')U(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\psi(x')\psi(x)d\mathbf{r}d\mathbf{r}' \quad (23.12)$$

在作了代換

$$\psi \to \xi_0 + \psi';\quad \psi^+ \to \xi_0^+ + \psi'^+$$

之后，分成八項，从 $\xi_0$ 和 $\xi_0^+$ 的四次冪 $\frac{1}{2}(\xi_0^+)^2(\xi_0)^2\int U(\mathbf{r})d\mathbf{r}$ 开始，直到



$$\frac{1}{2}\int \psi'^+(x)\psi'^+(x')U(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\psi'(x')\psi'(x)d\mathbf{r}\,d\mathbf{r}'.$$

图 64 上画出了函数 $\overline{G}(x-x')$ 二級图的一个例子。图中实綫代表(23.9)式中的函数 $G^{(0)}(x-x')$，两点間的波紋綫是相互作用势 $U(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$，而自由折綫代表算符 $\xi_0$ 和 $\xi_0^+$，而且指向相应頂点的是 $\xi_0^+$，背向頂点的是 $\xi_0$。这个图的矩陣元等于

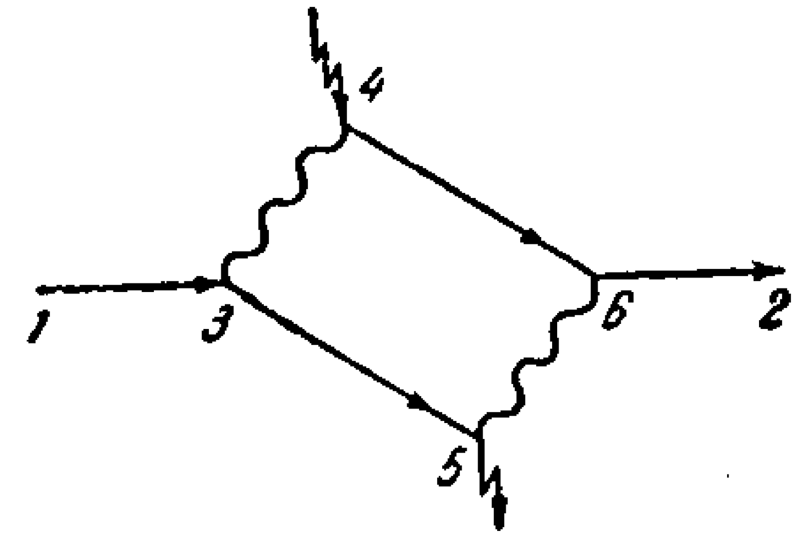


图 64

$$\overline{G}(x_1-x_2) = i\int G^{(0)}(x_1-x_3)G^{(0)}(x_3-x_5)\xi_0(t_5)U(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_4)\times$$
$$\times\, \xi_0^+(t_4)G^{(0)}(x_4-x_6)U(\mathbf{r}_6-\mathbf{r}_5)G^{(0)}(x_6-x_2)d^4x_3\cdots d^4x_6. \quad (23.13)$$

在 (23.10) 式的一般情况下，$\overline{G}_n(x_1\cdots x_n;\, x_1'\cdots x_n')$ 的 $m$ 級矩陣元包括任意数目的算符 $\xi_0$ 和 $\xi_0^+$ 的乘积。須指出，$\xi_0$ 和 $\xi_0^+$ 的冪一定相等。这是因为相互作用 $H_{int}$ 不改变总粒子数。因此如果算符 $\xi_0$ 和 $\xi_0^+$ 的数目不等，则平均值 $\langle\cdots\rangle'$ 中算符 $\psi'$ 和 $\psi'$ 的数目也彼此不等，結果它等于零。

設 $M_n(x_1\cdots x_n;\, x_1'\cdots x_n')$ 是 (23.11) 式中的一个相連图形，它有对应 $m$ 个算符 $\xi_0$ 和 $\xi_0^+$ 的 $2m$ 个頂点。这里相連图形的意义仍同平常一样，指不能分解成无任何綫相連的部分的图形。和 $M_n$ 同时討論所有与它只差"真空"环(即各种不相連图)的图形。从場論中熟知，所有这些图形的总和使矩陣元乘上 $S$ 矩陣的平均值。这里是 $M_n$ 乘以 $\langle S\rangle'$。因此在建立(23.11)式的微扰論級数时只須討論相連图形，而相应矩陣元乘以 $\langle S\rangle'$。

現在从計算 $\overline{G}_n(x_1\cdots x_n;\, x_1'\cdots x_n')$ 回到計算

$$G_n(x_1\cdots x_n;\, x_1'\cdots x_n') = \frac{\langle T^0\overline{G}_n(x_1\cdots x_n;\, x_1'\cdots x_n')\rangle^0}{\langle S\rangle}.$$

这一步中 $\xi_0$ 和 $\xi_0^+$ 的算符性質就有意义了。迄今可以忽略这一点，是因为运算 $T'$ 和 $\langle\cdots\rangle'$ 不涉及 $\xi_0$ 和 $\xi_0^+$，它們又和 $\psi'$ 与 $\psi'^+$

对易. $\bar{G}_n$ 的每个矩陣元 $M_n$ 都和(23.13)式相象,在积分下含有一定数目的算符 $\xi_0$ 和 $\xi_0^+$, 乘以如(23.8)式的平均值. 設包含在 $M_n$ 中的是

$$\xi_0(t_1)\cdots\xi_0(t_m)\xi_0^+(t_1')\cdots\xi_0^+(t_m').$$

为了最終地求得 $G(x_1\cdots x_n;\ x_1'\cdots x_n')$, 必須計算如

$$\frac{\langle T^0(\xi_0(t),\ \cdots,\ \xi_0(t_m),\xi_0^+(t_1')\cdots\xi_0^+(t_m')\langle S\rangle')\rangle^0}{\langle S\rangle}$$

的平均值 $\langle\cdots\rangle^0$. 既然运算 $T^0$ 和 $\langle\cdots\rangle^0$ 又不涉及凝聚体外的粒子,则我們看出,所求的平均值乃是 $m$ 个凝聚体粒子的格林函数:

$$G_{0m}(t_1\cdots t_m;\ t_1'\cdots t_m') = \\ = \frac{\langle T(\xi_0(t_1)\cdots\xi_0(t_m)\xi_0^+(t_1')\cdots\xi_0^+(t_m')S)\rangle}{\langle S\rangle}. \quad (23.14)$$

因此,为了确定凝聚体外粒子格林函数的微扰論級数,必須知道凝聚体的准确 $m$ 粒子格林函数.

直接从(23.14)之类的公式出发,将这些量通过无相互作用的凝聚体粒子数密度計算出来,是很复杂的;这是由于对于算符 $\xi_0$ 和 $\xi_0^+$ 的乘积按維克定理展成正規乘积是沒有意义的,因为如象 $N(a_0^+\cdots a_0\cdots)$ 之类的正規乘积对基态的平均值不仅不等于零,而且还很大. 同时在(23.14)式中不能忽略算符 $\xi_0$ 和 $\xi_0^+$ 的非对易性. 事实上 $\langle S\rangle'$ 可以写成[1)]

$$\langle S\rangle' = \exp\sigma, \quad (23.15)$$

其中 $\sigma$ 是所有单通(不分成无关部分的)"真空"环之和,并为 $\xi_0$ 和 $\xi_0^+$ 的泛函. 这个和正比于体积(凝聚体粒子数密度 $n_0 = \xi_0^+\xi_0$ 是有限量). 形式地在(23.15)式中将 $\langle S\rangle'$ 展成 $\sigma$ 的冪級数时,要出现 $V$ 的任意次冪. 因此虽然在对易关系

$$\xi_0\xi_0^+ - \xi_0^+\xi_0 = \frac{1}{V}$$

1) 在場論中証明 $\langle S\rangle$ 表示成(23.15)的可能性时,須假設 $\xi_0$ 和 $\xi_0^+$ 是无算符性质的外参量. 然而我們看到,在(23.14)中 $\langle S\rangle'$ 处于对算符 $\xi_0$ 和 $\xi_0^+$ 的編时符号之下. 处于 $T$ 乘积符号之下的玻色算符可以互相置换. 因此上述場論的假設成立.



中右端的数量級为 $\frac{1}{V}$,省略它还是不合法的:小量 $\frac{1}{V}$ 可能被(23.15)式的展开式中 $V$ 的相应冪补偿.

因而宜換另一种方法. 注意表达式(23.14)可以直接通过海森堡算符写出:

$$G_{0m}(t_1\cdots t_m;\ t_1'\cdots t_m') = \\ = \langle T(\tilde{\xi}_0(t_1)\cdots\tilde{\xi}_0(t_m)\tilde{\xi}_0^+(t_1')\cdots\tilde{\xi}_0^+(t_m'))\rangle, \quad (23.16)$$

式中算符乘积是对相互作用粒子的基态取平均值. 先討論平均值 $V\langle\tilde{\xi}_0^+\tilde{\xi}_0\rangle$, 它乃是动量为零的准确粒子数. 在理想气体里这个数当 $T=0$ 时簡单地等于总粒子数 $N$——所有粒子处于 $\boldsymbol{p}=0$ 的能級上. 粒子間的相互作用(在足够小的距离上相斥——到处相吸会使系統不稳定)减少动量为零的粒子数. 然而在第一章里已着重指出过,这时凝聚体并不消失,系統的总粒子数任意大时,动量为零的平均粒子数也可能任意多(如果 $V\to\infty$, 则对于粒子間的任何相互作用,凝聚体粒子数密度 $n_0$ 都不等于零). 从物理看,这是显而易見的事实,然而邏輯上不能排除对于某种相互作用 $n_0$ 会等于零的可能性. 我們不在这里去証明这个論断,何况唯一的物理对象是氦. 讀者可在 Беляев 的論文[46]里找到这个証明.

凝聚体內总粒子数由于相互作用而改变,这正是前面不能把自由算符 $\xi_0$ 和 $\xi_0^+$ 看成普通数字的原因.

如此建立的凝聚体外格林函数的微扰論級数含有准确海森堡算符 $\tilde{\xi}_0$ 和 $\tilde{\xi}_0^+$ 的平均值. 如果凝聚体不消失,则算符 $\tilde{\xi}_0$ 和 $\tilde{\xi}_0^+$ 就其对相互作用粒子基态的作用而言,在第一級近似下仍是普通数字. 可以利用这一点来簡化凝聚体粒子格林函数的表达式.

当然不应忘記,算符 $\tilde{\xi}_0$ 消灭,而算符 $\tilde{\xi}_0^+$ 产生一个粒子. 因此严格說来,以后有重要意义的是,从 $N$ 粒子系統($N\to\infty$)基态跃迁到 $N\pm1$ 个粒子系統基态的算符 $\tilde{\xi}_0$, $\tilde{\xi}_0^+$ 的矩陣元;从物理观点看,在玻色凝聚体的无穷个粒子中增减一个,事实上不改变系統的基态,除了它的能量要改变化学势 $\mu$ 的值. 以后将算符 $\tilde{\xi}_0$ 和 $\tilde{\xi}_0^+$ 看成数字时,总应注意到这种情形.

試以单粒子格林函数

$$G_0(t-t') = -i\langle T(\tilde{\xi}_0(t)\tilde{\xi}_0^+(t'))\rangle \approx -i\langle\tilde{\xi}_0(t)\tilde{\xi}_0^+(t')\rangle$$

为例詳細討論之．将最后一式表示成中間态矩陣元乘积之和：

$$\langle\Phi_N^*|\tilde{\xi}_0(t)\tilde{\xi}_0^+(t')|\Phi_N\rangle = \langle\Phi_N^*|\tilde{\xi}_0(t)|\Phi_{N+1}\rangle\langle\Phi_{N+1}^*|\tilde{\xi}_0(t')|\Phi_N\rangle +$$

$$+\sum_s \langle\Phi_N^*|\tilde{\xi}_0(t)|\Phi'_{N+1}\rangle\langle\Phi'^*_{N+1}|\tilde{\xi}_0^+(t')|\Phi_N\rangle,$$

其中 $\Phi_N$ 和 $\Phi_{N+1}$ 是 $N$ 个和 $N+1$ 个相互作用粒子系統的基态，而 $\Phi'_{N+1}$ 是 $N+1$ 粒子系統与基态不同的状态．式中求和的各項很小，因为例如 $\tilde{\xi}_0^+\Phi_N \simeq \Phi_{N+1}$，而 $\Phi_{N+1}$ 和 $\Phi'_{N+1}$ 正交．至于从基态到基态的跃迁矩陣元，則其与时間的关系可从普通的量子力学公式

$$-i\frac{\partial}{\partial t}\langle\Phi_N^*|\tilde{\xi}_0(t)|\Phi_{N+1}\rangle = \langle\Phi_N^*|[\hat{H}, \tilde{\xi}_0(t)]|\Phi_{N+1}\rangle$$

得出，或为：

$$\tilde{\xi}_0(t) = \xi_0(0)e^{-it(E_{N+1}-E_N)}.$$

利用化学势的定义 $\mu = \frac{\partial E}{\partial N}$，并作代换 $\xi_0(0)\to n_0^{1/2}$，得：

$$iG_0(t-t') = n_0e^{-i\mu(t-t')}. \quad (23.17)$$

换言之，函数 $G_0(t-t')$ 分解成两个独立因子之积，因子 $\sqrt{n_0}e^{-i\mu t}$ 对应 $\tilde{\xi}_0(t)$，而 $\sqrt{n_0}e^{i\mu t'}$ 对应 $\tilde{\xi}_0^+(t')$．显然，对于凝聚粒子的任何格林函数情形也是类似的：将算符 $\tilde{\xi}_0(t)$，$\tilde{\xi}_0^+(t)$ 换成数字时，每一算符須与上述因子对应．这样計算凝聚体外粒子格林函数的图解法就还原为普通图解法，其中算符 $\tilde{\xi}_0$ 和 $\tilde{\xi}_0^+$ 起着外場的作用：

$$\tilde{\xi}_0(t) = \sqrt{n_0}e^{-i\mu t},$$

$$\tilde{\xi}_0^+(t) = \sqrt{n_0}e^{i\mu t}. \quad (23.18)$$

和平常一样，在写微扰論級数时只須考慮相連图形．我們証明了，考虑不相連图形归結为，将理想气体凝聚体內粒子数密度，换成有相互作用的气体凝聚体准确粒子数密度，并且出現頻率因子(23.18)．在其它方面所有图形有如在相互作用哈密頓量 $H_{int}$ 中代入算符(23.1)之后，假定相互作用表象中的算符 $\xi_0$ 和 $\xi_0^+$ 是外参数，而在計算(23.10)式时只(在相連图中)对凝聚体外粒子作平均 $\langle\cdots\rangle'$ 和編时 $T'$．为求得最終表达式，須按(23.18)将 $\xi_0$ 和 $\xi_0^+$ 代



换．再指出一次，相互作用粒子气体凝聚体中粒子数密度 $n_0$ 和理想气体的相应数值不同．

借助以上发展的費曼图方法計算凝聚体外粒子的格林函数，所得的表达式中有两个参数，$n_0$ 和化学势 $\mu$．除了用微扰論直接計算这些量和系統总粒子数密度的关系，还可以求助于一般性关系．首先，系統总粒子数与 $n_0$，$\mu$ 之間有显而易見的关系：

$$n = n_0 + iG'(x-x'), \quad \mathbf{r}=\mathbf{r}'; \quad t'=t+0. \quad (23.19)$$

第二个关系式得自基态能量相对于 $n_0$ 有最小值的条件．借助上述方法計算基态能量 $E=\langle\hat{H}\rangle$，得出和参数 $n_0$ 与 $\mu$ 有关的表达式．在总粒子数不变（$n$ 是常数）条件下对 $n_0$ 变分 $E$ 式，得第二个关系：

$$\left(\frac{\partial E}{\partial n_0}\right)_n = 0 \quad (23.20)$$

(23.19)式和(23.20)式两个条件原則上解决了問題．实际計算中利用(24.17)式常比(23.20)方便．

在結束本节之前，簡单地討論一下热力学变量的选择問題．至今我們采用系統中总粒子数作独立变量．这是由于在建立微扰論时我們从理想玻色气体的特征出发，在理想玻色气体里，在化学势不为零时沒有玻色凝聚；大家知道，在从零度到凝聚点 $T_0$ 的整个温度范围內，理想玻色气体的化学势恆等于零．对于相互作用粒子系統化学势不等于零，因而 $\mu$ 和总粒子数一样是热力学变量．和平常一样，要求系統中的平均粒子数等于給定的实际粒子数，就可确定 $\mu$ 的值．实質上(23.19)正是表示这个条件．变换到化学势作为独立参量的表象，有一个形式上的方便之处，就是可以摆脫(23.18)式中的附加时間关系，后者由于含 $\tilde{\xi}_0(t)$ 和 $\tilde{\xi}_0^+(t)$ 的頂点而出現在矩陣元中．

实际上我們已不只一次地看到，将系統的总哈密頓量 $H$ 换成 $H-\mu N$，就实現了从变量 $N$ 到变量 $\mu$ 的变换．既然算符 $\psi$ 和 $\psi^+$ 与总粒子数 $N$ 的对易关系是

$$N\psi - \psi N = -\psi; \quad N\psi^+ - \psi^+ N = \psi^+,$$

哈密頓量的变化就导致算符 $\psi$ 和 $\psi^+$ 的附加时間关系：

$$\psi \to e^{i\mu t}\psi;\quad \psi^+ \to e^{-i\mu t}\psi^+. \tag{23.21}$$

格林函数也同时变化，例如总单粒子格林函数

$$G(x-x') \to e^{i\mu(t-t')}G(x-x'). \tag{23.22}$$

对于傅立叶分量这种变换表示将原来表达式中所有的頻率 $\omega$ 代以 $\omega+\mu$. 因此凝聚体粒子格林函数經过变換(23.21)而由新热力学变量表示后，就不再与时間有关. 因此在图形的相应頂点可以省去(23.18)式的时間因子. 讀者可以根据 (23.22) 式重新定义格林函数，直接研究其微扰論級数因变換(23.21)和(23.22)而引起的变化，得出上面所說的結果. 以后各处都取 $\mu$ 作独立热力学变量.

## § 24. 格 林 函 数

**1. 方程式的結构.** 比較詳細地討論凝聚体外粒子的单粒子格林函数微扰論級数的結构. 任何級图可以分成几个不可約部分，它們之間以一条代表函数 $G^{(0)}(x-x')$ 的綫相連. 因此格林函数的任何图形都是由零級格林函数联系起来的自能图形鏈. 图 65 上举了几个例子，圓圈表示不可約自能部分，其結构我們不具体化.

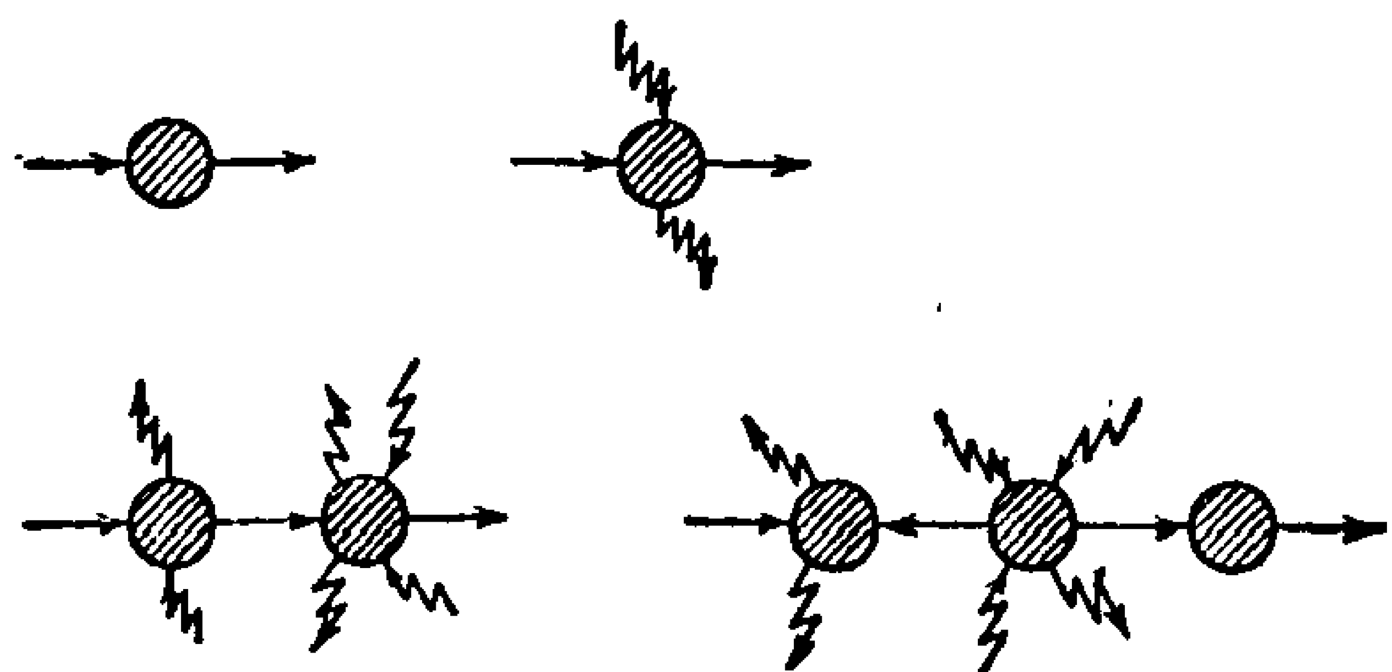


图 65

凝聚体的存在使自能图形中出現了新的一类，这在前面几章中沒有見过. 这些图形来自凝聚体外粒子和凝聚体粒子的相互作用，而在某些頂点含有算符 $\tilde{\xi}_0$ 和 $\tilde{\xi}_0^+$；根据上节結果，它們起着某种外場的作用：$\tilde{\xi}_0, \tilde{\xi}_0^+ \sim \sqrt{n_0}$. 从图 65 容易看出，每个不可約自能图中出来和进去的总綫数相等（总綫数中包括代表凝聚体粒子产生和消灭算符的折綫）. 旣然所有自能部分以直綫相連，即包括两个进去或出来的凝聚体外粒子，則可以将所有的不可約自能图分类如下：

1. 具有代表凝聚体外粒子的出入綫各一条的图形. 在这些图形中进去和出来的折綫数目（算符 $\tilde{\xi}_0$ 和 $\tilde{\xi}_0^+$ 的冪）应相等. 我們将坐标表象中所有这类图形的矩陣元之和記作 $\Sigma_{11}(x-x')$，并以图 66(a) 的实心圓圈表示.

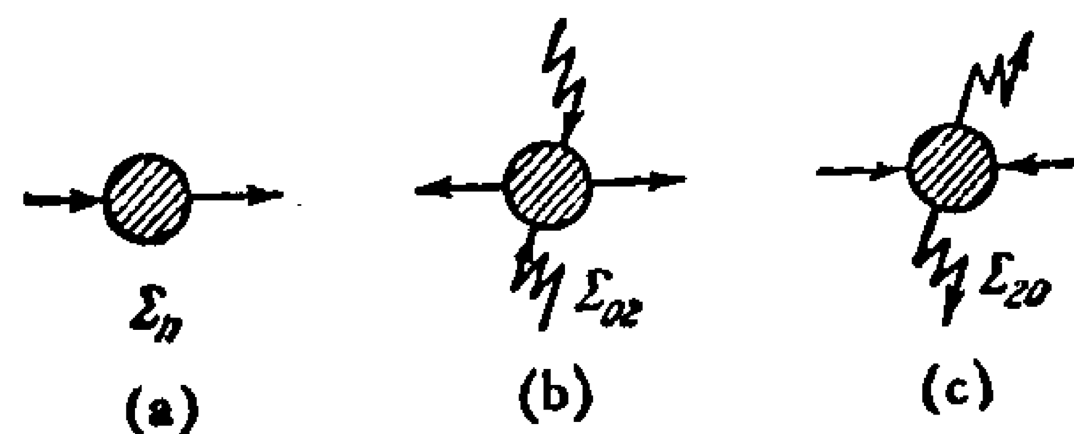



图 66

2. 具有两条出来的凝聚体外粒子綫的图形. 这种图形中进去的折綫比出来的多两条. 相应的矩陣元之和我們記为 $\Sigma_{02}(x-x')$，并以具有两条进去的折綫的实心圓代表，如图 66(b).

3. 具有两条进去的凝聚体外粒子綫的图形. 这些图形和上面相反，出来的折綫比进去的多两条. 其矩陣元之和記作 $\Sigma_{20}(x-x')$；图 66(c) 以具有两条出来的折綫的圓表示这些自能图之和.

在格林函数 $G'(x-x')$ 的图中，所有这三类不可約自能部分可以任何順序組合. 唯一的明显条件是，图中遇見 $\Sigma_{20}$ 型矩陣元和 $\Sigma_{02}$ 型矩陣元的次数应相等. 图 67 中举了几个凝聚体外粒子格林函数图的例子.

現在我們可以为凝聚体外粒子格林函数写出类似戴逊方程的方程式. 先用图形推导. 我們在图形上沿鏈条从左向右移动，并

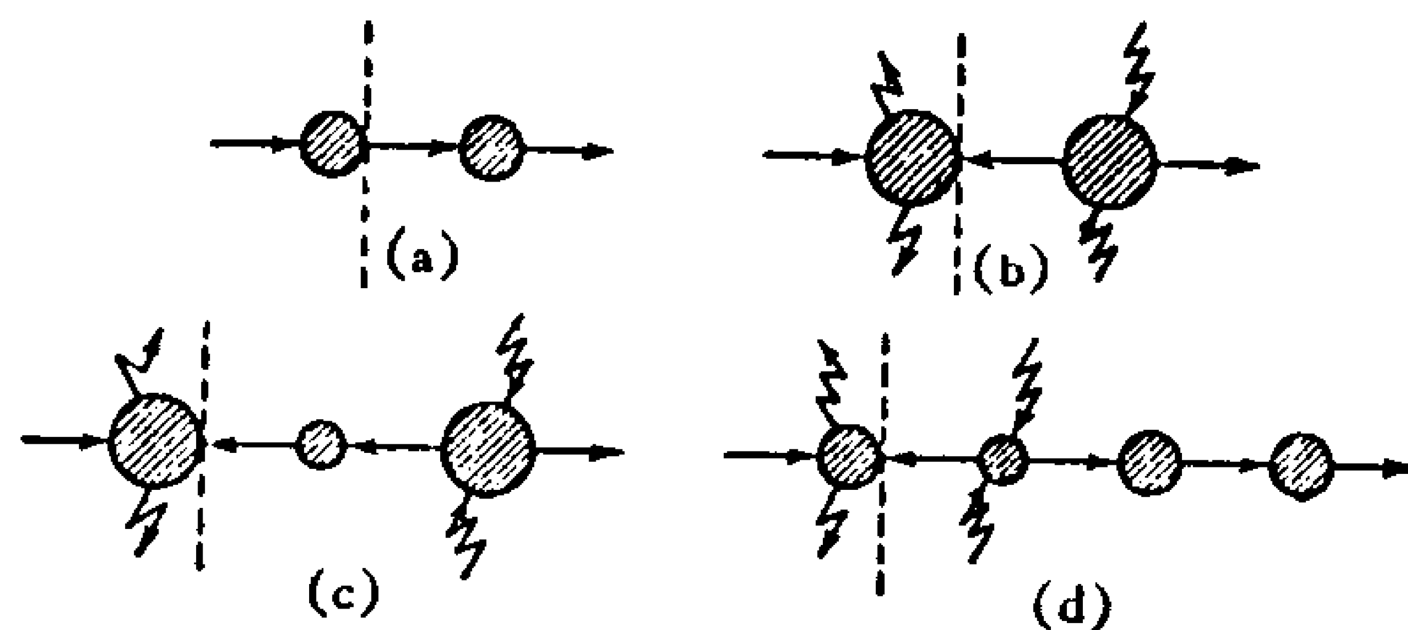



图 67

分出首次遇見的不可約自能部分. 与前几章中討論的情形不同，这时可能遇見两种类型不可約自能部分: $\Sigma_{11}$ 和 $\Sigma_{20}$. 图 67 上以垂直虛綫将某个任意图形分成两部分. 图 67(a) 虛綫右面是綫条和自能部分构成的鏈，其总和又是完全格林函数 $G'(x-x')$. 图 67 (b), (c), (d) 虛綫和自能部分 $\Sigma_{20}$ 之右的結构，求和之后是某个新的函数，我們記作 $\hat{G}(x-x')$. 从图形观点看，它的特点是有两条出来的凝聚体外粒子綫. 为了方便起見我們在图中連接 $x$ 点和 $x'$ 点的綫上加两个箭头，标明它对每个点的进出关系. 根据定义，不相互作用粒子格林函数 $G^{(0)}(x-x')$ 是相互作用表象中算符 $\psi'(x)\psi'^{+}(x')$ $T$ 乘积的平均值. 在 $x$ 点我們置出来的箭头(算符 $\psi'(x)$)，而在 $x'$ 点置进去箭头(算符 $\psi'^{+}(x')$). 格林函数 $G'(x-x')$ 显然是和零級(无相互作用)格林函数一样具有两个箭头的粗綫(图 68(a)). 至于函数 $\hat{G}(x-x')$，则从图 67 (b), (c), (d) 看出，它的图形是具有两个出来箭头的粗綫(图 68(b)). 将格林函数 $G'(x-x')$ 和 $\hat{G}(x-x')$ 联系起来的方程式示于图 69 中. 这些方程式的結构不叙自明; 我們在这里再次指出，函数

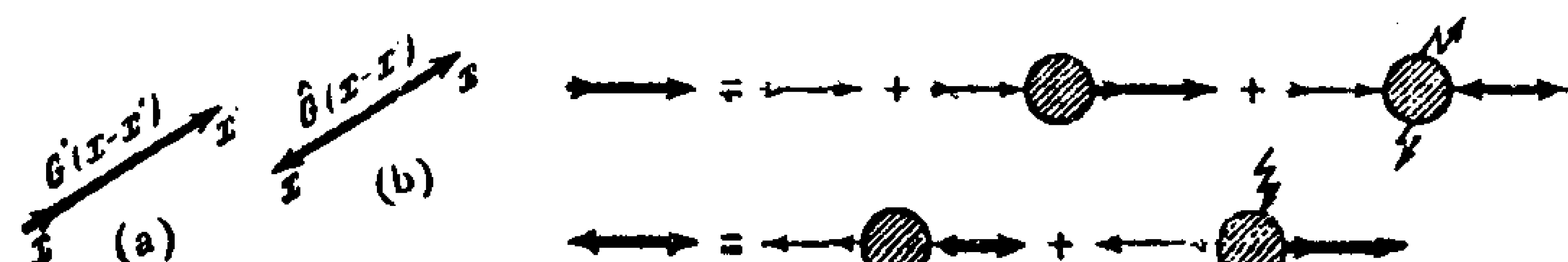


图 68　　　　图 69

$\hat{G}(x-x')$ 之出現于理論中，是凝聚体外粒子和凝聚体粒子相互作用的結果，因此不相互作用粒子不具备相似的函数. 至于自能部分 $\Sigma_{11}$, $\Sigma_{20}$ 和 $\Sigma_{02}$，则和平常一样，它們不能通过函数 $G$ 和 $\hat{G}$ 写成封閉形式. 費曼图方法給出它們的級数展开，其每一项对应一定的图形. 图 70 中对相互作用哈密頓量(23.12)列举了 $\Sigma_{11}$ 和 $\Sigma_{20}$ 的几个低級图形.

我們写出图 69 所示的方程式[1]:

1) 方程式中系数的选择和自能部分 $\Sigma_{ik}$ 的定义一致(見 § 25).



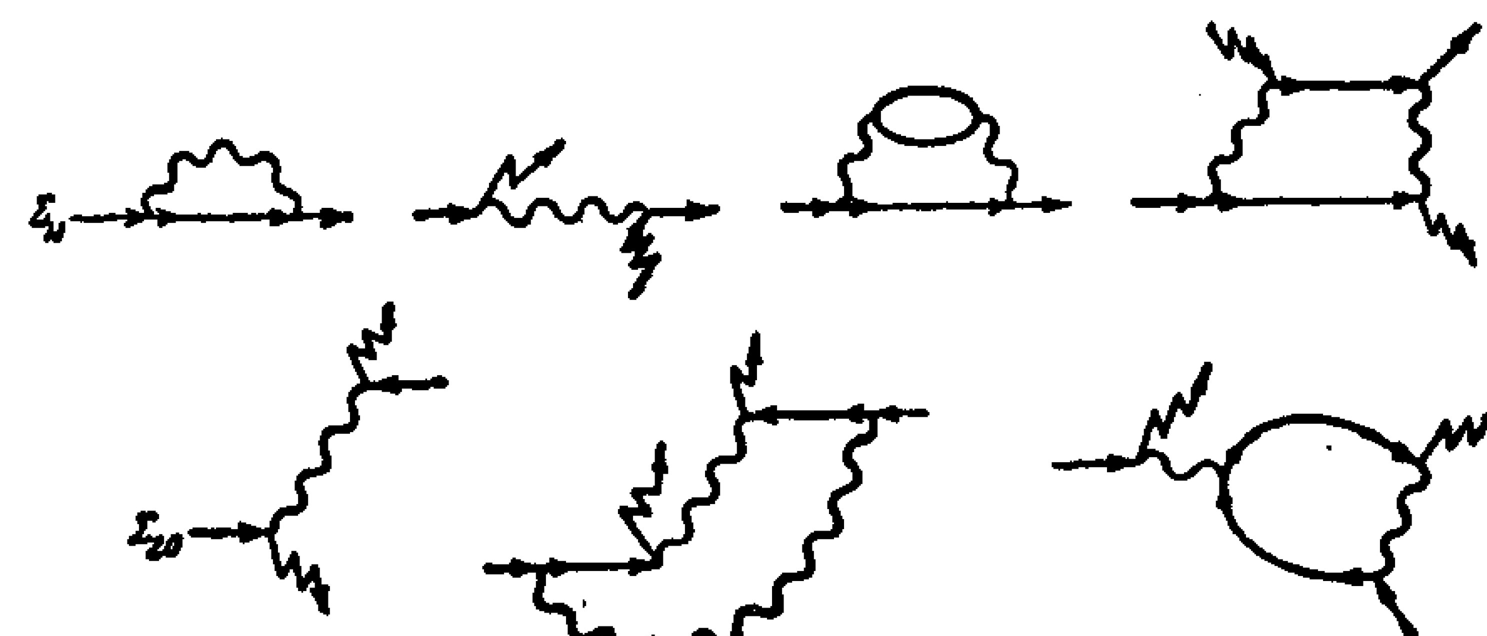


图 70

$$G'(x-x') = G^{(0)}(x-x') + \\ + \iint G^{(0)}(x-y)[\Sigma_{11}(y-z)G'(z-x') + \\ + \Sigma_{20}(y-z)\hat{G}(z-x')]d^4z d^4y, \tag{24.1}$$

$$\hat{G}(x-x') = \iint G^{(0)}(y-x)[\Sigma_{11}(z-y)\hat{G}(z-x') + \\ + \Sigma_{02}(y-z)G'(z-x')]d^4z d^4y.$$

在这些方程式中对所有的量完成傅立叶变换，得:

$$G'(p) = G^{(0)}(p) + G^{(0)}(p)\Sigma_{11}(p)G'(p) + \\ + G^{(0)}(p)\Sigma_{20}(p)\hat{G}(p), \tag{24.2}$$

$$\hat{G}(p) = G^{(0)}(-p)\Sigma_{11}(-p)\hat{G}(p) + G^{(0)}(-p)\Sigma_{02}(p)G'(p).$$

利用无相互作用粒子格林函数 $G^{(0)}(p)$ 的 (23.9) 式，可将方程式 (24.2)写成更方便的形式:

$$(\omega - \varepsilon_0(\mathbf{p}) + \mu - \Sigma_{11}(p))G'(p) - \Sigma_{20}(p)\hat{G}(p) = 1,$$
$$(-\omega - \varepsilon_0(\mathbf{p}) + \mu - \Sigma_{11}(-p))\hat{G}(p) - \Sigma_{02}(p)G'(p) = 0 \tag{24.3}$$

$\left(这里\ \varepsilon_0(\mathbf{p}) = \dfrac{\mathbf{p}^2}{2m}\right)$. 引入符号

$$S(p) = \frac{\Sigma_{11}(p) + \Sigma_{11}(-p)}{2},\ A(p) = \frac{\Sigma_{11}(p) - \Sigma_{11}(-p)}{2}$$

并从方程(24.3)中将 $G'(p)$ 和 $\hat{G}(p)$ 通过 $\Sigma_{11}$, $\Sigma_{02}$, $\Sigma_{20}$ 表示，就得到:

$$G'(p) = \frac{\omega + \varepsilon_0(\mathbf{p}) + S(p) + A(p) - \mu}{(\omega - A(p))^2 - (\varepsilon_0(\mathbf{p}) + S(p) - \mu)^2 + \Sigma_{20}(p)\Sigma_{02}(p)}, \tag{24.4}$$

$$\hat{G}(p) = -\frac{\Sigma_{02}(p)}{(\omega - A(p))^2 - (\varepsilon_0(\mathbf{p}) + S(p) - \mu)^2 + \Sigma_{20}(p)\Sigma_{02}(p)}, \tag{24.5}$$

这些公式推广了将单粒子格林函数通过它的自能部分表达的普通关系式.

**2. 格林函数的解析性质.** 迄今函数 $\hat{G}(p)$ 是一定图形求和的結果. 現在給出它通过算符 $\psi'^+$ 的定义. 为此我們取如下的量

$$-i\langle T(\tilde{\xi}_0\tilde{\xi}_0\tilde{\psi}'^+(x)\tilde{\psi}'^+(x'))\rangle$$

并証明它的微扰論級数和函数 $\hat{G}(x-x')$ 的展开一致. 我們将和在上节末尾一样地假定, 所有算符的定义都包含因子 $e^{i\mu t}$ 或 $e^{-i\mu t}$ ((23.21)式),并变换到相互作用表象:

$$\frac{-i\langle T(\xi_0\xi_0\psi'^+(x)\psi'^+(x'))S\rangle}{\langle S\rangle}.$$

将运算 $T$ 和 $\langle\cdots\rangle$ 分解成 $T = T^0T'$ 和 $\langle\langle\cdots\rangle'\rangle^0$. 把 $\xi_0$ 和 $\xi_0^+$ 視为外参数, 对凝聚体外的粒子求均, 就看出所有的图形和函数 $\hat{G}(x-x')$ 的图重合, 而矩陣元含有两个多出来的算符 $\xi_0$. 前面已經說过,对凝聚体粒子的求均,就是把相互作用表象中的算符 $\xi_0$ 和 $\xi_0^+$ 換成海森堡算符 $\tilde{\xi}_0$ 和 $\tilde{\xi}_0^+$, 再把后者換成数字: $\tilde{\xi}_0 \to \sqrt{n_0}$ 和 $\tilde{\xi}_0^+ \to \sqrt{n_0}$. 因此对于函数 $\hat{G}(x-x')$ 可采用两个等价的定义:

$$\hat{G}(x-x') = \frac{-i}{n_0}\langle T(\tilde{\xi}_0\tilde{\xi}_0\tilde{\psi}'^+(x)\tilde{\psi}'^+(x'))\rangle \tag{24.6}$$

或者

$$\hat{G}(x-x') = -i\langle N+2|T(\tilde{\psi}'^+(x)\tilde{\psi}'^+(x'))|N\rangle, \tag{24.7}$$

其中后一公式中 $\hat{G}(x-x')$ 表示成 $T(\psi'^+(x)\psi'^+(x'))$ 在具有 $N+2$ 个和 $N$ 个粒子的系統基态間的矩陣元.

我們研究格林函数 $G'(x-x')$ 和 $\hat{G}(x-x')$ 的性質. 和在第二章中所作的那样,利用函数 $G'(x-x')$ 的定义 (23.4) 将其表示为中間态矩陣元之和:

当 $t > t'$

$$G'(x-x') = -i\sum_m \langle N|\tilde{\psi}'(x)|m\rangle\langle m|\tilde{\psi}'^+(x')|N\rangle,$$



当 $t < t'$

$$G'(x-x') = -i\sum_n \langle N|\tilde{\psi}'^+(x')|n\rangle\langle n|\tilde{\psi}'(x)|N\rangle.$$

用通常的方法从矩陣元中分出坐标和时間关系,就得到:

$$G'(x-x') = \begin{cases} -i\sum_m |\psi_{Nm}|^2\exp\{i\mathbf{p}_m(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - i\omega_{mN}(t-t') + i\mu(t-t')\}, \\ \qquad t > t', \\ -i\sum_n |\psi_{Nn}|^2\exp\{i\mathbf{p}_n(\mathbf{r}'-\mathbf{r}) - i\omega_{nN}(t'-t) - i\mu(t-t')\}, \\ \qquad t < t'; \end{cases} \tag{24.8}$$

这里 $\mathbf{p}_m$ 和 $\mathbf{p}_n$ 是系統在中間态的动量, $\omega_{mN} = E_m - E_{N0}$, $\omega_{nN} = E_n - E_{N0}$, 其中 $E_n$ 和 $E_m$ 是系統在状态 $n$ 和 $m$ 的能量, $E_{N0}$——粒子数为 $N$ 的系統基态能量. 根据算符 $\psi'$ 和 $\psi'^+$ 的性质, 在状态 $m$ 中系統有 $N+1$ 个粒子, 而在状态 $n$ 中粒子数等于 $N-1$. (24.8) 中的因子 $e^{\pm i\mu t}$ 正由此而来. 利用定义 $\mu \simeq E_{N+1\,0} - E_{N0}$, 将(24.8)式表示成以下形式:

$$G'(x-x') = \begin{cases} -i\sum_m |\psi_{Nm}|^2\exp\{i\mathbf{p}_m(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - i(E_m - E_{N+1\,0})(t-t')\} \\ \qquad (t > t'), \\ -i\sum_n |\psi_{Nn}|^2\exp\{-i\mathbf{p}_n(\mathbf{r}-\mathbf{r}') + i(E_n - E_{N-1\,0})(t-t')\} \\ \qquad (t < t'). \end{cases} \tag{24.9}$$

能量差 $E_m - E_{N+1\,0}$ 和 $E_n - E_{N-1\,0}$ 乃是具有 $N+1$ 个和 $N-1$ 个粒子系統的能譜或激发能量. 粒子数很大时这些系統的能譜一直重合到数量級为 $1/N$ 的項. 对坐标和时間差取(24.9)式的傅立叶分量,得出动量表象中的格林函数:

$$G'(p) = (2\pi)^3\left[\sum_m \frac{\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}_m)|\psi_{Nm}|^2}{\omega - (E_m - E_{N+1\,0}) + i\delta} - \right.$$
$$\left. - \sum_n \frac{\delta(\mathbf{p}+\mathbf{p}_n)|\psi_{Nn}|^2}{\omega + (E_n - E_{N-1\,0}) - i\delta}\right]. \tag{24.10}$$

$\omega = \pm(E_m - E_0)$ 对应函数 $G'(p)$ 的极点, 它总是决定系統的能

譜(准确到符号);它們对 $\omega$ 实軸的相对位置，可从(24.10)式中繞极点的規則看出。

现在对函数 $\hat{G}(x-x')$ 作类似的按中間态展开，利用(24.7)式得：

$$\hat{G}(x-x') = \begin{cases} -i\sum_m \langle N+2|\tilde{\psi}'^{+}(x)|m\rangle\langle m|\tilde{\psi}'^{+}(x')|N\rangle & (t>t'), \\ -i\sum_m \langle N+2|\tilde{\psi}'^{+}(x')|m\rangle\langle m|\tilde{\psi}'^{+}(x)|N\rangle & (t<t') \end{cases}$$

或者

$$\hat{G}(x-x') = \begin{cases} -i\sum_m \psi^{+}_{N+2\ m}\psi^{+}_{mN}e^{i\boldsymbol{p}_m(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')-i(E_m-E_{N+2\ 0}+\mu)t+i(E_m-E_{N0}-\mu)t'} \\ \qquad (t>t'), \\ -i\sum_m \psi^{+}_{N+2\ m}\psi^{+}_{mN}e^{i\boldsymbol{p}_m(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})-i(E_m-E_{N+2\ 0}+\mu)t'+i(E_m-E_{N0}-\mu)t} \\ \qquad (t<t'). \end{cases} \tag{24.11}$$

以足标 $m$ 表示的状态对应粒子数为 $N+1$ 的系統，在(24.11)式中引入其基态能量 $E_{N+1\ 0}$，并再次利用化学势的定义将(24.11)式变换成：

$$\hat{G}(x-x') = \begin{cases} -i\sum_m \psi^{+}_{N+2\ m}\psi^{+}_{mN}e^{i\boldsymbol{p}_m(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')-i(E_m-E_{N+1\ 0})(t-t')} & (t>t'), \\ -i\sum_m \psi^{+}_{N+2\ m}\psi^{+}_{mN}e^{i\boldsymbol{p}_m(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})-i(E_m-E_{N+1\ 0})(t'-t)} & (t<t'). \end{cases}$$

函数 $\hat{G}(x-x')$ 的傅立叶分量等于：

$$\hat{G}(p) = (2\pi)^3\sum_m \psi^{+}_{N+2\ m}\psi^{+}_{mN}\left[\frac{\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_m)}{\omega-(E_m-E_{N+1\ 0})+i\delta} - \frac{\delta(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}_m)}{\omega+(E_m-E_{N+1\ 0})-i\delta}\right]. \tag{24.12}$$

比較公式(24.10)和(24.12)，可以看出函数 $G'(x-x')$ 和 $\hat{G}(x-x')$ 的极点重合。特別是，回到 $G'(p)$ 和 $\hat{G}(p)$ 通过不可約自能部分的表达式(24.4)和(24.5)，我們看到系統的譜 $\omega=\varepsilon(\boldsymbol{p})$ 决定于方程式，

$$(\varepsilon(\boldsymbol{p})-A(p))^2-(\varepsilon_0(\boldsymbol{p})+S(p)-\mu)^2+\Sigma_{20}(p)\Sigma_{02}(p)=0$$
$$(p\equiv\{\varepsilon(\boldsymbol{p}),\boldsymbol{p}\}).$$

与函数 $\hat{G}(x-x')$(24.6)，(24.7)平行，还应該引入函数

$$\check{G}(x-x') = -\frac{i}{n_0}\langle T(\tilde{\psi}'(x)\tilde{\psi}'(x')\xi_0^{+}\xi_0^{+})\rangle \equiv$$
$$\equiv\langle N|T(\tilde{\psi}'(x)\tilde{\psi}'(x'))|N+2\rangle. \tag{24.13}$$

在 $\check{G}(x-x')$ 的表达式中作对中間态的展开，就象对函数 $\hat{G}(x-x')$ 所作的那样，得到和(24.12)式相似的傅立叶分量 $\check{G}(p)$：

$$\check{G}(p) = (2\pi)^3\sum_m \psi_{Nm}\psi_{m\ N+2}\left[\frac{\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_m)}{\omega-(E_m-E_{N+1\ 0})+i\delta} - \frac{\delta(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}_m)}{\omega+(E_m-E_{N+1\ 0})-i\delta}\right]. \tag{24.14}$$

可見函数 $\check{G}(p)$ 的极点(以及这些极点的繞法)和函数 $\hat{G}(p)$，$G'(p)$ 一致。至于系数，即极点的留数，則对 $G'(p)$ 它們是实数，而对 $\hat{G}(p)$，$\check{G}(p)$，在同一极点它們是复数共軛的。

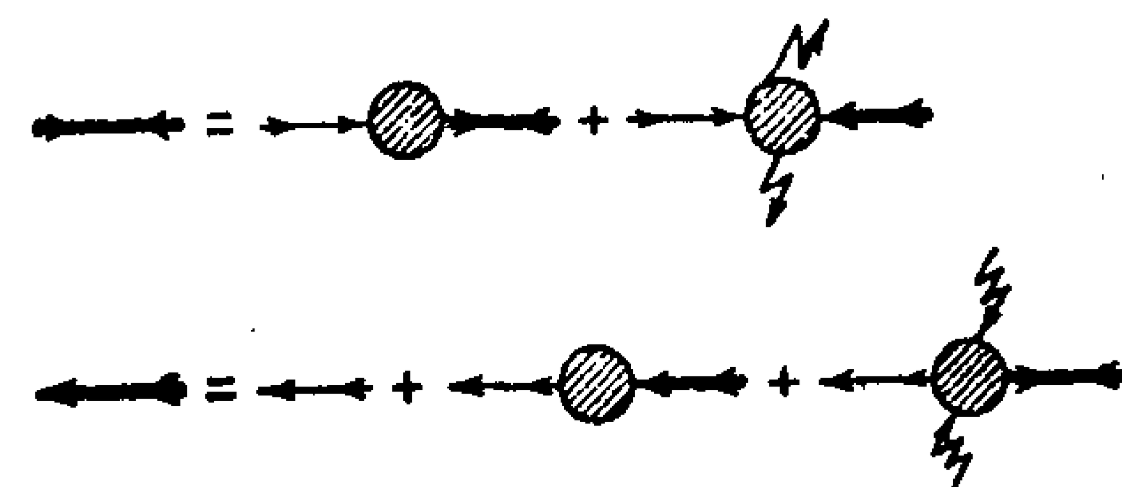


图 71

函数 $\check{G}(x-x')$ 的图形表示是带有两个方向相对的箭头的直綫。联系 $\check{G}(x-x')$ 和普通格林函数的方程式的图解見图71。在这些方程式中，格林函数 $G'(x'-x)$ 的綫上，箭头画法和前面相反。图71方程的傅立叶分量写出就是：

$$\check{G}(p) = G^{(0)}(p)\Sigma_{11}(p)\check{G}(p) + G^{(0)}(p)\Sigma_{20}(p)G'(-p),$$
$$G'(-p) = G^{(0)}(-p) + G_0(-p)[\Sigma_{11}(-p)G'(-p) + \Sigma_{02}(p)\check{G}(p)].$$

对 $\check{G}(p)$ 解这些方程，得：

$$\check{G}(p) = -\frac{\Sigma_{20}(p)}{(\omega-A(p))^2-(\varepsilon_0(\boldsymbol{p})+S(p)-\mu)^2+\Sigma_{20}(p)\Sigma_{02}(p)}. \tag{24.15}$$

$\hat{G}(p)$ 和 $\check{G}(p)$ 的(24.5)式和(24.15)式的差别，在于分子中 $\Sigma_{20}(p)$ 换成了 $\Sigma_{02}(p)$.

**3. 动量很小时格林函数的性質.** 在結束本节之前对以上所得的結果，作几条一般性的評述．因为空間均匀性，所有的量只与矢量 $\boldsymbol{p}$ 的絕对值有关．从(24.12)式和(24.14)式看出，$\hat{G}(p)$ 和 $\check{G}(p)$ 是頻率 $\omega$ 的偶函数．由此容易得出 $\Sigma_{20}(p)=\Sigma_{02}(p)$．实际上，既然相互作用哈密頓量保証总粒子数守恆，則它对算符 $\psi$ 和 $\psi^+$ 是对称的．因此每个 $\Sigma_{20}$ 的图形，都对应完全相同的 $\Sigma_{02}$ 的图形，只是所有的出綫与入綫互相对換了，因此所有內綫的方向也反过来了．然而在給定的 $\Sigma_{20}(p)$ 图形的矩陣元中将 $\boldsymbol{p}$ 換成 $-\boldsymbol{p}$，也改变所有內綫的方向．既然从(24.15)式知 $\Sigma_{20}(p)$ 是偶函数，則

$$\Sigma_{20}(p)=\Sigma_{02}(p),\quad 而\quad \hat{G}(p)=\check{G}(p).$$

討論决定格林函数极点的方程

$$(\omega-A(p))^2-(\varepsilon_0(\boldsymbol{p})+S(p)-\mu)^2+\Sigma_{02}^2(p)=0.\quad(24.16)$$

从物理考虑很清楚，这个方程应对任意小的 $\omega$ 和 $\boldsymbol{p}$ 有解．事实上，在激发能譜的一切可能解中，当 $\boldsymbol{p}$ 很小时应存在着声譜 $\omega=c|\boldsymbol{p}|$，即长波密度振动譜．因此，在方程(24.16)式中令 $\omega$ 和 $\boldsymbol{p}$ 等于零．結果我們得到联系化学势 $\mu$ 以及 $\Sigma_{11}(0)$，$\Sigma_{20}(0)$ 和 $\Sigma_{02}(0)$ 的条件：

$$(\mu-\Sigma_{11}(0))^2=\Sigma_{02}^2(0).$$

从下一节的結果将看出，从这个方程的两个解中，应取

$$\mu=\Sigma_{11}(0)-\Sigma_{02}(0).\quad(24.17)$$

为求得 $\omega$ 和 $\boldsymbol{p}$ 很小时格林函数的形状，在(24.4)，(24.5)和(24.15)式中将分母展开到 $\omega$ 和 $\boldsymbol{p}$ 的二次項．注意(24.17)式，得：

$$G'(p)=\frac{\Sigma_{11}(0)-\mu}{B(\omega^2-c^2|\boldsymbol{p}|^2)}=\frac{\Sigma_{20}(0)}{B(\omega^2-c^2|\boldsymbol{p}|^2)},$$

$$\hat{G}(p)=\check{G}(p)=-\frac{\Sigma_{20}(0)}{B(\omega^2-c^2|\boldsymbol{p}|^2)},\quad(24.18)$$

其中

$$B=\left(1-\frac{\partial\Sigma_{11}(0)}{\partial\omega}\right)^2-\frac{\partial^2\Sigma_{11}(0)}{\partial\omega^2}\Sigma_{20}(0)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}\Sigma_{20}^2(0),$$



$$Bc^2=2\Sigma_{20}(0)\left\{\frac{1}{2m}+\frac{\partial\Sigma_{11}(0)}{\partial|\boldsymbol{p}|^2}-\frac{\partial\Sigma_{20}}{\partial|\boldsymbol{p}|^2}\right\}.$$

数量 $c$ 显然是声速．如果 $\Sigma_{20}(0)$ 等于零，声速也趋向零；事实也正应如此，因为理想玻色气体的声速为零．

将(24.18)式的結果和格林函数的一般展开式(24.10)，(24.12)和(24.14)比較，看出比值 $\frac{\Sigma_{20}(0)}{B}$ 是正实数．因此对于很小的 $\omega$ 和 $\boldsymbol{p}(\omega\sim cp)$，三个格林函数 $G'(p)$，$\hat{G}(p)$，$\check{G}(p)$ 的形状都是：

$$G(p)=\frac{常数}{\omega^2-c^2p^2}.\quad(24.19)$$

## §25. 稀薄非理想玻色气体

**1. 图解法.** 为了演示以上所述的方法，现在更詳細地研究一个特例，即粒子間的相互作用归結为成对粒子間力的情况(Беляев[47])．相互作用哈密頓量等于

$$H_{int}=\frac{1}{2}\iint\psi^+(\boldsymbol{r})\psi^+(\boldsymbol{r}')U(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{r}'.\quad(25.1)$$

根据(23.1)式在 $H_{int}$ 中把凝聚体粒子算符 $\xi_0$ 和 $\xi_0^+$ 明显地分出来．結果哈密頓量 $H_{int}$ 表示成八項之和：

$$H_a=\frac{1}{2}\iint\psi'^+(\boldsymbol{r})\psi'^+(\boldsymbol{r}')U(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\psi'(\boldsymbol{r}')\psi'(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{r}',$$

$$H_b=\frac{1}{2}V(\xi_0^+)^2\xi_0^2\int U(\boldsymbol{R})d\boldsymbol{R},$$

$$H_c=\frac{1}{2}\iint[\xi_0^+\psi'^+(\boldsymbol{r}')+\psi'^+(\boldsymbol{r})\xi_0^+]\psi'(\boldsymbol{r})\psi'(\boldsymbol{r}')\times$$
$$\times U(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{r}',$$

$$H_d=\frac{1}{2}\iint\psi'^+(\boldsymbol{r})\psi'^+(\boldsymbol{r}')[\psi'(\boldsymbol{r}')\xi_0+\xi_0\psi'(\boldsymbol{r})]\times$$
$$\times U(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{r}',$$

$$H_e=\frac{1}{2}\iint[\xi_0^+\psi'^+(\boldsymbol{r}')\xi_0\psi'(\boldsymbol{r})+\xi_0^+\psi'^+(\boldsymbol{r})\xi_0\psi'(\boldsymbol{r}')]\times$$
$$\times U(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{r}',$$

$$H_f = \frac{1}{2}\iint [\xi_0^+\psi'^+(\boldsymbol{r})\xi_0\psi'(\boldsymbol{r}) + \xi_0^+\psi'^+(\boldsymbol{r}')\xi_0\psi'(\boldsymbol{r}')] \times$$
$$\times U(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{r}',$$
$$H_g = \frac{1}{2}\iint \xi_0^+\xi_0^+\psi'(\boldsymbol{r})\psi'(\boldsymbol{r}')U(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{r}',$$
$$H_h = \frac{1}{2}\iint \xi_0\xi_0\psi'^+(\boldsymbol{r})\psi'^+(\boldsymbol{r}')U(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{r}'. \qquad (25.2)$$

对应每一项的元过程示于图 72 中． 以通常方式应用维克定理于凝聚体外粒子算符,可得出任何矩阵元．根据前两节的結果,

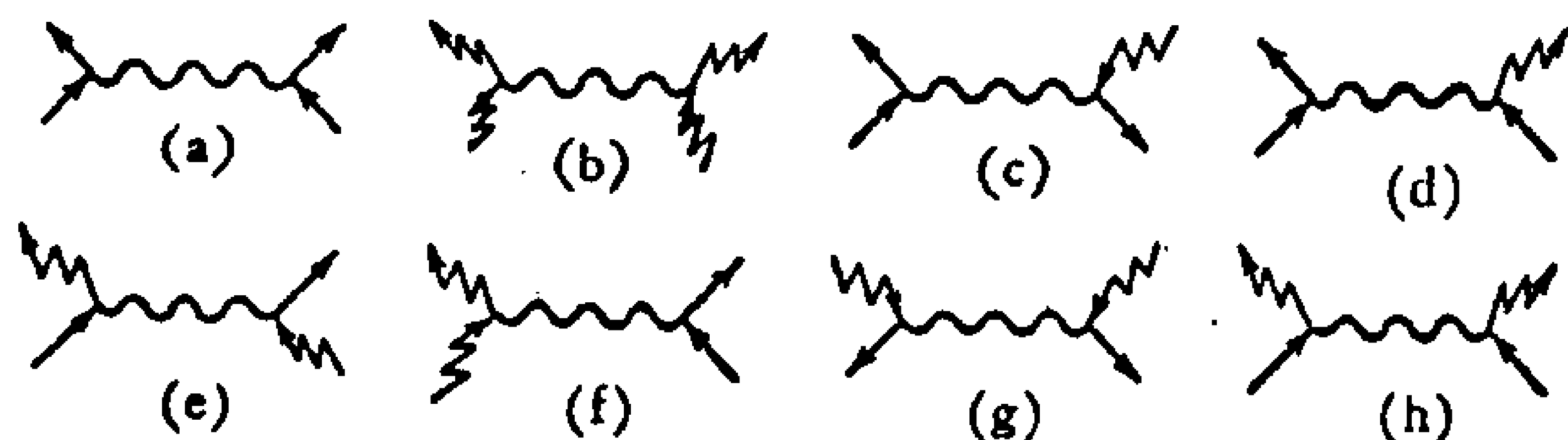



图 72

只須取所研究过程的相連图形,幷令算符 $\xi_0$ 和 $\xi_0^+$ 是外参量,代之以 $\xi_0, \xi_0^+ \to \sqrt{n_0}$ (所有参与过程的粒子的频率从化学势算起)．我們只限于列举动量表象中单粒子格林函数图形和矩陣元的对应規則．討論某个格林函数,例如 $G'(x-x')$, 的微扰論 $m$ 級图, 它有进去和出来的凝聚体粒子綫各 $s$ 条(我們已不只一次地指出,任何图形上出入綫的数目应当相等)． 所討論的图形包含在如下的表达式中:

$$(-i)\frac{(-i)^m}{m!}\left\langle T\left(\psi'(x)\int H_{int}(t_1)\cdots\right.\right.$$
$$\left.\left.\cdots H_{int}(t_m)\psi'^+(x')dt_1\cdots dt_m\right)\right\rangle.$$

$m$ 个哈密頓量 $H_{int}(t_i)$ 不破坏图形收縮順序的置換数为 $m!$．$\psi'$ 算符的数目(即 $\psi'^+$ 算符的数目)显然等于 $2m-s+1$.

根据格林函数 $G^{(0)}$ 的定义,每个收縮有因子 $-i$. 令实綫代表格林函数 $G^{(0)}$, 波紋綫代表势

$$V(x-x') = U(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(t-t').$$



根据 (25.1) 式和图 72, 三端頂点(即有一条波紋綫出来的頂点)的总数比微扰論的級数多一倍．不难看出,如果引入各量的傅立叶分量:

$$G'(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int G'(p)e^{ip(x-x')}d^4p,$$
$$V(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int U(\boldsymbol{q})e^{iq(x-x')}d^4q \text{ 等等},$$

則对格林函数微扰論任何 $m$ 級图写矩陣元的規則如下:

(1) 每条从左至右的实綫在 $G'(p)$ 中代表函数 $G^{(0)}(p) = (\omega - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}) + \mu + i\delta)^{-1}$ (方向相反的綫代表 $G^{(0)}(-p)$);

(2) 每条动量为 $\boldsymbol{q}$ 的波紋綫代表相互作用势的傅立叶分量 $U(\boldsymbol{q})$;

(3) 进去或出来的凝聚体綫代表因子 $\sqrt{n_0}$;

(4) 在每个三端頂点波紋綫的动量 $\boldsymbol{q}$ 等于粒子綫动量之差．对未由守恆律限制的动量进行积分,每个积分带着因子 $(2\pi)^{-4}$;

(5) 整个矩陣元乘以 $A_{s,m}(-i)^{s-m}$, 其中 $A_{s,m}$ 視图中有那些 (25.2) 式的項而定． 如果 $s$ 理解为給定 $m$ 級图中因子 $n_0$ 的冪次, 則这些規則对函数 $\hat{G}$ 和 $\check{G}$ 也成立． 实际上如 $\hat{G}$ 的一个图中有 $l$ 条进去的凝聚体綫,則根据 $\hat{G}$ 的定义(24.7)式, 它有 $l+2$ 条出来的綫．算符 $\psi'$ 和 $\psi'^+$ 的收縮数(函数 $G^{(0)}$ 的个数)显然等于 $2m-l$. 既然每个格林函数按定义具有因子 $-i$, 則矩陣元应乘的因子为

$$(-i)^{l+1-m}.$$

而 $l+1$ 正是来自凝聚体綫的因子 $n_0$ 的冪次 $s$.

**2. 化学势和单粒子格林函数自能部分的关系．** 现在来証明化学势的公式(24.17)．討論海森堡表象中的算符 $\tilde{\xi}_0(t)$ (設 $-\mu N$ 項已幷入总哈密頓量)． 就时間依賴性說, $\tilde{\xi}_0(t)$ 滿足普通算符形式的量子力学方程:

$$i\frac{\partial\tilde{\xi}_0(t)}{\partial t} = [\tilde{\xi}_0(t), H] = -\mu\tilde{\xi}_0(t) - [H_{int}, \tilde{\xi}_0(t)].$$

利用这个方程,对凝聚体粒子格林函数 $G_0(t-t')$ 求得:

$$\frac{\partial G_0(t-t')}{\partial t}=i\mu G_0(t-t')-\langle T([\tilde{\xi}_0(t), H_{int}]\tilde{\xi}_0^+(t'))\rangle.$$

然而根据前几段的結果，$G_0(t-t')$ 与时間无关，就等于 $n_0$. 由此得：

$$\mu n_0=-\langle T([H_{int}, \tilde{\xi}_0(t)]\tilde{\xi}_0^+(t'))\rangle. \tag{25.3}$$

計算此式右端的平均值. 轉入相互作用表象：

$$\langle T([H_{int}, \tilde{\xi}_0(t)]\tilde{\xi}_0^+(t'))\rangle=\frac{\langle T([H_{int}, \xi_0(t)]\xi_0^+(t')S)\rangle}{\langle S\rangle}$$

再簡略重复一次 § 23 的論据. 在运算 $T$ 和 $\langle\cdots\rangle$ 中先完成对凝聚体外粒子的求平均与編时. 根据一般方法，这时只須考虑所有的相連图形，队为算符 $\xi_0$ 和 $\xi_0^+$ 是外參量. 所涉及的相連图形乃是各种眞空环；将只对 $H_{int}$ 中凝聚体外粒子求平均的結果記作 $\overline{H}_{int}^{相連}$. 函数 $\overline{H}_{int}^{相連}$ 与參量 $\xi_0$ 和 $\xi_0^+$ 有关. 为求得最終結果，須将 $\overline{H}_{int}^{相連}$ 中所有的算符 $\xi_0$ 和 $\xi_0^+$，換成准确的海森堡算符 $\tilde{\xi}_0$ 和 $\tilde{\xi}_0^+$，結果从(25.3)得到：

$$\mu n_0=-\frac{\langle T^0([\overline{H}_{int}^{相連}, \xi_0]\xi_0^+\langle S\rangle')\rangle^0}{\langle S\rangle}=-\langle T([\tilde{\overline{H}}_{int}^{相連},\tilde{\xi}_0]\tilde{\xi}_0^+\rangle. \tag{25.4}$$

对易关系 $[\overline{H}_{int}^{相連}, \xi_0]$ 中含有 $\xi_0$ 和眞空平均值 $\overline{H}_{int}^{相連}$ 中算符 $\xi_0$ 和 $\xi_0^+$ 各种乘积的对易. 計算 $\overline{H}_{int}^{相連}$ 时，对凝聚体外粒子按維克定理作了普通平均. 由于这是算符 $\psi'$ 和 $\psi'^+$ 的成对平均，所以算符 $\xi_0$ 和 $\xi_0^+$ 的数目也彼此相等.

試取 $m$ 級微扰論眞空环为例，它含有算符 $\xi_0$ 和 $\xi_0^+$ 各 $S$ 个. $\xi_0$ 和一个算符 $\xi_0^+$ 对易的結果是 $[\xi_0^+, \xi_0]=-\frac{1}{V}$，而 $\xi_0$ 可与所有 $S$ 个算符 $\xi_0$ 对易. 因此，如果将含有 $n_0^s$ 的 $m$ 級眞空图对基态能量的修正記作 $\langle H_{int}\rangle_{m,s}^{相連}$（它和 $\overline{H}_{int}^{相連}$ 的差別，在于算符 $\xi_0$ 和 $\xi_0^+$ 换成了 $\sqrt{n_0}$），則容易看出，(25.4)式就是：

$$\mu n_0=\sum_{s,m}\frac{s}{V}\langle H_{int}\rangle_{m,s}^{相連}$$

或者



$$\mu=\sum_{m,s}\frac{\partial}{\partial n_0}\frac{\langle H_{int}\rangle_{s,m}^{相連}}{V}=\frac{\partial}{\partial n_0}\frac{\langle H_{int}\rangle}{V}. \tag{25.5}$$

（眞空平均值 $\langle H_{int}\rangle$ 是參量 $\mu$ 和 $n_0$ 的函数. 因此(25.5)式右端指 $\mu$ 恆定时对 $n_0$ 的偏微商）. 后面証明的思想（Pines 和 Hugengoltz[49]），基于相互作用哈密頓量中算符 $\xi_0$, $\xi_0^+$ 和算符 $\psi'$, $\psi'^+$ 的对称性. 因此每个具有一定数量凝聚体綫的 $\langle H_{int}\rangle$ 眞空环，可以形式地对应一些不可約自能部分 $\Sigma_{11}(0)$, $\Sigma_{20}(0)$ 的图形，这时只須在眞空环中将适当数目进去与出来的凝聚体綫（算符 $\xi_0^+$ 和 $\xi_0$），換成进去和出来的实綫（算符 $\psi'^+$ 和 $\psi'$）. 图 73 中举了几个微扰論低級图形的簡单例子[1]. 由于凝聚体粒子的进出綫具有四維动量 $p=0$，

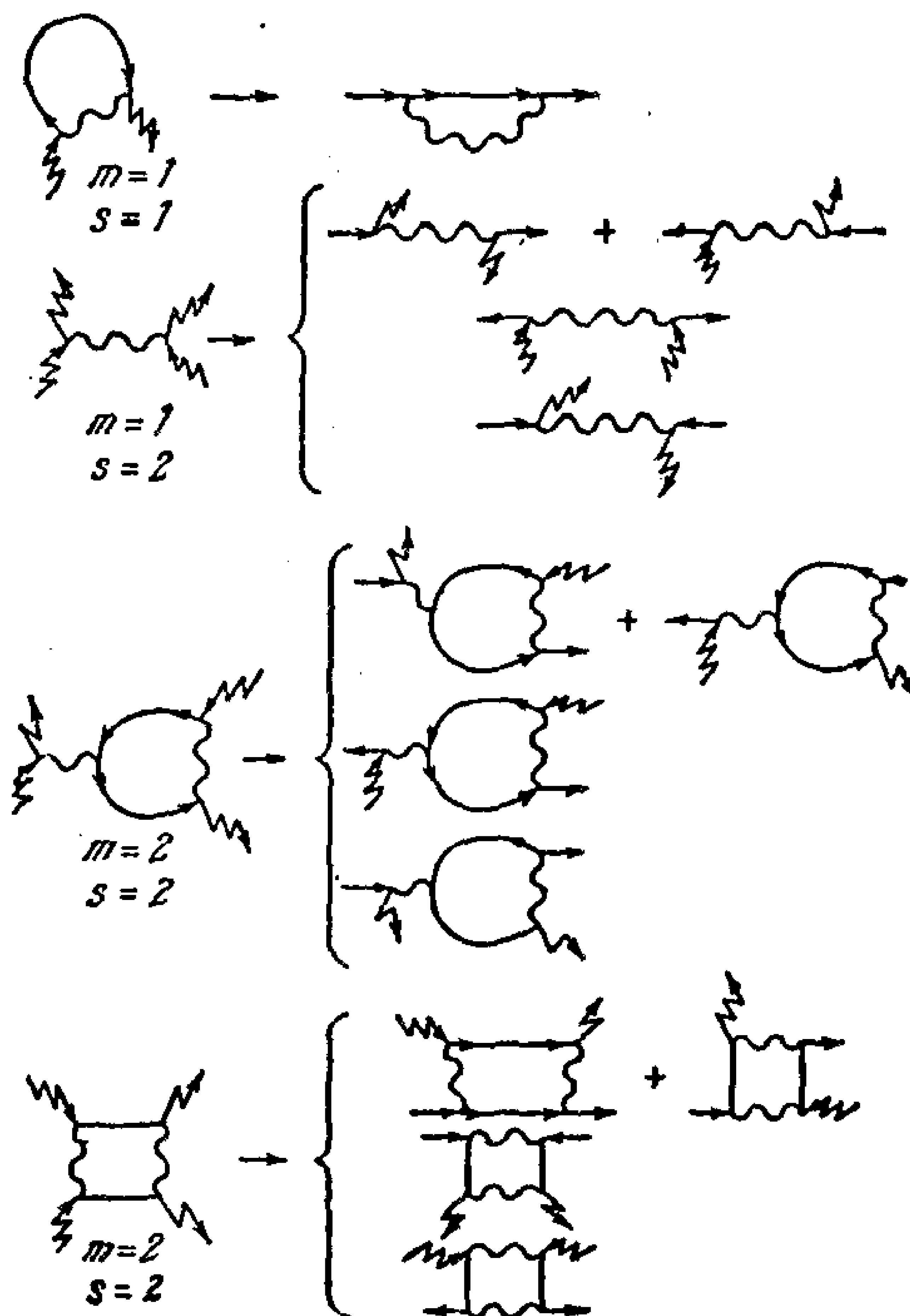



图 73

1）图形中有些等于零（見后面），但这无損于我們的示例.

则当 $p=0$ 时，以上对应关系对 $\Sigma_{11}(p)$，$\Sigma_{20}(p)=\Sigma_{02}(p)$ 的矩陣元也是成立的。

任意不可約图 $\langle H_{int}\rangle_{m,s}$ 矩陣元的对应规則，和前面列举的格林函数规則一样；容易驗証，唯一的差别是整个积分所应乘上的数值因子等于

$$(-i)^{s-m-2},$$

其中 $m$ 是微扰論的級別，$s$ 是图中 $n_0$ 的冪次. 自能部分矩陣元的相应因子为

$$(-i)^{s-m}.$$

对 $n_0$ 微分真空环时，$n_0$ 的冪減少一次. 討論一切可能的、具有 $s-1$ 个因子 $n_0$（以及同样多条进出凝聚体粒子綫）的 $m$ 級微扰論 $\Sigma_{11}(0)$ 图形. 所有这些图形可以从真空环 $(\overline{H}_{int}^{相連})_{m-1,s}$ 得出，只須將 $s$ 个算符 $\xi_0^+$ 中的一个换成进去的实綫，而一个 $\xi_0$ 换成出来的实綫，也就是說，这些图形可用 $s^2$ 种方式得到：

$$(\Sigma_{11}(0))_{m,s-1}=\frac{s^2}{n_0V}\langle H_{int}\rangle^{相連}_{m-1,s}.$$

將 $(\overline{H}^{相連}_{int})_{m-1,s}$ 中两条进去的折綫换成实綫，就得到 $\Sigma_{20}(0)$ 的图形. 这种图形的数目卽代换方式的总数，等于 $s(s-1)$. 因此

$$(\Sigma_{20}(0))_{m,s-1}=\frac{s^2-s}{n_0V}\langle H_{int}\rangle^{相連}_{m-1,s}.$$

將差 $\Sigma_{11}(0)-\Sigma_{20}(0)$ 和(25.5)式比較，直接得出：

$$\mu=\Sigma_{11}(0)-\Sigma_{20}(0). \tag{25.6}$$

显而易見，这个关系式的正确性，决不局限于我們所討論的粒子間成对相互作用. 我們在前节里已指出过这一点.

方程式(25.6)，以及联系系統内总粒子数密度和化学势的方程式(23.19)，是确定参量 $\mu$ 和 $n_0$ 数值的条件. 我們不在这里証明条件(23.20)和(25.6)的等价性，而仅仅指出，在微扰論（卽对弱相互作用粒子的气体）計算中，条件(25.6)更方便些，因为它把 $\mu$ 直接通过理想玻色气体的已知量表示出来.

**3. 低密度近似.** 应用以上方法于有相互作用的玻色粒子的



气体，其哈密頓量为(25.1)式. 我們已在第一章里討論过这个例子，那里假定粒子間相互作用力很小. 因此在激发譜的表达式(4.11)中，出現了势的傅立叶分量，它在玻恩近似下和粒子彼此散射的幅度成正比. 我們現在証明，这个結果实际上适用于更普遍的情况，卽不假設相互作用弱，而只假定气体的密度低，也就是粒子的尺寸比气体粒子間的平均距离小得多（如果以 $S$ 散射幅 $f_0$ 描述粒子的尺寸，则小参量是 $f_0n^{1/3}\ll 1$）. 討論微扰論一級近似下 $\Sigma_{11}(p)$ 和 $\Sigma_{20}(p)$ 的图形（图 74）. $\Sigma_{11}$ 的三个图中，第一个来自相

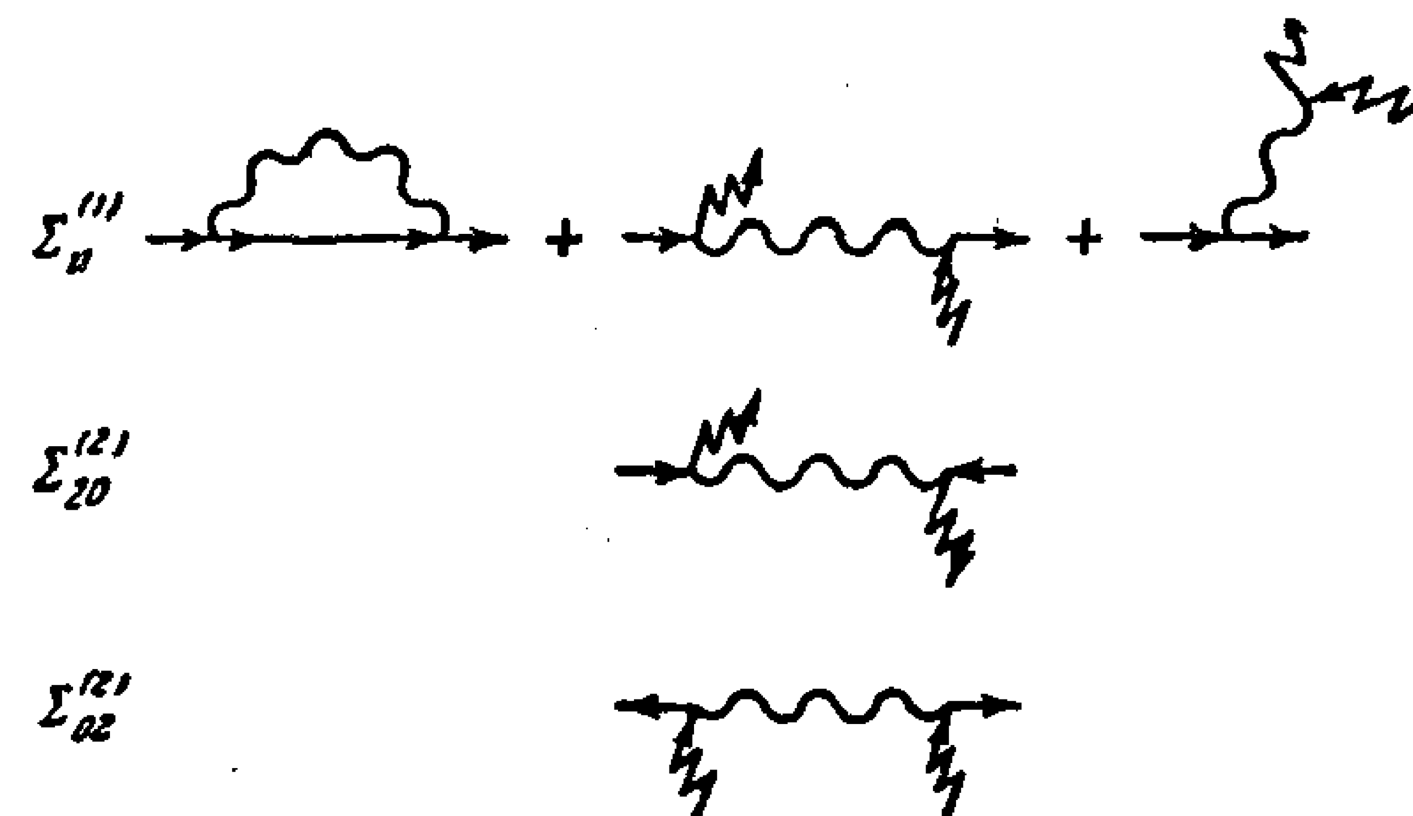


图 74

互作用哈密頓量(25.1)中 $H_a$ 項（見(25.2)）的平均. 这个图等于零，因为图中的內綫代表平均值 $-i\langle\psi'^+(\boldsymbol{r}')\psi'(\boldsymbol{r})\rangle\equiv 0$（注意波紋綫代表相互作用势 $V(x-x')=U(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(t-t')$，而 $H_a$ 中算符 $\psi'^+$ 和 $\psi'$ 的順序由(25.1)式給定）. 剩下的各項給出：

$$\Sigma_{11}^{(1)}(p)=n_0(U(0)+U(\boldsymbol{p})),$$

$$\Sigma_{20}^{(1)}(p)=\Sigma_{02}^{(1)}(p)=n_0U(\boldsymbol{p}),$$

其中 $U(\boldsymbol{p})$ 是相互作用势的傅立叶分量. 根据(25.6)：

$$\mu=n_0U(0).$$

所有微扰論二級图形中只有图 75 所示者不为零. 其它图形，例如图 76 所示的 $\Sigma_{11}^{(2)}(p)$ 都等于零，因为每个图中都有格林函数的乘积 $G^{(0)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',\ t_1-t_2)G^{(0)}(\boldsymbol{r}''-\boldsymbol{r}''',\ t_2-t_1)$（在坐标表象中）. 而在这两个格林函数之中，我們已經知道，当 $t_1<t_2$ 时，$G^{(0)}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2,\ t_1-t_2)\equiv 0$.

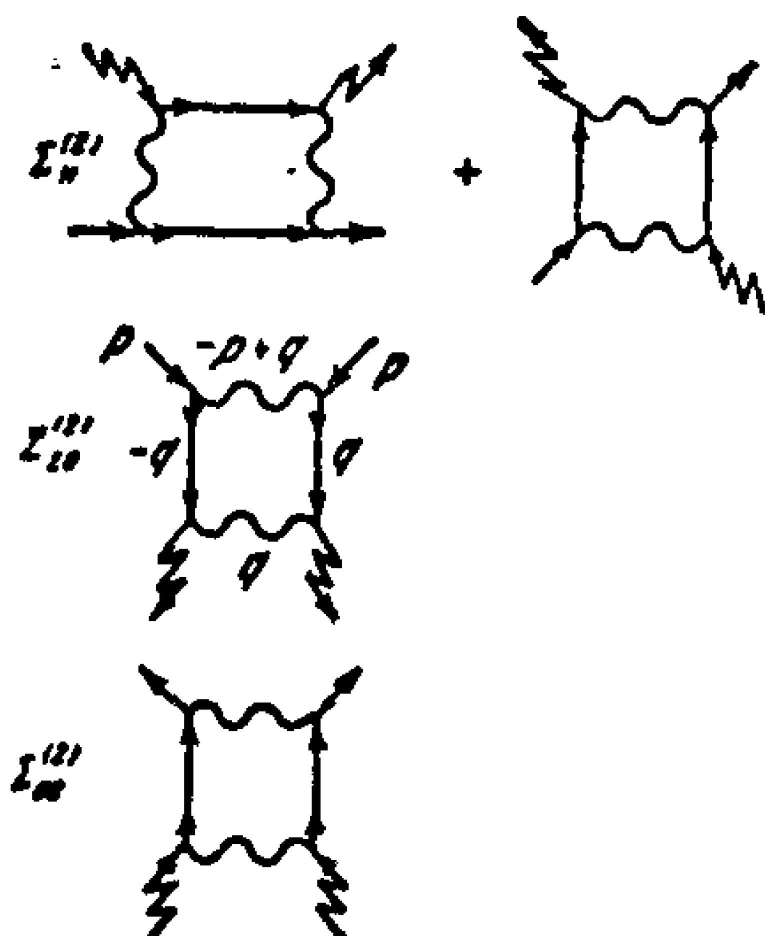


图 75

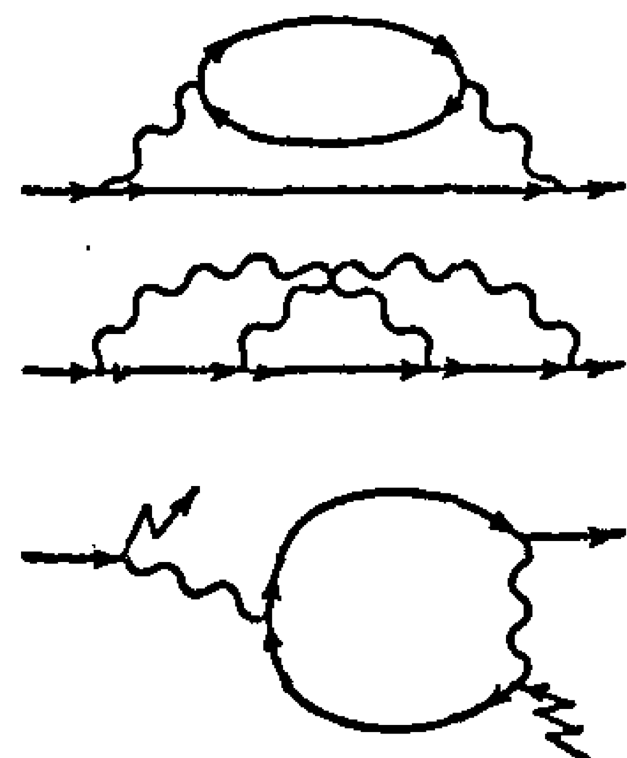


图 76

为了估計图 75，我們作簡化假設，認为相互作用势的傅立叶分量为：

$$U(\mathbf{p})=\begin{cases}U_0 & 当\ |\mathbf{p}|\ll \frac{1}{a},\\ 0 & 当\ |\mathbf{p}|\gg\frac{1}{a},\end{cases}$$

其中 $a\sim f_0$，約为粒子半径的数量级. 在任何图形的估値中可能包含出现于問题中的以下参量：描述相互作用的 $U_0$ 和 $a$，質量 $m$ 和凝聚体粒子密度 $n_0$. 这些参量可以构成两个无量綱組合：

$$\xi\sim\frac{mU_0}{a},\quad \beta=\sqrt{n_0a^3}.$$

$\xi$ 是微扰論(玻恩展开)参量，而 $\beta$ 是"气体"参量. 形式上微扰論是对 $\xi\ll 1$ 的冪展开式，然而我們今后只要求 $\beta\ll 1$.

为了更簡单起見，考虑图 75 中的 $\Sigma_{20}^{(2)}(p)$ 图形. 对它們有：

$$\Sigma_{20}^{(2)}(p)\sim n_0\int G^{(0)}(q)G^{(0)}(-q)U(\mathbf{q})U(\mathbf{p}-\mathbf{q})d^3\mathbf{q}\,d\omega$$

或者，将格林函数 $G^{(0)}$ 的值(23.9)代入，并对 $\omega$ 积分，得：

$$\Sigma_{20}^{(2)}(p)\sim n_0U_0^2\int\frac{d\mathbf{q}}{\mu-\varepsilon_0(\mathbf{q})}.$$

在积分中起主要作用的是大的 $|\mathbf{q}|\sim\frac{1}{a}$，这时 $\frac{\mu}{\varepsilon_{\mathbf{q}}^0}\sim mn_0U_0a^2=$



$\xi\beta^2\ll 1$，因而

$$\Sigma_{20}^{(2)}\sim\frac{mn_0U_0^2}{a}\sim\Sigma_{20}^{(1)}\xi.$$

对图形 $\Sigma_{11}^{(2)}$ 的类似估值表明 $\Sigma_{11}^{(2)}\sim\Sigma_{11}^{(1)}\xi$.

現在討論图 77(a) 所示的三級图 $\Sigma_{20}^{(3)}$. 为它得到：

$$\Sigma_{20}^{(3)}\sim n_0^2\int G^{(0)}(-q)[G^{(0)}(q)]^2[U(\mathbf{q})]^2U(\mathbf{p}+\mathbf{q})d\mathbf{q}\,d\omega\sim$$

$$\sim n_0^2U_0^3\int\frac{d\mathbf{q}}{(\mu-\varepsilon_0(\mathbf{q}))^2}.$$

和前面不同，这个积分在上限收斂，起主要作用的区間是 $|\mathbf{q}|\sim\sqrt{m\mu}\sim\sqrt{n_0U_0m}$，因而

$$\Sigma_{20}^{(3a)}\sim\frac{n_0^2U_0^3m^{3/2}}{\mu^{1/2}}\sim\Sigma_{20}^{(1)}\xi^{3/2}\beta.\qquad(25.7)$$

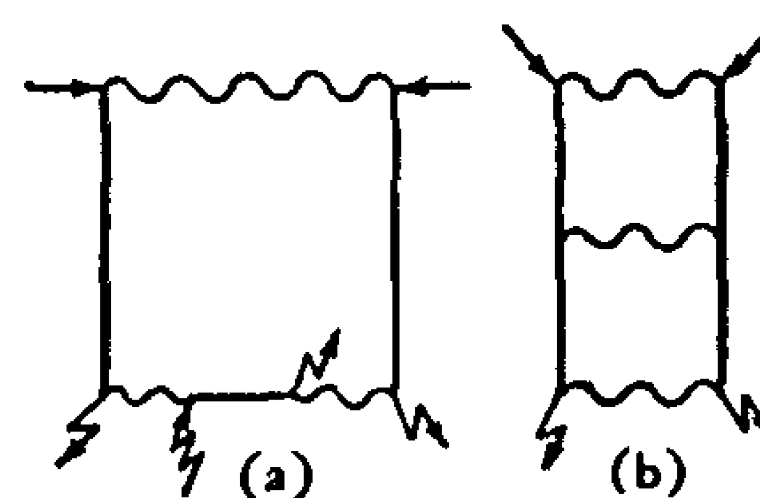


图 77

同时图 77(b) 的三級图形值为：

$$\Sigma_{20}^{(3b)}\sim\Sigma_{20}^{(1)}\xi^2.\qquad(25.8)$$

从(25.7)式和(25.8)式看出来，

$\Sigma_{20}^{(3a)}\sim\beta\xi^{-1/2}\Sigma_{20}^{(3b)}$. 这个結果之所以得出，是因为 $\Sigma_{20}^{(3b)}$ 含有两个 $G^{(0)}$ 函数乘积的两个积分，其中每一个积分形式上都是在上限发散的，而 $\Sigma_{20}^{(3a)}$ 中对三个 $G^{(0)}$ 函数积分，积分不須截断卽已收斂，其值則由被积表达式在动量 $|\mathbf{q}|\sim\sqrt{m\mu}$ 附近决定. 在图形中这个差别表现为，封閉环(由实綫和波紋綫組成者)中实綫的数目不同.

因此，$\Sigma_{ik}$ 中每一个实綫数目超过二的封閉环带来小参数 $\beta$，具有两条实綫的环不含 $\beta$. 因此在最低級近似只須考虑第二类图形. 形式上这表明，从 $\Sigma_{11}$ 和 $\Sigma_{20}$ 的全部图形中只須取具有两条进去或出来的凝聚体綫者，卽含 $n_0$ 一次冪的图. 其实从量綱考虑就清楚知道，含有高次 $n_0$ 的图，必补充地含有小参量 $\beta$. 全部所需的图属于阶梯型(图 78). 将图 79 的总合在动量表象中記作 $\Gamma^{(0)}(p_1, p_2; p_3, p_4)$. 按此做法，对 $\beta$ 的一級近似与微扰論一級近似的差别在于，微扰論中的势的傅立叶分量 $U(\mathbf{q})$ (梯子的第一"横梢") 换成 $\Gamma^{(0)}(p_1, p_2; p_1-q, p_2+q)$. 显然在一切更复杂的图形中，"阶

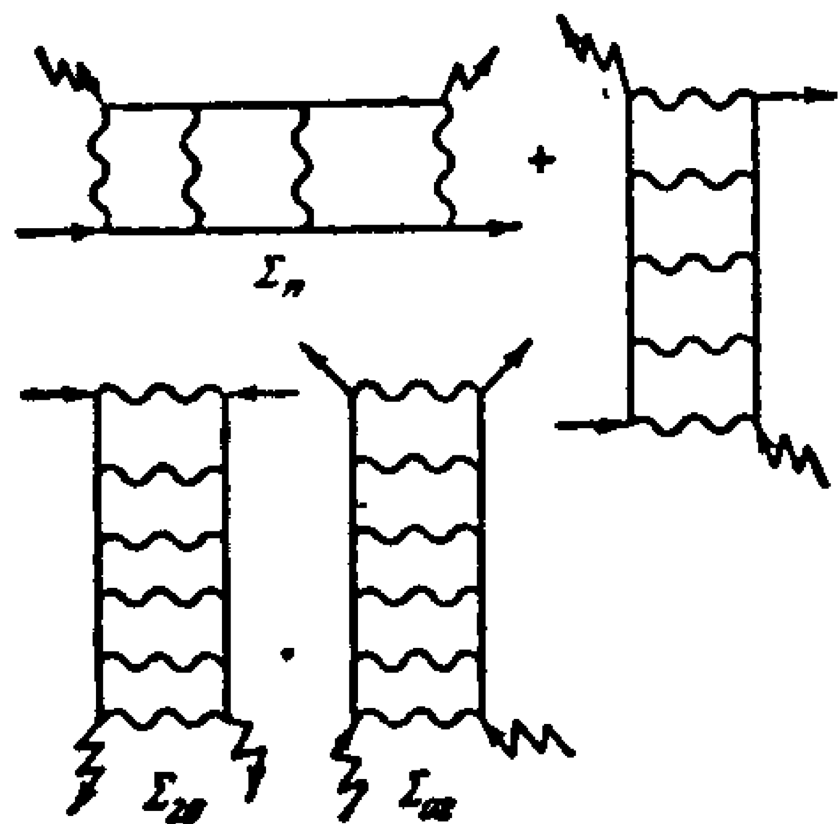


图 78

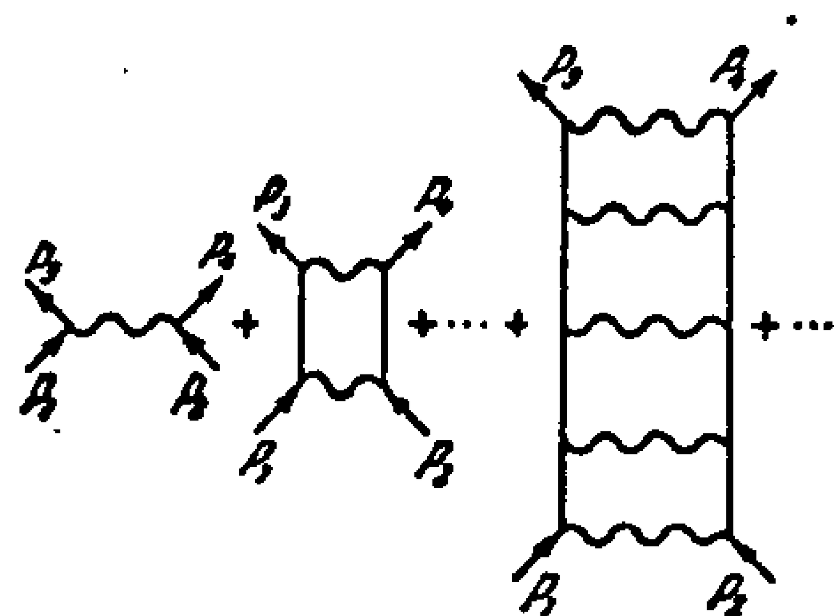


图 79

梯”环的求和也导致 $\Gamma^{(0)}$ 的出现（然而对我們說来，討論这些图形是多余的，因为它們給出 $\beta$ 的更高次項）. 这样，势 $U(q)$ 就从問題中除去；$\Gamma^{(0)}$ 起着有效势的作用.

$\Gamma^{(0)}(p_1, p_2; p_3, p_4)$ 的积分方程直接从图 79 的結构得出：

$$\Gamma^{(0)}(p_1,p_2;p_3,p_4) = U(\boldsymbol{p}_3 - \boldsymbol{p}_1) + \frac{i}{(2\pi)^4}\int U(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{k})G^{(0)}(k) \times$$
$$\times G^{(0)}(p_1 + p_2 - k)\Gamma^{(0)}(k, p_1 + p_2 - k; p_3, p_4)d^4k. \qquad (25.9)$$

**4. 有效相互作用势.** 现在着手研究方程式(25.9). 引入总动量和相对动量：

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4 = P; \quad p_1 - p_2 = 2k; \quad p_3 - p_4 = 2k'.$$

然后 $\Gamma^{(0)}(p_1, p_2; p_3, p_4) \equiv \Gamma^{(0)}(k, k'; P)$ 的方程(25.9)就变换成：

$$\Gamma^{(0)}(k, k'; P) = U(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}') + \frac{i}{(2\pi)^4}\int U(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{p}) \times$$
$$\times G^{(0)}\left(\frac{P}{2} + p\right)G^{(0)}\left(\frac{P}{2} - p\right)\Gamma^{(0)}(p, k'; P)d^4p. \qquad (25.10)$$

相互作用势 $V(x - x')$ 不包括推迟效应：$V(x - x') = U(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\delta(t - t')$. 傅立叶分量 $V(q) \equiv U(\boldsymbol{q})$ 也与四維矢量 $q$ 的第四分量无关. 因此 $\Gamma^{(0)}(p_1, p_2; p_3, p_4)$ 也只和第四分量的一个組合 $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4 = \Omega$ 有关（$p = \{\boldsymbol{p}, \Omega\}$）. 可見 $\Gamma^{(0)}(k, k'; P)$ 与前两个变量的第四分量无关，因而在方程式(25.10)中可完成对 $d\omega$ 的积分：



$$\int d\omega G^{(0)}\left(\frac{P}{2} + p\right)G^{(0)}\left(\frac{P}{2} - p\right) = -\frac{2\pi i}{\Omega - \frac{\boldsymbol{p}^2}{4m} + 2\mu - \frac{\boldsymbol{p}^2}{m} + i\delta}.$$

代入(25.10)式后，$\Gamma^{(0)}(k, k'; P)$ 的方程成为：

$$\Gamma^{(0)}(k, k'; P) = U(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}') + \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\boldsymbol{p}\, \frac{U(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{p})\Gamma^{(0)}(p, k'; P)}{\frac{\chi^2}{m} - \frac{\boldsymbol{p}^2}{m} + i\delta} \qquad (25.11)$$

$$\left(\frac{\chi^2}{m} = \Omega - \frac{\boldsymbol{p}^2}{4m} + 2\mu\right).$$

对于任意的相互作用律，不能一般地解出这个方程，然而它的解可以通过两个粒子在眞空中彼此散射的幅度表示.

我們在此提醒一下讀者，怎样处理粒子在势場 $U(\boldsymbol{r})$ 中的散射. 粒子在場 $U(\boldsymbol{r})$ 中的薛定格方程可写成：

$$(\nabla^2 + \boldsymbol{k}^2)\psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) = 2mU(\boldsymbol{r})\psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}),$$

其中 $\frac{\boldsymbol{k}^2}{2m}$ 是粒子能量本征值，$\psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})$ 是其波函数. 最好将此方程通过泊松方程的解表示：

$$\psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) = -\frac{m}{2\pi}\int \frac{e^{i|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}U(\boldsymbol{r}')\psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}' + \psi_{0\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}), \qquad (25.12)$$

其中 $\psi_{0\boldsymbol{k}}$ 是具有同一能量的自由粒子波函数. 决定散射幅的条件是，距离散射中心很远时，波函数应为平面波（自由粒子）和散射球面波之和[1)]：

$$\psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) = e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} - f(\theta)\frac{e^{i|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{r}|}}{|\boldsymbol{r}|},$$

其中 $\theta$ 是相对于矢量 $\boldsymbol{k}$ 的方向的散射角. 将(25.12)式在 $|\boldsymbol{r}|$ 很大时的行为与这个定义比較，就得到：

$$f(\theta) = \frac{m}{2\pi}\int e^{-i\boldsymbol{k}'\boldsymbol{r}'}U(\boldsymbol{r}')\psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}',$$

1) 这里散射幅的定义和通常采用者差一符号(参閱[16]).

其中矢量 $\boldsymbol{k}'$ 沿 $\boldsymbol{r}$ 的方向．把波函数变换到动量表象：

$$\psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) = (2\pi)^{-3}\int \psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{p})e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}}d\boldsymbol{p},$$

就得到：

$$f(\theta) \equiv f(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') = \frac{m}{(2\pi)^4}\int U(\boldsymbol{k}' - \boldsymbol{p})\psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{p})d\boldsymbol{p} \qquad (25.13)$$

（$\boldsymbol{k}$ 的方向是粒子的入射方向）．通常散射幅指的是（25.13）式在 $|\boldsymbol{k}| = |\boldsymbol{k}'|$ 时的值；我們将对任意的矢量 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{k}'$，根据(25.13)式定义广义散射幅 $f(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')$．在动量表象中方程式（25.12）的形状是：

$$\psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{p}) = (2\pi)^3\delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{p}) + \frac{4\pi f(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{p})}{\boldsymbol{k}^2 - \boldsymbol{p}^2 + i\delta}. \qquad (25.14)$$

将(25.14)式代入(25.13)式后得：

$$\left[\frac{2\pi}{m}f(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')\right] = U(\boldsymbol{k}' - \boldsymbol{k}) + \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{U(\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{p})\left[\frac{2\pi}{m}f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{p})\right]}{\frac{\boldsymbol{k}^2}{2m} - \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + i\delta}d\boldsymbol{p}.$$

(25.15)

現在回到方程式（25.11）．两个以势能 $U(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')$ 相互作用的粒子彼此散射，可以归結为一个折合质量为 $m^* = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$ 的粒子在势場 $U(\boldsymbol{r})$ 中的散射．在方程式(25.15)中作代换 $m \to m^* = \frac{m}{2}$，可将其改写为：

$$U(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}') = \left[\frac{4\pi}{m}f(\boldsymbol{k}', \boldsymbol{k})\right] -$$

$$- \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{U(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{p})\left[\frac{4\pi}{m}f(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{p})\right]d\boldsymbol{p}}{\frac{\boldsymbol{k}'^2}{m} - \frac{\boldsymbol{p}^2}{m} + i\delta} \equiv \hat{L}\left(\frac{4\pi}{m}f\right), \quad (25.16)$$

式中以 $\hat{L}$ 記(25.16)式右端的算符．从方程(25.11)的左右两端减去同样的表达式，可得：



$$\Gamma^{(0)}(k, k'; P) - \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{U(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{p})\Gamma^{(0)}(p, k'; P)}{\frac{\boldsymbol{k}'^2}{m} - \frac{\boldsymbol{p}^2}{m} + i\delta}d\boldsymbol{p} =$$

$$= U(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}') + \frac{1}{(2\pi)^3}\int U(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{p})\left\{\frac{1}{\frac{\chi^2}{m} - \frac{\boldsymbol{p}^2}{m} + i\delta} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\frac{\boldsymbol{k}'^2}{m} - \frac{\boldsymbol{p}^2}{m} + i\delta}\right\}\Gamma^{(0)}(p, k'; P)d\boldsymbol{p}.$$

此式左面是 $\hat{L}(\Gamma^{(0)})$．以算符 $\hat{L}^{-1}$ 作用之，得到 $\Gamma^{(0)}$ 的方程：

$$\Gamma^{(0)}(k, k'; P) = \frac{4\pi}{m}f(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k}) + \frac{1}{(2\pi)^3}\int \left[\frac{4\pi}{m}f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{k})\right] \times$$

$$\times \left\{\frac{1}{\frac{\chi^2}{m} - \frac{\boldsymbol{p}^2}{m} + i\delta} - \frac{1}{\frac{\boldsymbol{k}'^2}{m} - \frac{\boldsymbol{p}^2}{m} + i\delta}\right\}\Gamma^{(0)}(p, k'; P)d\boldsymbol{p}.$$

(25.17)

由此看出，$\Gamma^{(0)}(k, k'; P)$ 在第一級近似就等于 $\frac{4\pi}{m}f(\boldsymbol{k}', \boldsymbol{k})$．甚至当假定 $f$ 和 $\Gamma^{(0)}$ 是常数时，(25.17)式右端的积分也是收斂的，因而其数量級为 $\sim \frac{|\boldsymbol{k}|}{m}f^2$．以后会看到，有用的动量区間是 $|\boldsymbol{k}| \sim \sqrt{m\mu} \sim \sqrt{n_0 f}$，即 $|\boldsymbol{k}|f \ll 1$，故对于 $\Gamma^{(0)}(k, k'; P)$ 只取第一級近似就够了．此外要指出，这时可忽略 $f(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')$ 与 $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}'$ 的依賴性．能量很小时，这个依賴关系乃是粒子尺寸 $a$ 和波长 $\lambda \sim \frac{1}{|\boldsymbol{k}|}$ 之比的冪展开．由于 $a$ 的数量級与散射幅 $f$ 相同，而 $f|\boldsymbol{k}| \ll 1$，最終可写成：

$$\Gamma^{(0)}(k, k'; P) \simeq \frac{4\pi}{m}f(0, 0) \equiv \frac{4\pi}{m}f_0. \qquad (25.18)$$

**5. 低密度近似下玻色气体的格林函数．能譜．** 根据以上所述，我們有：

$$\Sigma_{11}(p) = \frac{8\pi}{m}f_0n_0; \quad \Sigma_{20}(p) = \Sigma_{02}(p) = \frac{4\pi}{m}f_0n_0;$$

$$\mu = \frac{4\pi}{m} f_0 n_0. \tag{25.19}$$

将这些式子代入(24.4)式和(24.5)式,得:

$$G(p) = \frac{\omega + \frac{p^2}{2m} + \frac{4\pi n_0 f_0}{m}}{\omega^2 - \varepsilon^2(p) + i\delta},$$

$$\hat{G}(p) = -\frac{4\pi n_0 f_0}{m} \frac{1}{\omega^2 - \varepsilon^2(p) + i\delta},$$

其中

$$\varepsilon(p) = \sqrt{\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{4\pi n_0 f_0}{m}\right)^2 - \frac{16\pi^2 n_0^2 f_0^2}{m^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{p^4}{4m^2} + \frac{4\pi n_0 f_0}{m^2} p^2} \tag{25.20}$$

是动量小时系統的能譜. (25.20)式和第一章中求得的能譜表达式(4.11)的差別,是玻恩幅度換成了准确的 $S$ 散射幅.从(25.20)式得,当 $|p| \ll \sqrt{n_0 f_0}$,准粒子具有声子色散律 $\varepsilon(p) \simeq |p| \sqrt{\frac{4\pi n_0 f_0}{m^2}}$,而当 $|p| \gg \sqrt{n_0 f_0}$,它成为"几乎自由"的粒子 $\varepsilon(p) \simeq \varepsilon_0(p) + \frac{4\pi n_0 f_0}{m}$ (这种形狀的譜,相当在具有一定折射率的連續介質中运动的粒子). 色散律从声子区域到"自由粒子"区域的轉变,发生在 $|p| \sim \sqrt{n_0 f_0} \ll \frac{1}{f_0}$ 处,因此在两个区域中将散射幅看成常数,都是合法的近似.

最后要指出,这里所討論的模型无論如何不能和实际氦的性質相应. 旣使不考慮低密度近似之不适用于 HeII,还須強調,其实形如(25.20)式的能譜对于小动量 $p$ 是不稳定的. 事实上 $|p| \neq 0$ 时,激发的速度 $\frac{\partial \varepsilon}{\partial |p|}$ 超过声速,即元激发可以产生声子(見下节). 这就使能譜中出现衰減,$p$ 很小时元激发寿命和 $|p|^5$ 成反比. 氦的能譜在 $p$ 很小时幷不具有这种不稳定性.



## §26. 单粒子激发譜在其終点附近的性質

**1. 問題提法.** 实际玻色液体,卽氦的单粒子激发譜,当然不能从理論上計算出来. 只有动量很小时,能量与动量才呈直綫关系(譜的声子部分),动量大时譜就偏离綫性,其进一步变化取决于液体粒子間相互作用的具体性質.

玻色液体中的激发譜不同于費米液体譜的一个特点,是可能存在不衰減的玻色激发. 从数学观点看,这表明方程式(24.16)的解是实数. 温度大于零时激发的衰減,是因为它們可能彼此碰撞. 在絕对零度不存在眞正的激发. 因此唯一导致有限寿命的机制,是它裂变成能量更小的激发,只要能量和动量守恆律允許这种过程存在. 在費米液体中总可能裂变成粒子和空穴,因而准粒子的寿命有限,反比于 $(|p| - p_0)^2$. 在玻色液体中动量充分小的元激发可以不衰減地存在下去. 随着动量增加,能量最終达到某个閾値,超过它以后元激发就不稳定了,而裂变成两个或更多的能量較小的元激发. 这种閾我們称为譜的終点. 它乃是能譜曲綫的一个奇异点. 下面我們試图闡明这个奇异点的性質;而且以后将看到,可以不作任何关于相互作用弱的假定,而以一般形式作完整的研究 (Питаевский [49]). 我們只限于一个假定(看来它具有足够的物理普遍性),卽譜的終点相当于裂变成两个(而不更多)元激发的閾値.

元激发裂变为二的过程中,能量和动量守恆律应成立. 这个条件可写成方程式:

$$\varepsilon(p) = \varepsilon(q) + \varepsilon(p - q). \tag{26.1}$$

这里 $p$ 和 $\varepsilon(p)$ 是裂变前元激发的动量和能量,$q$ 和 $\varepsilon(q)$ 是裂变中产生的元激发之一的动量和能量,$p - q$ 和 $\varepsilon(p - q)$ 是另一个裂变产物的动量和能量. 如果方程式(26.1)对于給定的 $p$ 沒有 $q$ 的解,则表示裂变不可能. 裂变閾(元激发在閾点的动量記为 $p_c$,能量記为 $\varepsilon_c = \varepsilon(p_c)$)的特点是,(26.1)式在 $\varepsilon < \varepsilon_c$ 时对 $q$ 无解,而在 $\varepsilon = \varepsilon_c$ 时有解. 为此必須要求(26.1)式右端在 $|p| = p_c$

时，作为矢量 $\boldsymbol{q}$ 的函数在某个 $\boldsymbol{q}$ 处具有极小值．当 $|\boldsymbol{p}|=p_c$ 时(26.1)式右端和两个变量有关：矢量 $\boldsymbol{q}$ 的絕对值和 $\cos\theta$，其中 $\theta$ 是矢量 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 的夾角．上述表达式的极小值可能出現在 $\theta=0$ 处，也可能出現在 $\theta\neq 0$ 处．

設(26.1)式右端在某个动量 $\boldsymbol{q}$ 处有极小值．对 $\Delta\boldsymbol{q}$ 展开到二次項：

$$\varepsilon(\boldsymbol{q}+\Delta\boldsymbol{q})+\varepsilon(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}-\Delta\boldsymbol{q})\simeq\varepsilon(\boldsymbol{q})+\varepsilon(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})+$$
$$+\frac{\partial\varepsilon(\boldsymbol{q})}{\partial\boldsymbol{q}_i}\Delta\boldsymbol{q}_i-\frac{\partial\varepsilon(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})}{\partial\boldsymbol{p}_i}\Delta\boldsymbol{q}_i+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varepsilon(\boldsymbol{q})}{\partial\boldsymbol{q}_i\partial\boldsymbol{q}_k}\Delta\boldsymbol{q}_i\Delta\boldsymbol{q}_k+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varepsilon(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})}{\partial\boldsymbol{p}_i\partial\boldsymbol{p}_k}\Delta\boldsymbol{q}_i\Delta\boldsymbol{q}_k.$$

在极小点应无綫性項．显然有两种可能性：

(1) $\frac{\partial\varepsilon(\boldsymbol{q})}{\partial\boldsymbol{q}}=\frac{\partial\varepsilon(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})}{\partial\boldsymbol{p}}\neq 0$．这相当于裂变成两个以同一速度 $\boldsymbol{v}=\frac{\partial\varepsilon}{\partial\boldsymbol{q}}$ 沿矢量 $\boldsymbol{k}$ 方向传播的元激发．这时又可能有两种情况．第一，元激发之一的动量可能任意地接近零．这相当于在 $p_c$ 点元激发的速度接近于声速 $c$，因而元激发可以产生声子(情况 $a$)．第二，两个元激发都具有大于零的动量(情况 $b$)．

(2) $\frac{\partial\varepsilon(\boldsymbol{q})}{\partial\boldsymbol{q}}=0,\ \frac{\partial\varepsilon(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})}{\partial\boldsymbol{p}}=0$．为此須使每个元激发产生时都具有动量 $p_0$，而且元激发能量 $\varepsilon(\boldsymbol{p})$ 为极小．对于液体氦，这个点相当于譜上 $p_0=2\cdot10^{-19}$ 克・厘米/秒处．在这个点的邻域譜 $\varepsilon(\boldsymbol{p})$ 具有所謂旋子形式：

$$\varepsilon(\boldsymbol{p})=\Delta+\frac{(|\boldsymbol{p}|-p_0)^2}{2m^*},\quad(|\boldsymbol{p}|-p_0\ll p_0).\qquad(26.2)$$

如果 $\varepsilon_c=2\Delta$，则激发裂变成两个动量为 $\boldsymbol{q}$ 和 $\boldsymbol{q}_1$ 的旋子，而且 $|\boldsymbol{q}|,|\boldsymbol{q}_1|=p_0$；$\varepsilon(\boldsymbol{q}),\varepsilon(\boldsymbol{q}_1)=\Delta$．决定两个旋子分出的角度 $\theta$ 的条件是，其动量和应等于 $p_c$(情况 $c$)．上面列举的三种情况，包括了裂变成两个元激发的閾点的全部类型．

**2. 方程組．** 我們采用前面介紹的量子場論方法研究譜在閾



点附近的形状，也就是說，我們将寻求格林函数在譜終点附近的形状，因为譜本身决定于格林函数的极点．从物理上看很清楚，描述格林函数奇异性的图形中，必有一条綫分成两条，即形象地表示出元激发裂变为二的过程．試以图 80 所示的图形为例．各种格林函数 $G'$，$\hat{G}$ 和 $\check{G}$ 都出現在这些图形中．图中每个环都是自能部分，其特征是由两个三端頂点(只算凝聚体外粒子綫)組成，二頂点由两条实綫相連．这种环的相应积分是：

图 80

$$\int d\omega' d\boldsymbol{q} G(q)G(p-q)\Gamma_1\Gamma_2,\qquad(26.3)$$

其中函数 $G$ 可以代表任何一个格林函数 $G'$，$\hat{G}$ 或 $\check{G}$，而 $\Gamma_1$ 和 $\Gamma_2$ 乃是图中左面和右面的頂点．設外端綫的 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{p}$ 值在极点 $\omega=\varepsilon(\boldsymbol{p})$ 附近(我們已經証明，三个格林函数的极点重合)．如果积分(26.3)有奇异点，则与之有关的对 $\omega'$ 和 $\boldsymbol{q}$ 的积分区域里，函数 $G(q)$ 和 $G(p-q)$ 都处于自己的极点附近．根据(24.10)式，(24.12)式和(24.14)式，在极点附近两个函数的形状是：

$$\left.\begin{aligned}G(q)&=\frac{A_1}{\omega'-\varepsilon(\boldsymbol{q})+i\delta}\ \text{或}\ \frac{A_2}{\omega'+\varepsilon(\boldsymbol{q})-i\delta},\\ G(p-q)&=\frac{B_1}{\omega-\omega'-\varepsilon(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})+i\delta}\\ &\text{或}\ \frac{B_2}{\omega-\omega'+\varepsilon(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})-i\delta},\end{aligned}\right\}\qquad(26.4)$$

視我們在正极点，或在負极点討論每个函数而定．将这些式子代入(26.3)式，我們就看到，对我們有意义的是 $A_1B_1$ 型的交錯項．在这些項中可对 $\omega'$ 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 完成积分，剩下的对 $\boldsymbol{q}$ 的积分取在 $\boldsymbol{q}$ 值的某个范围內，其形状是：

$$\int\frac{\Gamma_1\Gamma_2ABd\boldsymbol{q}}{\varepsilon(\boldsymbol{q})+\varepsilon(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})-\omega}.\qquad(26.5)$$

只要对某个 $q$ 值被积函数的分母为零，积分就有奇异性。当 $\omega < \varepsilon(p_c)$ 时，由以上分析知分母总大于零；当 $\omega = \varepsilon(p_c)$ 时被积表达式第一次趋向无穷大，因而 $\omega = \varepsilon(p_c)$ 是这个积分在数学意义上的奇异点。因此，这个奇异点的性质仅仅由格林函数的解析性質决定，不論我們取图 80 中那一个具体的自能部分图。后一情况使以后的討論大为簡化。实际上，为了确定奇异点的性質，象我們刚刚已証明的一样，須知格林函数在极点附近的表达式。在极点附近三个格林函数形状相同。因此，如果我們不关心正規項的具体数值与各种次要的系数，则三个格林函数的图形是同构的，因而在极点附近可不区别函数 $G'$, $\hat{G}$ 和 $\check{G}$。例如将方程式(24.2)加到一起，并引入新函数 $G_1(p) = G'(p) + \hat{G}(p)$。对函数 $G_1(p)$ 得到下列方程式:

$$G_1(p) = G^{(0)}(p) + G^{(0)}(p)[\Sigma_{11}(p) + \Sigma_{20}(p)]G_1(p).$$

将自能部分 $\Sigma = \Sigma_{11} + \Sigma_{20}$ 的全部图形，分成在 $\omega = \varepsilon_c$ 点无奇异性的图形 $\Sigma_0$，以及有奇异性的图 $\Sigma_1$，后者的图解如图 80。引入如下的函数 $\tilde{G}^{(0)}(p)$:

$$\tilde{G}^{(0)}(p) = \frac{1}{G^{(0)^{-1}}(p) - \Sigma_0(p)}.$$

这时剩下的方程式可写成如图 81 所示的戴逊方程形式。既然奇

$G(p)$ = $\tilde{G}^{(0)}(p)$ + $\tilde{G}^{(0)}(p)$ $G(q)$ $G(p)$ $G(p-q)$

图 81

异点的性质决定于极点处所有的格林函数的形状，而它們在极点处只有系数之差，我們将所有的內綫 $G'$, $\hat{G}$ 或 $\check{G}$ 都換成 $G_1$。封閉环左面是某个"引发"頂点 $\Gamma^{(0)}$，从一般图解法观点看，它乃是三个凝聚体外粒子和凝聚体粒子相互作用的結果(如图 80 各图形所示)；环右面是三端頂点 $\Gamma$，是在 $\Gamma^{(0)}$ 的向外綫条中加入相互作用而得到的。

将 $\Gamma(p, p-q, q)$ 通过 $\Gamma^{(0)}(p, p-q, q)$ 表达的图解示于图



82(a)。图中方框代表两个凝聚体外粒子彼此散射的完全不可約頂角部分 $\Gamma(p_1, p_2, p_3, p_4)$。这些图形的求和由图 82(b) 的簡单方程式实現。这乃是所有端点 $p_1$, $p_2$ 和 $p_3$, $p_4$ 之間不能再分成以一

a) $\Gamma$ = $\Gamma^{(0)}$ + $\Gamma^{(0)}$ + $\Gamma^{(0)}$ + ···

б) = + 

图 82

条或两条綫相連的两部分的四粒子图的总合。省去 $G_1$ 的足标，写出方程的解析式:

$$G^{-1}(p) - \tilde{G}^{(0)^{-1}}(p) = \frac{i}{(2\pi)^4}\int \Gamma^{(0)}(p, p-q, q)G(q) \times$$

$$\times G(p-q)\Gamma(p, p-q, q)d^4q, \qquad (26.6)$$

$$\Gamma(p,p-q,q) = \Gamma^{(0)}(p,p-q,q) + \frac{i}{(2\pi)^4}\int \Gamma(p,p-k,k) \times$$

$$\times G(k)G(p-k)\Gamma(k, p-k; p-q, q)d^4k. \qquad (26.7)$$

在本节初指出的三类關附近，方程組(26.6)和(26.7)的性質完全不同，我們应当分别討論这些情况。

**3. 产生声子的關点附近譜的性質.** 討論在元激发速度等于声速的点附近激发譜的性質。从这个点开始，元激发可以产生声子。这时守恆律(26.1)式的形状是:

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon(\mathbf{p}-\mathbf{q}) + \omega(\mathbf{q}), \qquad (26.1')$$

其中 $\omega(\mathbf{q})$ 是声子频率，$\mathbf{q}$ 是其波矢。$\mathbf{q}$ 很小时频率 $\omega(\mathbf{q})$ 为:

$$\omega(\mathbf{q}) = c|\mathbf{q}| - \alpha|\mathbf{q}|^3. \qquad (26.8)$$

我們可以認为 $\alpha > 0$，即声子譜是稳定的，然而以后用不到 $\omega(\mathbf{q})$ 中的三次項。$|\mathbf{p}| = p_c$ 时函数 $\varepsilon(\mathbf{p})$ 有奇点。我們假定奇异性出現在比 $\Delta p = |\mathbf{p}| - p_c$ 的二次冪更高的小項中(这将被最終結果証实)，即在 $p_c$ 附近

$$\varepsilon(\mathbf{p}) \simeq \varepsilon_c + c\Delta p + \beta(\Delta p)^2. \qquad (26.9)$$

(按假定，$|\mathbf{p}| = p_c$ 时元激发速度 $v = \frac{\partial \varepsilon}{\partial |\mathbf{p}|}$ 等于声速)。

当 $|\boldsymbol{p}| = p_c$ 而 $\cos\theta = 1$ ($\theta$ 为 $\boldsymbol{q}$ 和 $\boldsymbol{p}$ 的夹角)时，注意(26.8)式和(26.9)式，(26.1′)式右端成为：

$$\varepsilon_c + \beta|\boldsymbol{q}|^2. \tag{26.10}$$

只有(26.10)式在 $\boldsymbol{q} = 0$ 处有极小值，$|\boldsymbol{p}| = p_c$ 才是眞正的閾，为此須要求

$$\beta > 0.$$

既然 $|\boldsymbol{p}| = p_c$ 时，元激发能产生动量 $\boldsymbol{q}$ 充分小的声子，为寻求积分(26.6)的奇异性，只有格林函数之一，例如 $G(q)$ 的变量很小的范围才是重要的。当 $\omega$ 和 $\boldsymbol{q}$ 很小时，格林函数等于(24.19)式：

$$G(q) = \frac{a}{\omega^2 - \omega^2(\boldsymbol{q}) + i\delta} \tag{26.11}$$

它正比于声子的传播函数。(不能使用函数 $G$ 的(26.4)式，因为 $q$ 很小时两个极点几乎重合)。

在 $|\boldsymbol{p}| = p_c$, $\varepsilon = \varepsilon_c$ 点附近，格林函数具有奇异性。然而我們假定，相应于(26.9)式，$G^{-1}(p)$ 在零点附近(即 $G(p)$ 在极点附近)的形状是：

$$G^{-1}(p) = A^{-1}[\Delta\varepsilon - c\Delta p - \beta(\Delta p)^2 + i\delta] \tag{26.12}$$

$$(\Delta p = |\boldsymbol{p}| - p_c,\ \Delta\varepsilon = \omega - \varepsilon_c).$$

我們应当确定 $G^{-1}(p)$ 中含有奇异性的更高次項。

討論頂角部分 $\Gamma(p, p-q, q)$ 的性質。当 $\boldsymbol{q}$ 很小时这个頂点代表的过程是，动量为 $\boldsymbol{p}$ 的粒子发射出长波元激发或声子。这种頂点必須正比于所发射声子的动量值 $|\boldsymbol{q}|$，因为从宏观角度看，这个过程乃是元激发在密度振蕩(声波)上的散射。在声振动波长无穷大的极限情况下，相互作用应等于零，因为在均匀介質中元激发不被散射。因此我們在 $|\boldsymbol{q}|$ 很小的区域內采用 $\Gamma(p, p-q, q)$ 的如下表达式：

$$\Gamma(p, p-q, q) = g|\boldsymbol{q}|. \tag{26.13}$$

現在考虑方程式(26.6)右端的积分。根据 $\Gamma$ 和 $\Gamma^{(0)}$ 的定义，这个积分对 $\Gamma$ 的每級近似，都是由四粒子頂角函数連成的封閉环



所組成的鏈(图 83)。每个閉环都对格林函数的奇异性有貢献，然而旣已假定奇异項很小，每个閉环的貢献只須考虑一次。

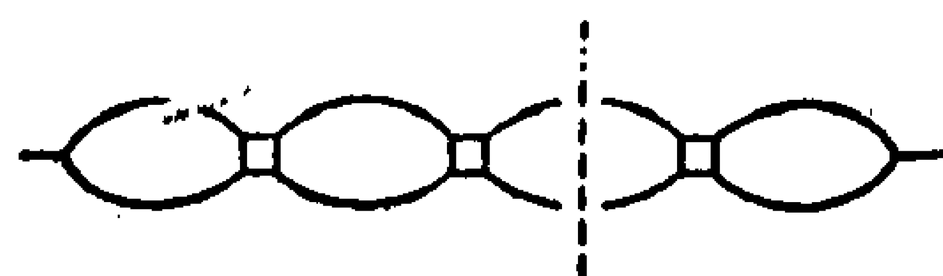


图 83

固定一个閉环，則其左右两側的图形可以独立求和，并且根据准确三端頂角函数 $\Gamma(p, p-q, q)$ 的定义，封环的两个頂点都成为三粒子函数 $\Gamma(p, p-q, q)$。因此，討論表达式

$$\int \Gamma^2(p, p-q, q)G(q)G(p-q)d^4q$$

的非正規部分，就可以求得对逆格林函数 $G^{-1}(p)$ 的小的奇异修正項。討論此式中 $\boldsymbol{q}$ 很小的区域，并将 $\Gamma(p, p-q, q)$, $G(q)$ 和 $G(p-q)$ 的值(26.11)——(26.13)代入。我們得到：

$$Aag^2\int\frac{|\boldsymbol{q}|^4 d|\boldsymbol{q}|d\Omega d\omega'}{(\omega'^2 - c^2q^2 + i\delta)(\omega' - \omega + \varepsilon(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) - i\delta)}.$$

可在区間 $(-\infty, +\infty)$ 对 $\omega'$ 积分，它归結为在 $\omega' = c|\boldsymbol{q}|$ 点取留数。以后省去对我們无关紧要的系数，将对 $\omega'$ 积分的結果写成：

$$\int\frac{|\boldsymbol{q}|^3 d|\boldsymbol{q}|d\cos\theta}{c|\boldsymbol{q}| + \varepsilon(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) - \omega}.$$

虽然积分在上限收斂，其奇异性决定于被积表达式在小 $|\boldsymbol{q}|$ 区的行为。利用(26.10)式将分母展开。对确定奇异性有重要意义的是小角 $\theta \ll 1$，因而在所要求的准确度下可令平方項中 $\cos\theta = 1$。結果我們有：

$$\int\frac{|\boldsymbol{q}|^3 d|\boldsymbol{q}|d\cos\theta}{x + c|\boldsymbol{q}|(1-\cos\theta) - 2\beta\Delta p|\boldsymbol{q}| + \beta|\boldsymbol{q}|^2} \propto$$

$$\propto \int|\boldsymbol{q}|^2\ln(x - 2\beta|\boldsymbol{q}|\Delta p + \beta|\boldsymbol{q}|^2)d|\boldsymbol{q}|.$$

这里引入了記号 $x = c\Delta p - \Delta\varepsilon + \beta(\Delta p)^2$。将对数下的表达式展成因子并积分，得到：

$$a_1\left(\frac{k_1}{2}\right)^3\ln k_1 + a_2\left(\frac{k_2}{2}\right)^3\ln k_2, \tag{26.14}$$

其中 $$k_{1,2}=\beta\Delta p\pm\sqrt{(\beta\Delta p)^2-\beta x}.$$

从(26.14)式看出，$G^{-1}(p)$ 的奇异性眞包含在比推导此式时所用各項次数更高的項中．这就証实了前面所作的、关于非正規項很小的假定．

在 $G(p)$ 的极点邻近，卽

$$|x|\ll\beta(\Delta p)^2,$$

决定最后几項．这时可忽略含 $k_2$ 的項．从(26.14)得出：

$$(\Delta p)^3\ln(-\Delta p). \tag{26.15}$$

根据(26.12)式和(26.15)式，格林函数在极点附近的形状是：

$$G(p)=\frac{A}{\omega-\varepsilon_c-c\Delta p-\beta(\Delta p)^2-a(\Delta p)^3\ln(-\Delta p)}.$$

这个函数决定闕附近元激发的能量．闕点之下无衰减：

$$\varepsilon(\boldsymbol{p})=\varepsilon_c+c(|\boldsymbol{p}|-p_c)+\beta(|\boldsymbol{p}|-p_c)^2+$$
$$+a(|\boldsymbol{p}|-p_c)^3\ln(p_c-|\boldsymbol{p}|).$$

闕点之上 $|\boldsymbol{p}|>p_c$，激发能量有負虛部，它等于 $-a\pi(\Delta p)^3$：

$$\varepsilon(\boldsymbol{p})=\varepsilon_c+c(|\boldsymbol{p}|-p_c)+\beta(|\boldsymbol{p}|-p_c)^2+$$
$$+a(|\boldsymbol{p}|-p_c)^3\ln|p_c-|\boldsymbol{p}||-a\pi i(|\boldsymbol{p}|-p_c)^3.$$

由此得出的結果之一，是 $a>0$．因此当 $|\boldsymbol{p}|>p_c$ 不存在不衰减的元激发：元激发寿命反比于 $(|\boldsymbol{p}|-p_c)^3$．闕附近衰减小是因为，由于 $\Gamma$ 中有因子 $|\boldsymbol{q}|$，与长波声子的相互作用总是弱的．

**4. 裂变成两个动量平行且不为零的元激发时，闕点附近譜的性质．** 从物理考虑知道，在(26.6)式中对 $\boldsymbol{q}$ 积分时，重要的是闕点附近产生的元激发所具有的动量 $\boldsymbol{q}$ 和频率 $\omega'$ 的值．然而对于正在产生的元激发，这些值并不是其格林函数的奇点．这种点的唯一特殊性在于，在它附近一个激发能和另一个激发"粘"在一起，这种过程在絶对零度下是不可能的，因为不存在眞正元激发．因此(26.6)式积分下的格林函数在极点附近具有簡单形状(見(26.4)式)：

$$G(q)=\frac{A}{\omega-\varepsilon(\boldsymbol{q})+i\delta},$$

其中 $\varepsilon(\boldsymbol{p})$ 是实数，而且在所討論的矢量 $\boldsymbol{q}$ 的值附近沒有奇异性．这就使問題易于研究了．

根据图 83 或方程式(26.7)，方程式(26.6)右端是鏈形图的总合．考虑鏈中的一环．出現于环的頂点的量是 $\Gamma(p_1p_2;p_3p_4)$ 或者 $\Gamma^{(0)}(p,p-q,q)$，显然不具有任何奇异性．它們在計算中只导致无关紧要的系数或格林函数的正規修正項，我們将略而不写．在所討論的环中分出对 $\boldsymbol{q}$ 的积分区間，其值接近元激发产生时所具有的动量 $\boldsymbol{p}_0$ 和能量 $\varepsilon_0$．代入格林函数的表达式(26.4)，对 $\omega'$ 积分，环中含有奇异性的那部分积分可表示成：

$$\int\frac{d\boldsymbol{q}}{\varepsilon(\boldsymbol{q})+\varepsilon(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})-\omega}.$$

由于在 $|\boldsymbol{p}|=p_c$ 处表达式 $\varepsilon(\boldsymbol{q})+\varepsilon(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})$ 应有极小值，当 $|\boldsymbol{p}|$ 接近 $p_c$ 时，它的形状是：

$$\varepsilon(\boldsymbol{q})+\varepsilon(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\simeq\varepsilon_c+v_c\Delta p+\alpha(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_0)^2+\frac{\beta(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_0,\boldsymbol{p}_c)^2}{p_c^2},$$

其中 $v_c$ 是每个产生于闕点的元激发的速度，$\boldsymbol{q}_0$ 是元激发之一的动量(注意，裂变后飞出的元激发，具有沿矢量 $\boldsymbol{p}_c$ 方向的动量)．在此展开式中的系数 $\alpha$ 和 $\beta$ 决定于函数 $\varepsilon(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})$ 和 $\varepsilon(\boldsymbol{q})$ 的形状：

$$\alpha=\frac{v_cp_c}{2q_0(p_c-q_0)},$$

$$\beta=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial q^2}\right)_{q=q_0}+\left(\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial q^2}\right)_{q=p_c-q_0}-\frac{v_cp_c}{q_0(p_c-q_0)}\right\}.$$

引入新变量 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_0$，$(\boldsymbol{u}\boldsymbol{p}_c)=up_c\cos\psi$，得到：

$$\int\frac{u^2du\,d\cos\psi}{v_c\Delta p-\Delta\varepsilon+\alpha u^2+\beta u^2\cos^2\psi}\infty\sqrt{v_c\Delta p-\Delta\varepsilon}.$$

环的求和不改变奇异点的性质，因为与声子情况不同，完全三粒子函数 $\Gamma(p,p-q,q)$ 对于我們所关心的值 $|\boldsymbol{q}|\sim q_0$，旣不应等于零，也不应趋向无穷大．因此，逆格林函数在 $p_c$ 和 $\varepsilon_c$ 附近的非正規部分是：

$$a\sqrt{v_c\Delta p-\Delta\varepsilon}.$$

既然根据假設，$|\boldsymbol{p}| = p_c$，$\varepsilon = \varepsilon_c$ 是譜內的点，則 $\Delta p = 0$ 和 $\Delta\varepsilon = 0$ 时，函数 $G^{-1}(p)$ 应等于零，于是对于小 $\Delta p$ 和 $\Delta\varepsilon$，$G^{-1}(p)$ 的正規部分是 $a_1\Delta p + b_1\Delta\varepsilon$。最終有

$$G^{-1}(p) = A^{-1}[a\Delta p + \Delta\varepsilon + b\sqrt{v_c\Delta p - \Delta\varepsilon}].$$

决定激发能量的方程是：

$$G^{-1}(p) = 0. \tag{26.16}$$

形式地解此方程，得到两个根：

$$\Delta\varepsilon_{1,2} = -a\Delta p - \frac{b^2}{2} \pm \sqrt{ab^2\Delta p + \frac{b^4}{4} + b^2 v_c \Delta p},$$

从中应取根号前为«+»号的 $\Delta\varepsilon_1$，以期 $\Delta p \to 0$ 时 $\Delta\varepsilon \to 0$。在閾点附近对小 $\Delta p$ 展开根号下的表达式，得：

$$\varepsilon \simeq \varepsilon_c + v_c(|\boldsymbol{p}| - p_c) - \left(\frac{a + v_c}{b}\right)^2 (\Delta p)^2.$$

将此式代入(26.16)式就看出，方程 (26.16) 对小的和負的 $\Delta p$ (閾前)有解的必要条件是：

$$\frac{a + v_c}{b} > 0.$$

当 $|\boldsymbol{p}| > p_c$，$a\Delta p + \Delta\varepsilon$ 和 $b\sqrt{v_c\Delta p - \Delta\varepsilon}$ 两項都是正的，方程根本无解——不論实数解或复数解。因此在这种情况下能譜曲綫不能延伸过閾点，它在此以斜率 $v_c$ 結束。

**5. 两个激发以一定角度飞出的裂变。** 这种情况下，积分时重要的 $|\boldsymbol{q}|$ 值的范围，也是閾点附近产生的元激发所具有的动量值。基于和前面一样的原因，格林函数在此区間有普通的形状(26.4)。然而現在已不能断定，頂点 $\Gamma$ 在 $\varepsilon = \varepsilon_c$ 时是否有限。

先考虑图 83 中的一环。根据定义，环頂点的各量不包含危险的积分。因此很自然地假定，这些量在閾点仍是有限的。和平常一样討論 $\omega'$ 和 $\boldsymbol{q}$ 的积分区間，其值接近閾点产生的元激发所具有的值。这种环的奇异性归結为如下积分的奇异性：

$$\int \frac{d\boldsymbol{q}}{\varepsilon(\boldsymbol{q}) + \varepsilon(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}) - \omega},$$



其中 $\varepsilon(\boldsymbol{q})$ 和 $\varepsilon(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q})$ 可用 $\varepsilon(\boldsymbol{q})$ 在譜的旋子部分展开式 (26.2) (注意情况 $b$ 相当于裂变成两个动量为 $p_0$ 的旋子，彼此間有大于零的角 $\theta_0$，$\cos\frac{\theta_0}{2} = \frac{p_c}{2p_0}$)。以(26.2)式代入后，上式变为：

$$\int \frac{d\boldsymbol{q}}{2\Delta - \omega + \frac{(|\boldsymbol{q}| - p_0)^2}{2m^*} + \frac{(|\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}| - p_0)^2}{2m^*}}. \tag{26.17}$$

按以下公式变換到柱坐标 $q_z'$, $q_\rho'$, $\varphi$ ($z$ 軸沿矢量 $\boldsymbol{p}$ 的方向)：

$$q_z = p_0 \cos\frac{\theta_0}{2} + q_z', \quad q_x = \left(p_0 \sin\frac{\theta_0}{2} + q_\rho'\right)\cos\varphi,$$

$$q_y = \left(p_0 \sin\frac{\theta_0}{2} + q_\rho'\right)\sin\varphi. \tag{26.18}$$

将(26.18)式代入(26.17)式并省略 $q_z'$, $q_\rho'$ 的高次項，得到：

$$\int \frac{dq_\rho' dq_z'}{2\Delta - \omega + \frac{1}{m^*}\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2} q_\rho'^2 + \cos^2\frac{\theta_0}{2} q_z'^2\right)}.$$

在此式中宜引入极坐标 $r$ 和 $\psi$：

$$\frac{1}{\sqrt{m^*}} q_\rho' \sin\frac{\theta_0}{2} = r\cos\psi, \quad \frac{1}{\sqrt{m^*}} q_z' \cos\frac{\theta_0}{2} = r\sin\psi.$$

結果求得：

$$\int \frac{r\,dr}{2\Delta - \omega + r^2} \propto \ln(2\Delta - \omega).$$

因此，每个环导致一个大項 $\ln(2\Delta - \omega)$，它只与外端頻率 $\omega$ 有关。固定某一个环；根据图 82(a) 和方程式(26.7)，其左右两側的环的总合是准确的三粒子頂点 $\Gamma$。可見方程式 (26.6) 右端在 $2\Delta - \omega$ 很小时的主要項为：

$$\Gamma^2(p, p - q_0, q_0)\ln(2\Delta - \omega), \tag{26.19}$$

其中 $\boldsymbol{q}_0$ 是矢量 $\boldsymbol{q}$ 的临界值，即閾点裂变所生旋子的动量。

$\boldsymbol{q} \sim \tilde{q}_0$ 附近的 $\Gamma(p, p - q, q)$，可从解方程 (26.7) 而得。然而更簡单的作法是直接求和方程式的对应的級数的主要項，注意前面提到的情况，即每个环的主要項只与外端頻率 $\omega$ 有关，因而它

对所有的环都是相同的. 形式上这是一个几何級数,其和为

$$\Gamma(p, p-q_0, q_0) \infty \frac{P}{1+Q\ln\left(\frac{2\Delta-\omega}{2\Delta}\right)}.$$

以此式代替(26.19)式的頂角 $\Gamma(p, p-q_0, q_0)$, 我們就看出, 根据方程式(26.6),函数 $G^{-1}(p)$ 在閾点附近的基本非正規項乃是

$$\frac{a}{\ln\left(\frac{2\Delta-\omega}{a}\right)}.$$

考虑到假定 $G^{-1}(p_c)=0$, 最終有:

$$G^{-1}(p) = A^{-1}\left[|\boldsymbol{p}| - p_c - \frac{a}{\ln\left(\frac{2\Delta-\omega}{a}\right)}\right]. \quad (26.20)$$

这时方程

$$G^{-1}(p) = 0$$

給出 $|\boldsymbol{p}| < p_0$ 时能譜曲綫的如下表达式:

$$\varepsilon(\boldsymbol{p}) = 2\Delta - ae^{-\frac{a}{p_c-|p|}}$$

($\varepsilon(\boldsymbol{p})-2\Delta$ 是指数式小量,使我們得以在(26.20)式中展开 $G^{-1}(p)$ 的正規部分时忽略 $\Delta\varepsilon$ 的冪). 由此可見,在这种情况下曲綫 $\varepsilon(\boldsymbol{p})$ 也結束于 $|\boldsymbol{p}|=p_c$ 点,并在此点具有无限阶水平切綫.

应指出, 在全部以上討論的情况中, 格林函数在 $\omega=\varepsilon_c$, $|\boldsymbol{p}|=p_c$ 处有一支点.

再強調一次, 以上的分析既未基于粒子間相互作用的具体形式, 也未要求相互作用弱. 我們只利用了图解法所决定的准确量之間的普遍基本关系[1].

## § 27. $T>0$ 时場論方法应用于有相互作用的玻色粒子系統

最后我們在本节中討論推广上述方法到 $T>0$ 时有相互作用

1) 最近实驗数据[50, 51]表明,看来实际 $He^4$ 中实現的是裂变成两个旋子.



的玻色粒子系統的可能性. 自然应試图以一般方法为基础来作这种推广. 为此目的我們立即轉到系統的热力学描述, 以化学势 $\mu$ 作独立变量, 来代替系統中的总粒子数 $N$. 我們已經在前面指出过,对于理想玻色气体当温度低于玻色凝聚点时,这种描述是不可能的,因为在这个温度范围里,从系統平均粒子数不变条件所确定的气体化学势,恆等于零.

大家知道,理想气体玻色粒子按动量为 $\boldsymbol{p}$ 的状态的分布为:

$$n_p = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_0(p)-\mu}{T}}-1}.$$

这个分布只对負 $\mu$ 有意义. 温度足够高时 $\mu<0$; 化学势成为零的点正好决定玻色凝聚温度. 温度更低时必須令 $\mu$ 恆等于零. 系統內平均粒子数不变条件,由于粒子"凝聚"到基态上而継續成立. 我們已不只一次指出,凝聚体粒子数和系統內总粒子数相近,即正比于系統体积.

在热力学方法中形式上运用无相互作用粒子的格林函数, 其傅立叶分量为

$$\mathfrak{G}^{(0)}(p) = \frac{1}{i\omega-\varepsilon_0(\boldsymbol{p})+\mu}.$$

在系統的玻色凝聚温度,其特征为,在函数

$$\frac{1}{\mu-\varepsilon_0(\boldsymbol{p})}$$

中, 首先出现动量值 $\boldsymbol{p}=0$ 的极点. 如果試图将这个式子延拓到 $\mu>0$ 的区域,就会出現在任意的 $\boldsymbol{p}$ 值下变号并趋向无穷大的量. 同时如 $\mu<0$, 則从前面所述可知,无相互作用的粒子系統处于玻色凝聚温度之上.

实际上这些困难是虛拟的. 这种情况之所以出現, 是因为对于相互作用玻色粒子气体, 微扰論不适用于玻色凝聚点之下的温度范围. 例如, 我們在 § 25 中已看到, 动量很小时微扰論个别項导致发散表达式. 为求得物理結果, 曾須对微扰論主要項序列求和. 在所有类似的情形下, 理論中諸量間的一般方程式和关系式

有更广泛的意义，超出了微扰論的应用范围. 格林函数之类的准确量，在考虑了相互作用之后，低于玻色凝聚点时仍具有合理的性質.

至于化学势，则决定它的条件是，系統中的平均粒子数应等于給定值. 粒子間有相互作用存在时，$\mu$ 在任何地方都不恆等于零，因而一开始就可取其为独立变量，然后从上述粒子数不变的条件，确定其对本系統的值. 低于凝聚点时，相互作用玻色粒子的化学势的符号，不能从一般性考虑确定[1].

我們已經在 § 23 中看到，$T=0$ 的微扰論表述中出現准确的凝聚体粒子数；理論由之出发的理想气体凝聚体粒子数却不在任何地方遇見. 我們即将看到，温度大于零时情形仍如此. 这一点十分重要. 它使我們得以确切断定，应如何理解相互作用粒子系統的玻色凝聚温度. 完全清楚，可称之为 $\lambda$ 轉变点的温度不必与理想气体玻色凝聚温度一致. 凝聚体粒子数密度成为零，才是 $\lambda$ 轉变温度的物理定义. 从一般考虑无法預言，有相互作用存在时轉变温度将向那一方向移动. 因此原则上既可能有这样的情况，即物理凝聚体存在于高于理想气体凝聚点的温度下，也可能存在相反的情况，即在較低的温度下引入相互作用，反而使原来能存在于理想波色气体中的凝聚体消失.

在这里要着重指出，§ 23 所述图解法中，实質上并未应用理想气体中动量为零的粒子数等于无穷大的这一事实. 那里叙述的微扰論的特点是，既然动量为零的粒子起着特殊作用，我們在推导中就力图准确地考虑算符 $\xi_0$ 和 $\xi_0^+$. 換言之，对于这些粒子我們未作通常的統計假定，即它們的貢献比較小. 至于其它粒子，则我們以平常方式作了討論.

温度大于零时还可能以上述方式处理. 我們从格林函数的如

---

1) 在 § 25 所討論的模型根据 (25.19) $\mu$ 是正的 ($f>0$; $f<0$ 相当粒子間相吸，在此近似下这种系統是不稳定的). 实际的氦在温度低于 $\lambda$ 点时 $\mu<0$，否则氦在低温下不能与自己的蒸汽保持平稳. 大家知道，两个相平衡时化学势相等. 氦蒸汽是稀薄玻尔茲曼气体，其化学势取負值.



下表示式出发:

$$\frac{\langle T(\psi_1', \psi_2', \cdots, \psi_1^+, \cdots, \mathfrak{S})\rangle}{\langle \mathfrak{S}\rangle},$$

去建立微扰論. 这个表示式中求平均符号 $\langle\cdots\rangle$ 代表，对不相互作用粒子哈密頓量 $H_0 - \mu N$ 的状态取迹:

$$\langle\cdots\rangle = \frac{\mathrm{Sp}\left(e^{\frac{\mu N - H_0}{T}}\cdots\right)}{\mathrm{Sp}\, e^{\frac{\mu N - H_0}{T}}}. \qquad (27.1)$$

既然使用变量 $\mu$ 时总粒子数不守恆，(27.1) 式中进行的热力学平均对所有的粒子，包括动量为零的粒子，是彼此无关的. 因此完全和在 § 23 中一样，运算 $T$ 和 $\langle\cdots\rangle$ 分别可以表示成两个相継的运算 $T = T^0 T'$, $\langle\cdots\rangle = \langle\langle\cdots\rangle'\rangle^0$，相应地对于动量为零的粒子和其它粒子进行. 这种分解的意义仍是同从前一样：处于动量为零状态中的粒子起着特殊作用，因而我們将作准确討論. 在絕对零度的論述中，将运算 $T$ 和 $\langle\cdots\rangle$ 分解为二的可能性，起重要作用.

由几乎逐字重复导致 (23.14) 式的論据，我們发现，在松原方法中为了計算任何凝聚体外粒子的格林函数，必須知道处于动量为零的状态中的全部"准确" $n$-粒子格林函数. 和 (23.14) 一样，决定凝聚体粒子格林函数的关系是:

$$\mathfrak{G}_{0n}(\tau_1\cdots\tau_n;\ \tau_1'\cdots\tau_n') = \frac{\langle T(\xi_0(\tau_1)\cdots\xi_0(\tau_n);\ \xi_0^+(\tau_1')\cdots\xi_0^+(\tau_n')\mathfrak{S})\rangle}{\langle\mathfrak{S}\rangle},$$

其中 $\tau$ 是 $T \neq 0$ 的方法中的"时間"参量. 此式可写成与(23.16)相似的形式，即通过"海森堡算符"表达:

$$\mathfrak{G}_{0n}(\tau_1\cdots\tau_n;\ \tau_1'\cdots\tau_n') = \frac{\mathrm{Sp}\left\{e^{\frac{\mu N - H}{T}} T(\tilde{\xi}_0(\tau_1)\cdots\tilde{\xi}_0(\tau_n);\ \tilde{\xi}_0^+(\tau_1')\cdots\tilde{\xi}_0^+(\tau_n'))\right\}}{\mathrm{Sp}\left\{e^{\frac{\mu N - H}{T}}\right\}}, \qquad (27.2)$$

其中"海森堡算符" $\tilde{\xi}_0(\tau)$ 和 $\tilde{\xi}_0^+(\tau)$ 满足方程式:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\tilde{\xi}_0(\tau) = [H - \mu N, \tilde{\xi}_0(\tau)],$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\tilde{\xi}_0^+(\tau) = [H - \mu N, \tilde{\xi}_0^+(\tau)]$$

并和普通的薛定格算符有如下关系：

$$\tilde{\xi}_0(\tau) = e^{(H-\mu N)\tau}\xi_0 e^{-(H-\mu N)\tau},$$
$$\tilde{\xi}_0^+(\tau) = e^{(H-\mu N)\tau}\xi_0^+ e^{-(H-\mu N)\tau}.$$

因此，格林函数 $\mathfrak{G}$ 乃是算符 $\tilde{\xi}_0$ 和 $\tilde{\xi}_0^+$ 編时乘积的吉布斯平均值。

我們在此提醒一下：量子統計中物理量的求平均可用两种等价方式完成。一方面，它可以看成对系統所处的实际状态的量子力学平均。这个状态由一定的能量和粒子数描述。另一方面可借助吉布斯分布求平均，这时系統視为不封閉的，这一点使它在給定温度下能以一定几率处于具有不同能量和不同粒子数的諸状态中。两种平均方法等效性的基础，是吉布斯分布在能量和粒子数的平均值附近具有极窄的极大值，因此，例如能量的相对漲落为 $\sqrt{(E-\bar{E})^2}/\bar{E} \sim 1/\sqrt{N}$，它在系統的尺寸无穷大时趋向零。封閉系統作量子力学平均时的能量和粒子数值，显然和吉布斯分布的相应平均值一致。从热力学观点看，两种平均方法的差别仅仅在于，第一种情况下物理量的平均值通过能量（作为热力学参量）表达，而第二种情况下通过与温度的关系表达。統計中引入化学势时，意义也是如此。考虑到这些，我們可将(27.2)式視为对系統的量子力学状态的平均值：

$$\mathfrak{G}_{0n}(\tau_1\cdots\tau_n; \tau_1'\cdots\tau_n') = \\ = \langle\Phi^*|T(\tilde{\xi}_0(\tau_1)\cdots\tilde{\xi}_0(\tau_n); \tilde{\xi}_0^+(\tau_1')\cdots\tilde{\xi}_0^+(\tau_n'))|\Phi\rangle. \tag{27.3}$$

因此，根据(27.2)式，任何凝聚体外粒子格林函数的微扰論級数，都含有处于动量为零的状态的粒子的准确格林函数，而后者在写成(27.3)式的形状后，只取决于算符 $\tilde{\xi}_0$ 和 $\tilde{\xi}_0^+$ 相对于有相互作用的粒子状态 $\Phi$ 的性质。因而如果在此状态中存在着凝聚体，則算符 $\tilde{\xi}_0$ 和 $\tilde{\xi}_0^+$ 可看成数字，相应地所有如(27.2)的格林函数都应换



成因子 $\sqrt{n_0(T)}$ 的乘积：

$$\mathfrak{G}_{0m}(\tau_1\cdots\tau_m; \tau_1'\cdots\tau_m') = [n_0(T)]^m. \tag{27.4}$$

最后一式正确性的检驗，完全与 § 23 中推导絕对温度为零度的类似公式相同。

(27.4)式中 $n_0(T)$ 乃是給定温度下的粒子数密度。决定轉变温度 $T_\lambda$ 的条件是 $n_0(T_\lambda) = 0$。我們已經說过，这个温度既可能高于、也可能低于理想气体的"玻色凝聚"温度 $T_0$。在后一种情况下，当 $T_0 > T > T_\lambda$，微扰論展开完全具有平常的形式，虽然在相互作用表象中存在着凝聚体，而且算符 $\xi_0$ 和 $\xi_0^+$ 很大。再強調一次，这是由于微扰論展开包含着凝聚体粒子的准确格林函数。

# 第六章　吸收介質中的电磁輻射

## § 28. 吸收介質中輻射的格林函数

在統計物理学所涉及的現象中，电磁場起着基本作用．所有凝聚介質——固体和液体粒子間的作用力，实际上具有电磁本質．这些力的特点是短程作用；它們約在原子間距离上衰减，并基本上决定粒子間的結合力．

在本章里我們不涉及短程力，而只限于討論和波长远超过原子間距离的电磁輻射有关的問題．这里既包括电磁輻射穿过物质时的現象，也包括和长程电磁力（所謂范德瓦尔斯力）有关的各种效应．

大家知道，长波电磁輻射和物質的相互作用可以純宏观地描述，方法是引入和輻射頻率 $\omega$ 有关的复数介电常数 $\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega)$[1]（見[52]）．在本节中我們将求得吸收介質电磁輻射的格林函数，它通过介質的介电常数表示．

量子力学中通常以矢量势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ 和标量势 $\varphi(\boldsymbol{r})$ 这些薛定格算符描述电磁場．我們将采用这些算符的"四維"記号 $A_\alpha = (\boldsymbol{A}, \varphi)$；$\alpha = 1, 2, 3, 0$[2]．和薛定格表象中的算符平行，我們还采用海森堡算符 $A_\alpha(\boldsymbol{r}, t)$，其定义和平常一样：

$$A_\alpha(\boldsymbol{r}, t) = e^{it\hat{H}} A_\alpha(\boldsymbol{r}) e^{-it\hat{H}}. \tag{28.1}$$

算符 $A_\alpha(\boldsymbol{r}, t)$ 和电場与磁場强度算符 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ 与 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t)$ 以熟知的关系式相联系：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) - \operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{r}, t),$$
$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t). \tag{28.2}$$

电磁場的矢量势（以及二次量子化表象中代表它的算符）的定义是非单值的．总是存在着与所謂理論的規范不变性有关的任意性，后者表現为可对 $A_\alpha(\boldsymbol{r}, t)$ 作变换：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) \to \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) + \operatorname{grad}\chi(\boldsymbol{r}, t),$$
$$\varphi(\boldsymbol{r}, t) \to \varphi(\boldsymbol{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t}\chi(\boldsymbol{r}, t),$$

其中 $\chi$ 是任意算符．不难驗証，在这种通常称之为規范变换的作用下，具有直接物理意义的量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 是不改变的．

电磁場的波长很长的表現是，对于电場和磁場的平均值[1] $\langle\boldsymbol{E}\rangle$，$\langle\boldsymbol{H}\rangle$，存在着封閉的方程組——馬克士韦方程：

$$\operatorname{rot}\langle\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t)\rangle = \frac{\partial}{\partial t}(\hat{\varepsilon}\langle\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)\rangle),$$
$$\operatorname{rot}\langle\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)\rangle = -\frac{\partial}{\partial t}\langle\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t)\rangle. \tag{28.3}$$

方程式（28.3）中的介电常数 $\hat{\varepsilon}$ 只和介質性質有关，在吸收介質中它是算符，按以下規則作用于时間的函数：

$$\hat{\varepsilon}\langle\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)\rangle = \langle\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)\rangle + \int_{-\infty}^{t} f(\boldsymbol{r}, t-t')\langle\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t')\rangle dt'. \tag{28.4}$$

在傅立叶表象中算符 $\hat{\varepsilon}$ 的作用归結为在 $\langle\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, \omega)\rangle$ 上乘以介質的介电常数 $\varepsilon(\omega)$：

$$\varepsilon(\boldsymbol{r}, \omega) = 1 + \int_0^\infty e^{i\omega t} f(\boldsymbol{r}, t)\, dt, \tag{28.5}$$

而方程組（28.3）成为：

$$\operatorname{rot}\langle\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, \omega)\rangle = -i\omega\varepsilon(\boldsymbol{r}, \omega)\langle\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, \omega)\rangle,$$
$$\operatorname{rot}\langle\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, \omega)\rangle = i\omega\langle\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, \omega)\rangle. \tag{28.6}$$

---

1) 我們认为磁导率 $\mu(\omega)$ 等于一，因为它只在很窄的頻率范圍内才和一有相当差别，而这些頻率通常对我們不重要．

2) 本章里以希腊字母記四維矢量势的分量．有时用拉丁足标 $i, k\cdots$ 記其空間分量．对所有重复兩次的拉丁和希腊足标求和．

1) 这里的平均是統計平均：

$$\langle\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)\rangle = \operatorname{Sp}\left\{e^{\frac{F-\hat{H}}{T}}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)\right\}.$$

可以証明(参閱兰道和 Лифшиц[52]), (28.5) 式所定义的 $\varepsilon(\omega)$ 在复变量 $\omega$ 的上半平面是解析函数,并在此半平面內无零点.

温度大于零时电磁輻射的性質由温度格林函数[1] $\mathfrak{D}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_1, \tau_1; \boldsymbol{r}_2, \tau_2)$ 决定:

$$\mathfrak{D}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2; \tau_1-\tau_2) = \\ = \begin{cases} -\mathrm{Sp}\{e^{(F-\hat{H})/T}e^{\hat{H}(\tau_1-\tau_2)}A_\alpha(\boldsymbol{r}_1)e^{-\hat{H}(\tau_1-\tau_2)}A_\beta(\boldsymbol{r}_2)\} \\ \qquad\qquad 当 \quad \tau_1>\tau_2, \\ -\mathrm{Sp}\{e^{(F-\hat{H})/T}e^{-\hat{H}(\tau_1-\tau_2)}A_\beta(\boldsymbol{r}_2)e^{\hat{H}(\tau_1-\tau_2)}A_\alpha(\boldsymbol{r}_1)\} \\ \qquad\qquad 当 \quad \tau_1<\tau_2. \end{cases} \tag{28.7}$$

为了将 $\mathfrak{D}_{\alpha\beta}$ 通过介質的介电常数 $\varepsilon(\omega)$ 表示,我們利用第三章中确定的温度格林函数和推迟函数的关系, 后者在我們的情形下定义为:

$$D^R_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2; t_1-t_2) = \\ = \begin{cases} -i\,\mathrm{Sp}\{e^{(F-\hat{H})/T}[A_\alpha(\boldsymbol{r}_1, t_1)A_\beta(\boldsymbol{r}_2, t_2) - \\ \quad - A_\beta(\boldsymbol{r}_2, t_2)A_\alpha(\boldsymbol{r}_1, t_1)]\} \quad 当 \quad t_1>t_2, \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 当 \quad t_1<t_2. \end{cases} \tag{28.8}$$

由于我們以后要把所得結果运用于不均匀物体, 这里就不再認为 $\mathfrak{D}$ 和 $D^R$ 是空間坐标差的函数. 与此相应,我們認为物体各处介电常数不同: $\varepsilon = \varepsilon(\boldsymbol{r}, \omega)$.

重复 § 17 的全部計算, 只是不对空間坐标过渡到傅立叶分量. 这时容易得出 $\mathfrak{D}$ 和 $D^R$ 的 Lehmann 型展开如下:

$$\mathfrak{D}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2; \omega_n) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2; x)}{x - i\omega_n}dx, \tag{28.9}$$

$$D^R_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2; \omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2; x)}{x - \omega - i\delta}dx, \tag{28.10}$$

其中

$$\rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2; \omega) = \\ = -(2\pi)^3\sum_{n,m} e^{\frac{F-E_n}{T}}(A_\alpha(\boldsymbol{r}_1))_{nm}(A_\beta(\boldsymbol{r}_2))_{mn}(1-e^{-\omega_{mn}/T})\delta(\omega-\omega_{mn}).$$

1) (28.7)式中以自由能 $F$ 代替了热力学势 $\Omega$ (比較(11.1),(11.2)式). 这种变换之所以可能,是因为电磁場的化学势恒等于零.



从 (28.10) 得出, $D^R(\omega)$ 是在 $\omega$ 上半平面的解析函数. 比較(28.10)式和(28.9)式,我們看出当 $\omega_n > 0$ 时

$$\mathfrak{D}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2; \omega_n) = D^R_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2; i\omega_n). \tag{28.11}$$

为求得 $\omega_n < 0$ 时的 $\mathfrak{D}$, 須注意 $\mathfrak{D}(\tau)$ 是 $\tau$ 的偶函数,这是因为电磁場算符是实数 ($A^+_\alpha = A_\alpha$)(見 § 11). 因此它的傅立叶分量 $\mathfrak{D}(\omega_n)$ 是 $\omega_n$ 的偶函数,由此得出对一切 $\omega_n$ 成立的关系式[1]:

$$\mathfrak{D}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2; \omega_n) = D^R_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2; i|\omega_n|). \tag{28.12}$$

現在計算推迟函数. 这时矢量势的规范問題有重要意义. 张量 $D^R_{\alpha\beta}$ 有十个独立分量(和任何二阶对称张量一样). 然而还存在着与規范不变性有关的相当大的任意性. 实际上具有物理意义的不是由矢量势分量构成的 $D^R_{\alpha\beta}$, 而只是由算符 $E_i(\boldsymbol{r}, t)$, 按照由 $A_\alpha(\boldsymbol{r}, t)$ 构成 $D^R_{\alpha\beta}$ 的同样規則(見(28.8)式),所构成的六个量. 因此十个量 $D^R_{\alpha\beta}$ 只加上了六个物理条件,即我們还有四个任意函数. 利用这个任意性, 可令分量 $D^R_{00}$, $D^R_{i0}$ 等于零. 这显然相当取标量势为零的規范. 这时算符 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 的关系是:

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}, \quad \boldsymbol{H} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}. \tag{28.2'}$$

为了将 $D^R_{\alpha\beta}$ 通过 $\varepsilon(\omega)$ 表示,我們作如下討論. 設想由物体和平衡电磁輻射构成的系統, 处于外界电流 $\boldsymbol{j}^{\text{ст}}(\boldsymbol{r}, t)$ 所造成的外場中. 平均場的馬克士韦方程这时成为:

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\langle\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, \omega)\rangle &= 4\pi\boldsymbol{j}^{\text{ст}}(\boldsymbol{r}, \omega) - i\omega\varepsilon(\boldsymbol{r}, \omega)\langle\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, \omega)\rangle, \\ \mathrm{rot}\langle\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, \omega)\rangle &= i\omega\langle\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, \omega)\rangle. \end{aligned} \tag{28.6'}$$

規范(28.2′)下的平均势 $\langle\boldsymbol{A}^{\text{ст}}(\boldsymbol{r}, t)\rangle$ 滿足方程式:

$$[\varepsilon(\boldsymbol{r}, \omega)\omega^2\delta_{il} - \mathrm{rot}_{im}\mathrm{rot}_{ml}]\langle A_l(\boldsymbol{r}, \omega)\rangle = -4\pi j^{\text{ст}}_i(\boldsymbol{r}, \omega). \tag{28.13}$$

方程式(28.13)的解是:

$$\langle A^{\text{ст}}_i(\boldsymbol{r}, \omega)\rangle = -\int\overline{D}_{il}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'; \omega)j^{\text{ст}}_l(\boldsymbol{r}', \omega)d\boldsymbol{r}', \tag{28.14}$$

1) 注意和任何玻色粒子的格林函数一样, $\mathfrak{D}(\omega_n)$ 只对"偶"頻率 $\omega_n = 2n\pi T$ 才有不为零的分量.

其中 $\bar{D}$ 是方程式(28.13)的所謂格林函数. 它是方程式

$$[\varepsilon(\boldsymbol{r}, \omega)\omega^2\delta_{il} - \mathrm{rot}_{im}\mathrm{rot}_{ml}]\bar{D}_{lk}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'; \omega) = 4\pi\delta_{ik}\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \tag{28.15}$$

的解. 由于 $\varepsilon(\omega)$ 在上半平面解析, $\bar{D}$ 也是在上半平面解析的函数.

另一方面, 有外界电流存在时的 $\langle \boldsymbol{A}^{\text{ст}}\rangle$, 可以直接从定义(28.1)算得. 这时系統的哈密頓量为 $\hat{H} + \hat{H}^{\text{ст}}$, 其中 $\hat{H}$ 是物体和輻射的哈密頓量,而

$$\hat{H}^{\text{ст}} = -\int \boldsymbol{j}^{\text{ст}}(\boldsymbol{r}, t)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}.$$

有外場存在时的算符以角标 «ст» 示之, 就有 (无外場的算符仍用原来无此角标的記号):

$$\boldsymbol{A}^{\text{ст}}(\boldsymbol{r}, t) = e^{it(\hat{H}+\hat{H}^{\text{ст}})}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})e^{-it(\hat{H}+\hat{H}^{\text{ст}})}.$$

然后如第二章所作, 将 $e^{-it(\hat{H}+\hat{H}^{\text{ст}})}$ 表示成

$$e^{-it(\hat{H}+\hat{H}^{\text{ст}})} = e^{-it\hat{H}}S_{\text{ст}}(t).$$

如果外界电流滿足条件 $\boldsymbol{j}^{\text{ст}}(t \to -\infty) \to 0$, 則 $S_{\text{ст}}(t)$ 为 (比較第二章):

$$S_{\text{ст}}(t) = T_t \exp\left\{-i\int_{-\infty}^{t} \hat{H}^{\text{ст}}(t')dt'\right\}.$$

这时矢量势算符在有外电流存在时的平均值是:

$$\langle \boldsymbol{A}^{\text{ст}}(\boldsymbol{r}, t)\rangle = \langle S_{\text{ст}}^{-1}(t)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)S_{\text{ст}}(t)\rangle.$$

将 $S_{\text{ст}}$ 按 $\hat{H}^{\text{ст}}$ 展成級数,只保留 $\boldsymbol{j}^{\text{ст}}$ 的一級項,得到:

$$\langle A_i^{\text{ст}}(\boldsymbol{r}, t)\rangle = -i\int_{-\infty}^{t} dt' \int d\boldsymbol{r}' j_k^{\text{ст}}(\boldsymbol{r}', t')\langle\{A_k(\boldsymbol{r}', t')A_i(\boldsymbol{r}, t) - A_i(\boldsymbol{r}, t)A_k(\boldsymbol{r}', t')\}\rangle. \tag{28.16}$$

这个量可通过前面引入的电磁場推迟函数 $D_{ik}^R$ 表达. 根据定义(28.8)有:

$$\langle A_i^{\text{ст}}(\boldsymbol{r}, t)\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d\boldsymbol{r}' D_{ik}^R(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'; t - t') j_k^{\text{ст}}(\boldsymbol{r}', t').$$

在此式中对时間变换到傅立叶分量,最后得:



$$\langle A_i^{\text{ст}}(\boldsymbol{r}, \omega)\rangle = -\int d\boldsymbol{r}' D_{ik}^R(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'; \omega) j_k^{\text{ст}}(\boldsymbol{r}', \omega). \tag{28.17}$$

比較(28.14)式和(28.17)式, 我們看出由于 $\boldsymbol{j}^{\text{ст}}$ 是任意的, $D_{ik}^R$ 和以前引入的方程式 (28.13) 的格林函数 $\bar{D}_{ik}$ 相等. 这样我們就作出結論: $D_{ik}^R$ 也滿足方程式(28.15) (Дзялошинский 和 Питаевский[53]). 函数 $D_{ik}^R$ 的解析性質自然和 $\varepsilon(\omega)$的解析性質完全一致.

如果在(28.15)式中将 $\omega$ 換成 $i|\omega_n|$, 就得到 $\mathfrak{D}_{ik}(\omega_n)$的方程式:

$$[\varepsilon(\boldsymbol{r}, i|\omega_n|)\omega_n^2\delta_{il} + \mathrm{rot}_{im}\mathrm{rot}_{ml}]\mathfrak{D}_{lk}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'; \omega_n) = -4\pi\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\delta_{ik}. \tag{28.18}$$

此式中虛頻率的介电常数和实頻率下介电常数 $\varepsilon(\omega)$ 的虛部 $\varepsilon''(\omega)$ 有簡单关系(例如見[52], §58):

$$\varepsilon(i|\omega_n|) = 1 + \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\omega\varepsilon''(\omega)}{\omega^2 + \omega_n^2} d\omega. \tag{28.19}$$

既然总有 $\varepsilon'' > 0$, 則从(28.19)式看出, $\varepsilon(i|\omega_n|)$ 是单調下降正实函数.

解方程式(28.14)或(28.18),就将电磁場格林函数通过介电常数的虛部表示出来. 一般說来, 对于不均匀介質这是頗为复杂的問題. 以后几节里我們将討論分层介質的特殊情况, 在分层介質里,这个問題可解到底.

先看均匀介質的情形, 这时 $\varepsilon$ 和坐标无关. 既然 $D^R$, $\mathfrak{D}$ 現在只是坐标差 $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$ 的函数,則在(28.15)式中作傅立叶变換后得:

$$[(\omega^2\varepsilon(\omega) - k^2)\delta_{il} + k_i k_l]D_{lk}^R(\boldsymbol{k}, \omega) = 4\pi\delta_{ik}. \tag{28.20}$$

这个方程决定在标量势为零的規范下的 $D^R$. 为求得任意規范的 $D^R$, 我們利用 (28.20) 式計算函数 $D_{ik}^E = \omega^2 D_{ik}^R$, 其中 $D_{ik}^R$ 是規范 $\varphi = 0$ 时的推迟函数. 这样确定的量已是規范不变的, 因为它和由电場强度算符分量构成的推迟函数,只差一个常数項 $4\pi\delta_{ik}$. 函数 $D_{ik}^E$ 滿足方程式:

$$[(\omega^2\varepsilon(\omega) - k^2)\delta_{il} + k_i k_l]D_{lk}^E(\boldsymbol{k}, \omega) = 4\pi\omega^2\delta_{ik} \tag{28.21}$$

并和任意規范下的函数 $D_{\alpha\beta}^R$ 有如下明显的关系(比較(28.2)式):

$$D_{ik}^E = \omega^2 D_{ik}^R - \omega k_i D_{0k}^R - \omega k_k D_{i0}^R + k_i k_k D_{00}^R \tag{28.22}$$

(此后以 $D_{00}^R$, $D_{i0}^R$, $D_{ik}^R$ 記任意規范中 $D_{\alpha\beta}^R$ 的时間分量、混合分量和空間分量). 从对称考虑知，矢量 $D_{i0}^R$ 应沿 $\boldsymbol{k}$ 的方向，因为它是(28.21)和(28.22)式中的唯一矢量：

$$D_{i0}^R = D_{0i}^R = dk_i; \tag{28.23}$$

基于同样的原因：

$$D_{ik}^R = a\delta_{ik} + bk_ik_k. \tag{28.24}$$

将 (28.22)—(28.24) 式代入(28.21)式，我們得到两个决定 $D_{00}^R$, $a$, $b$, $d$ 的方程式：

$$a(\varepsilon(\omega)\omega^2 - k^2) = 4\pi,$$
$$a + \varepsilon(\omega)(\omega^2 b + D_{00}^R - 2\omega d) = 0. \tag{28.25}$$

这样我們看到，均匀情况下 $D_{\alpha\beta}^R$ 可以确定到有两个任意函数的准确度，而对任意不均匀介質要有四个函数。

下面給出几个特殊情形的公式. 令 $d = b = 0$，則有：

$$D_{ik}^R = \frac{4\pi\delta_{ik}}{\varepsilon(\omega)\omega^2 - k^2}, \quad D_{00}^R = -\frac{4\pi}{\varepsilon(\omega)(\varepsilon(\omega)\omega^2 - k^2)},$$
$$D_{i0}^R = 0. \tag{28.26a}$$

$\varphi = 0$ 相当于：

$$D_{ik}^R = \frac{4\pi}{\varepsilon(\omega)\omega^2 - k^2}\left(\delta_{ik} - \frac{k_ik_k}{\varepsilon(\omega)\omega^2}\right),$$
$$D_{00}^R = D_{i0}^R = 0. \tag{28.26b}$$

最后，在所謂横規范 ($\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0$) 下有：

$$D_{ik}^R = \frac{4\pi}{\varepsilon(\omega)\omega^2 - k^2}\left(\delta_{ik} - \frac{k_ik_k}{k^2}\right),$$
$$D_{00}^R = \frac{4\pi}{\varepsilon(\omega)k^2}, \quad D_{i0}^R = 0. \tag{28.26c}$$

在(28.26)式中作代換 $\omega \to i|\omega_n|$，得到温度格林函数 $\mathfrak{D}$ 的公式：

$$\mathfrak{D}_{ik} = -\frac{4\pi\delta_{ik}}{\varepsilon(i|\omega_n|)\omega_n^2 + k^2},$$
$$\mathfrak{D}_{00} = \frac{4\pi}{\varepsilon(i|\omega_n|)(\varepsilon(i|\omega_n|)\omega_n^2 + k^2)}, \quad \mathfrak{D}_{i0} = 0, \tag{28.27a}$$



$$\mathfrak{D}_{ik} = -\frac{4\pi\delta_{ik}}{\varepsilon(i|\omega_n|)\omega_n^2 + k^2}\left(\delta_{ik} + \frac{k_ik_k}{\varepsilon(i|\omega_n|)\omega_n^2}\right),$$
$$\mathfrak{D}_{00} = \mathfrak{D}_{i0} = 0, \tag{28.27b}$$

$$\mathfrak{D}_{ik} = -\frac{4\pi\delta_{ik}}{\varepsilon(i|\omega_n|)\omega_n^2 + k^2}\left(\delta_{ik} - \frac{k_ik_k}{k^2}\right),$$
$$\mathfrak{D}_{00} = \frac{4\pi}{\varepsilon(i|\omega_n|)k^2}, \quad \mathfrak{D}_{i0} = 0. \tag{28.27c}$$

在某些問題中电磁場的普通时間格林函数可能有用，其定义为：

$$D_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, t_1 - t_2) =$$
$$= -i\,\mathrm{Sp}\left\{e^{\frac{F-\hat{H}}{T}} T_t\{A_\alpha(\boldsymbol{r}_1, t_1), A_\beta(\boldsymbol{r}_2, t_2)\}\right\}. \tag{28.28}$$

我們在 § 17 中已看到，它的傅立叶分量和 $D^R(\boldsymbol{k}, \omega)$ 的关系是：

$$\mathrm{Re}\, D(\boldsymbol{k}, \omega) = \mathrm{Re}\, D^R(\boldsymbol{k}, \omega),$$
$$\mathrm{Im}\, D(\boldsymbol{k}, \omega) = \mathrm{cth}\,\frac{\omega}{2T}\,\mathrm{Im}\, D^R(\boldsymbol{k}, \omega). \tag{28.29}$$

我們不引用由此得到的 $D$ 的庞杂公式了。

絕对温度零度时函数 $D$ 有特別意义，这时它可用普通的量子場論方法算得(第二章). 在(28.29)式中取极限 $T = 0$，得：

$$\mathrm{Re}\, D(\boldsymbol{k}, \omega) = \mathrm{Re}\, D^R(\boldsymbol{k}, \omega),$$
$$\mathrm{Im}\, D(\boldsymbol{k}, \omega) = \mathrm{sign}\,\omega\, \mathrm{Im}\, D^R(\boldsymbol{k}, \omega). \tag{28.30}$$

考虑到 $\varepsilon(\omega)$ 的实部是 $\omega$ 的偶函数，而虚部是奇函数(参閱 [52])，不难驗証，为了在 $T = 0$ 时从 $D^R$ 过渡到 $D$，須在 (26.26) 式中将 $\omega$ 換成 $|\omega|$. 例如，对規范(28.26a)得到：

$$D_{ik} = \frac{4\pi\delta_{ik}}{\varepsilon(|\omega|)\omega^2 - k^2},$$
$$D_{00} = -\frac{4\pi}{\varepsilon(|\omega|)(\varepsilon(|\omega|)\omega^2 - k^2)}, \quad D_{0i} = 0. \tag{28.31}$$

公式(28.31)是量子电动力学中光子格林函数通常公式(参見[25])的推广. 在透明介質($\varepsilon''(\omega)=0$)的特殊情况下，Рязанов[54] 用另一方法得到了这些公式.

## §29. 介电常数的計算

为了計算吸收介质中电磁場温度格林函数 $\mathfrak{D}$,可走另一条路、即采用第三章所发展的图解法. 由于有意义的只是波长远超过原子間距离的电磁場，我們将粒子和場的相互作用哈密頓量分成两部分之和:

$$\hat{H}_{int}=\hat{H}^{(1)}_{int}+\hat{H}^{(2)}_{int},$$

并将不相互作用粒子和自由光子的能量归入零级哈密頓量$\hat{H}_0$. 导致上节初提到的短程力的相互作用归入 $\hat{H}^{(1)}_{int}$. $H^{(2)}_{int}$ 是长波电磁場和粒子的相互作用哈密頓量.

对于标量势为零的規范

$$\hat{H}^{(2)}_{int}=-\int \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}, \qquad (29.1)$$

其中 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ 是粒子电流密度算符. (29.1) 式中长波表現为，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ 的傅立叶級数展开式中，只有模数不超过某个边界动量 $k_0$ 的动量 $\boldsymbol{k}$ 出现，而 $k_0$ 远小于原子間距离的倒数 $1/a$. 結果图解法中所有对 $\boldsymbol{k}$ 的积分都应在 $k_0\ll\frac{1}{a}$ 处截断.

粒子具有非相对論速度时(这个条件在一切宏观系統中成立)，电流密度算符是(参見[16]):

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})=\sum_a\left\{-i\frac{e_a}{2m_a}(\psi^+_a(\boldsymbol{r})\nabla\psi_a(\boldsymbol{r})-\nabla\psi^+_a(\boldsymbol{r})\psi_a(\boldsymbol{r}))-\right.$$
$$\left.-\frac{e_a^2}{2m_a}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\psi^+_a(\boldsymbol{r})\psi_a(\boldsymbol{r})\right\}.$$

式中对各种粒子求和.

我們将以長波光子綫的数目来区分輻射格林函数修正项的图形. 图中不含長波光子綫的部分将簡单地以实心多角形代表. 显然这些多角形可以理解成一切可能的具有同一性质的部分之和，



这样就把按电荷 $e$ 的微扰論級数归結成按长波光子綫数目的級数. 这个級数的各种类型的图形示于图 84 中. 多角形所对应的量完全由凝聚物体的性质决定，这些凝聚体是因短程力的作用而形成.

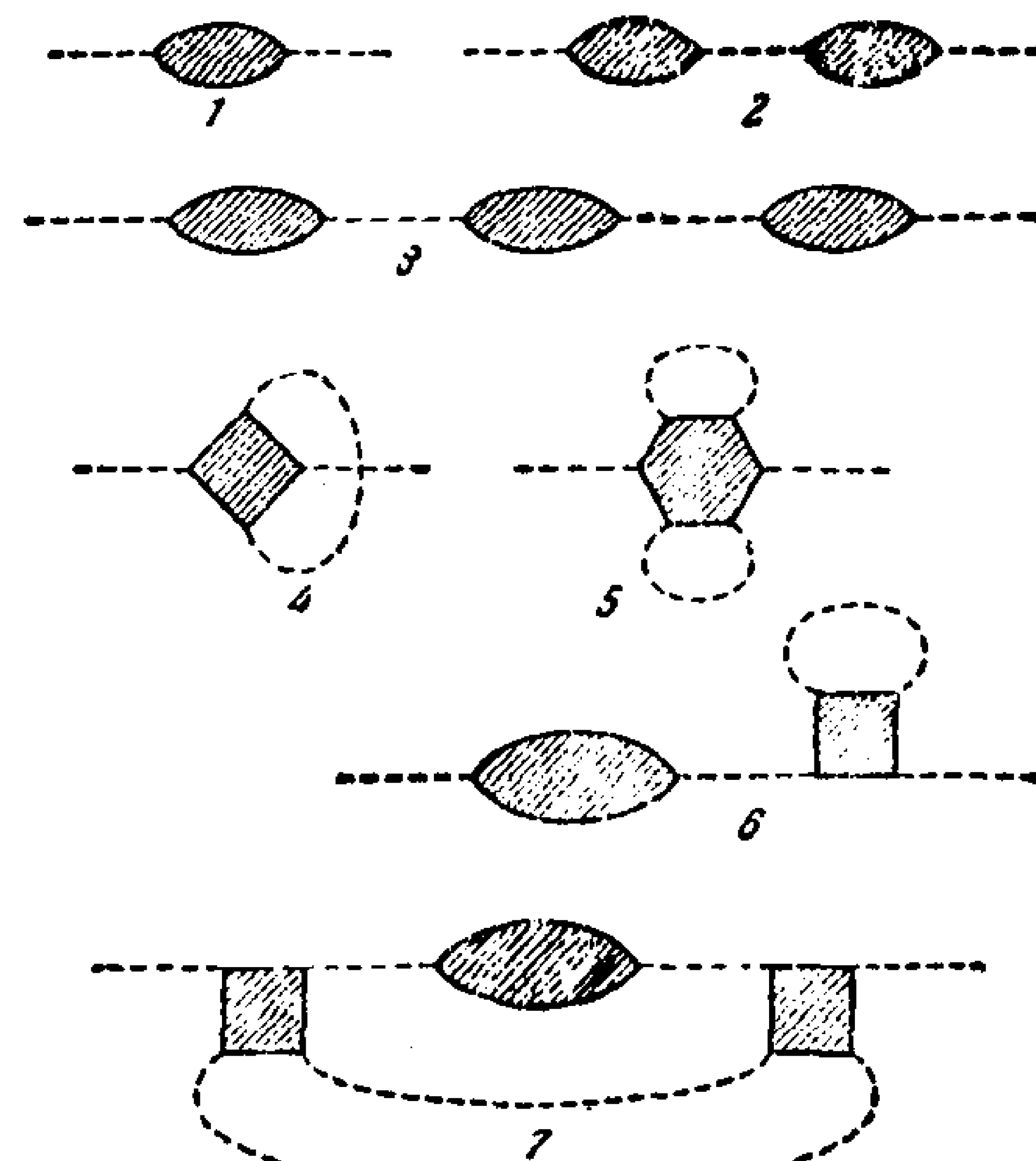



图 84

从物理考虑立刻清楚，图 82 的 4—7 图的貢献是可以略而不計的，因为它們对应各种光-光散射型的非綫性效应. 这个論断可証明如下. 已經指出，所有对长波光子綫动量的积分应在某个 $k_0\ll\frac{1}{a}$ 处截断. 从量綱考虑得知，每条对其动量积分的光子綫，給出数量級为 $k_0a$ 的小因子. 唯一不对长波光子綫动量积分的图形，是图 84 中图 1, 2, 3 这类.

这种图形序列的求和我們已在 §10 中推导戴逊方程式时作过. 因此我們直接写出 $\mathfrak{D}_{ik}$ 的方程式[1]:

---

1) 考虑到不均匀物体的情形，我們在坐标表象中写出了方程式 (29.2)，只对 $\tau$ 作了傅立叶变换.

$$\mathfrak{D}_{ik}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2; \omega_n) = \mathfrak{D}^{(0)}_{ik}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2; \omega_n) + \\ + \int d\boldsymbol{r}_3 d\boldsymbol{r}_4 \mathfrak{D}^{(0)}_{il}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_3; \omega_n)\mathcal{I}_{lm}(\boldsymbol{r}_3, \boldsymbol{r}_4; \omega_n)\mathfrak{D}_{mk}(\boldsymbol{r}_4, \boldsymbol{r}_2; \omega_n). \tag{29.2}$$

代表图 84 中实心环貢献的量 $\mathcal{I}$，称为极化算符. 从以前的討論看出，它完全决定于介質的性質.

我們将极化算符 $\mathcal{I}$ 通过系統的介电常数表示. 为此我們注意，长波輻射的格林函数 $\mathfrak{D}_{ik}$（规范 $\varphi = 0$）满足方程式 (28.18). 以算符

$$\omega_n^2 \delta_{ik} + \mathrm{rot}_{il}\mathrm{rot}_{lk}$$

从左边作用到方程式 (29.2)，并注意 $\mathfrak{D}^{(0)}$ 满足 $\varepsilon = 1$ 的方程式 (28.18)，經簡单計算后得到:

$$\int d\boldsymbol{r}' \mathcal{I}_{il}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}'; \omega_n)\mathfrak{D}_{lk}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}_2; \omega_n) = \\ = \frac{\varepsilon(\boldsymbol{r}_1, i|\omega_n|) - 1}{4\pi} \omega_n^2 \mathfrak{D}_{ik}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2; \omega_n),$$

由此得所要求的公式为:

$$\mathcal{I}_{ik}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2; \omega_n) = \frac{1}{4\pi}(\varepsilon(\boldsymbol{r}_1, i|\omega_n|) - 1)\omega_n^2 \delta_{ik}\delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2). \tag{29.3}$$

极化算符正比于 $\delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)$ 这一事实，与宏观理論中忽略空間关联效应有关. 后者只在所謂反常趋肤效应的頻段才是重要的. $\mathcal{I}$ 在这个頻段的性質将在第七章討論. 今后在本章里要紧的是更高的頻率，那时沒有反常趋肤效应.

如果討論均匀物体，则 $\mathcal{I}$ 只是 $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ 的函数，而 $\varepsilon$ 和 $\boldsymbol{r}$ 无关. 任(29.3)中对 $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ 作傅立叶变换，我們得到联系系統的极化算符 $\mathcal{I}(\boldsymbol{k}, \omega_n)$ 和介电常数的簡单公式:

$$\mathcal{I}_{ik}(\boldsymbol{k}, \omega_n) = \frac{1}{4\pi}(\varepsilon(i|\omega_n|) - 1)\omega_n^2 \delta_{ik}. \tag{29.4}$$

(29.4)式使我們能借助量子場論方法計算 $T \neq 0$ 时物体的介电常数. 实际上計算了系統的极化算符，我們就在虛軸的不連續点集 $\omega_n = 2n\pi Ti$ 上求得了 $\varepsilon(\omega)$. 注意到 $\varepsilon(\omega)$ 是在 $\omega$ 上半平面



沒有奇点的解析函数，并对 $\varepsilon$ 逐字重复 § 17 中关于 $\mathfrak{G}$ 和 $G^R$ 的論述，我們就得出結論：为了求得 $\varepsilon(\omega)$，只須从正虛半軸不連續点集上将函数

$$\frac{4\pi}{3\omega_n^2}\mathcal{I}_{ii}(\omega_n)$$

解析延拓到整个半平面. 虽然这个問題沒有一般解，但是在各种具体情况中可以完成上述解析延拓.

温度等于零时，$\varepsilon(\omega)$ 的計算大为化簡. 这时为了計算极化算符，可以采用第二章描述的場論方法. 对时間图解法重复本节中所作的全部計算，再考虑到 § 28 中关于函数 $D_{ik}(\boldsymbol{k}, \omega)$ 的論述，就得到公式(规范 $\varphi = 0$):

$$\Pi_{ik}(\omega) = \frac{1}{4\pi}(\varepsilon(|\omega|) - 1)\omega^2\delta_{ik}. \tag{29.5}$$

然后回想 $\varepsilon'(\omega) = \varepsilon'(-\omega)$，而 $\varepsilon''(\omega) = -\varepsilon''(-\omega)$，将 $\varepsilon$ 通过 $\Pi$ 表示:

$$\begin{aligned} \varepsilon'(\omega) &= 1 + \frac{4\pi}{3\omega^2}\mathrm{Re}\,\Pi_{ii}(\omega), \\ \varepsilon''(\omega) &= \frac{4\pi}{3\omega|\omega|}\mathrm{Im}\,\Pi_{ii}(\omega). \end{aligned} \tag{29.6}$$

因此 $T = 0$ 时 $\varepsilon(\omega)$ 的計算就归結为确定系統的极化算符.

## § 30. 不均匀电介質中的范德瓦尔斯力

长波电磁場是一种特殊长程作用力的来源，它們可以称为范德瓦尔斯力，因为其本質同于分子間在远距离上的吸引力. 虽然这些力对物体自由能的貢献，远小于短程結合力的貢献，然而它們引起本質上新的效应——自由能的非相加性. 正是这种与范德瓦尔斯力长程作用有关的非相加性，使我們能从热力学量中分出它們的貢献.

回到前面提及的范德瓦尔斯力和长波电磁場的关系，就容易理解这种非相加性. 实际上在某个区域内的密度变化，以及随之产生的介質电性質的变化，由于馬克士韦方程而在区域外也引起

場的变化．因此和长波輻射有关的那部分自由能，不仅仅决定于給定点物質的性質，也就是說，它是非相加性的．

这就使固体表面上液体薄膜的化学势与膜的厚度有关．另一方面，范德瓦尔斯力是固体間相互作用的来源，換言之，自由能和物体間的距离有关．显然，波长約为膜的厚度或物体間距离的电磁場，将在这些現象中起主要作用，因此能够将我們关心的量通过物体的介电常数 $\varepsilon(\omega)$ 表示．

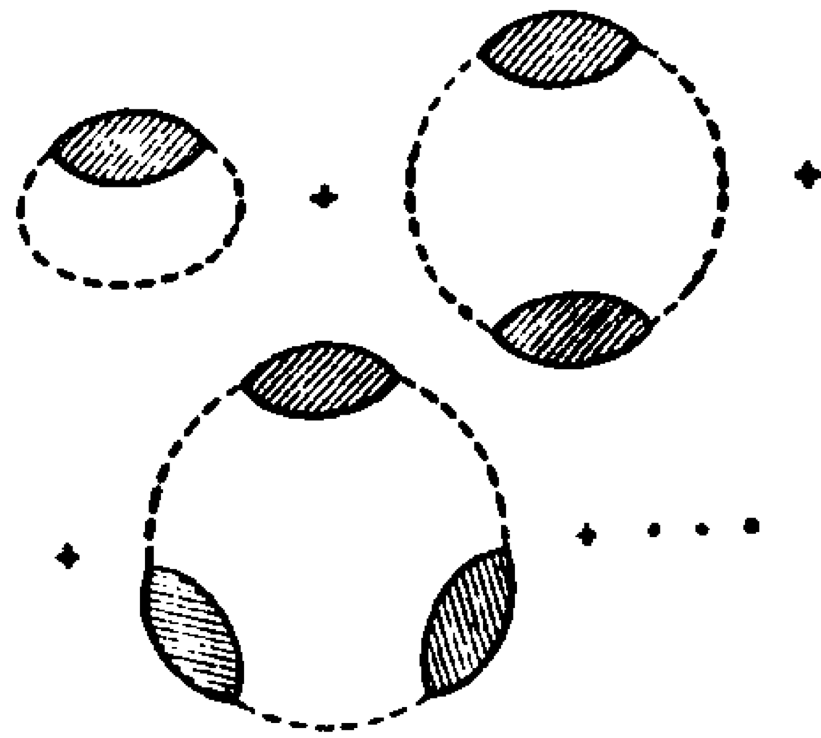


图 85

为了計算長波电磁場对自由能的修正項，我們采用 § 15 中发展的热力学势 $\Omega$（对于光子它等于自由能）的图解法．重复上节的論述，我們証实，只有图 85 上的图形序列才对 $F$ 有貢献．这时考虑到 § 15 关于 $F$ 图形前系数的討論，我們会覚得，图 85 中的实心框似乎不能理解成一切可能的不含长波声子綫的图形之和．然而不难看出，情形并非如此．原来图形前的系数等于 $1/m$，其中 $m$ 是光子綫数目[1]．这就使我們能将实心框求和，并令图 85 上的实心环对应 § 29 中算出的极化算符 $\mathcal{I}$．

图 85 的序列对应以下的自由能 $F$ 的級数．

$$F = F_0 - \frac{T}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\int \mathcal{I}_{ik}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega_n)\mathfrak{D}^{(0)}_{ki}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1; \omega_n) \times\right.$$

$$\times d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 + \frac{1}{2}\int \mathcal{I}_{ik}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega_n)\mathfrak{D}^{(0)}_{kl}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3; \omega_n) \times$$

$$\times \mathcal{I}_{lp}(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4; \omega_n)\mathfrak{D}^{(0)}_{pi}(\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 + \cdots$$

1) 在 § 15 中我們看到，$n$ 級拓扑等价图的数目是 $(n-1)!$，这就导致因子 $1/n(1/n = (n-1)!/n!)$．現在 $\hat{H}_{int} = \hat{H}^{(1)}_{int} + \hat{H}^{(2)}_{int}$（見 § 29），指数展开的系数等于 $1/l!(2m)!$，其中 $m$ 是光子綫数，而 $l$ 是和 $\hat{H}^{(1)}_{int}$ 有关的頂点数．和 § 15 类似的計算表明，拓扑等价图的数目等于 $l!(2m-1)!$，由此得出正文中的論断．



$$\cdots + \frac{1}{m}\int \mathcal{I}_{ik}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega_n)\mathfrak{D}^{(0)}_{kl}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3; \omega_n)\cdots$$

$$\left.\cdots\mathcal{I}_{qr}(\mathbf{r}_{2m-1}, \mathbf{r}_{2m}; \omega_n)\mathfrak{D}^{(0)}_{ri}(\mathbf{r}_{2m} - \mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1\cdots d\mathbf{r}_{2m} + \cdots\right\}, \tag{30.1}$$

其中 $F_0$ 是物体的自由能（一切和短程力有关的修正都已归入 $F_0$）．

級数 (30.1) 不能直接求和．我們不用自由能，而决定来自物体和长波电磁場相互作用的附加压力（更确切些說，附加拉伸张量）．为此我們設想物体受到小形变，其位移矢量是 $\mathbf{u}(\mathbf{r})$．这时自由能的变化 $\delta F$ 等于 $-\int \mathbf{f}\mathbf{u}dV$，其中 $\mathbf{f}$ 是物体形变时作用于单位体积上的力．$F_0$ 的相应变化是：

$$\delta F_0 = \int \mathbf{u}\,\mathrm{grad}\,p_0\,dV,$$

其中 $p_0(\rho, T)$ 是密度和温度一定时未考虑修正項的压力．

在这种位移下級数 (30.1) 中只有极化算符改变，因为仅是它与介質的性質有关，即(見(29.3))：

$$\delta\mathcal{I}_{ik}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega_n) = \frac{1}{4\pi}\omega_n^2\delta_{ik}\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\delta\varepsilon(\mathbf{r}_1, i|\omega_n|).$$

变分(30.1)式时，系数 $1/m$ 消去，我們得到：

$$\delta F = \delta F_0 - \frac{T}{8\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\omega_n^2\int d\mathbf{r}\,\delta\varepsilon(\mathbf{r}, i|\omega_n|) \times$$

$$\times \left\{\mathfrak{D}^{(0)}_{ii}(\mathbf{r} - \mathbf{r}; \omega_n) + \int \mathfrak{D}^{(0)}_{ik}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1; \omega_n)\mathcal{I}_{kl}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega_n) \times\right.$$

$$\times \mathfrak{D}^{(0)}_{li}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}; \omega_n) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 + \int \mathfrak{D}^{(0)}_{ik}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1; \omega_n)\mathcal{I}_{kl} \times$$

$$\times (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega_n)\mathfrak{D}^{(0)}_{lp}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3; \omega_n)\mathcal{I}_{pq}(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4; \omega_n) \times$$

$$\left.\times \mathfrak{D}^{(0)}_{qi}(\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}; \omega_n) d\mathbf{r}_1\cdots d\mathbf{r}_4 + \cdots\right\}.$$

圓括弧中的級数，正是对应图 84，1，2，3 序列的长波光子格林函数 $\mathfrak{D}$．因此：

$$\delta F = \delta F_0 - \frac{T}{8\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\omega_n^2\int \mathfrak{D}_{ii}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \omega_n)\delta\varepsilon(\mathbf{r}, i|\omega_n|) d\mathbf{r}.$$

回想 $\mathfrak{D}$ 是 $\omega_n$ 的偶函数，最終得：

$$\delta F = \delta F_0 - \frac{T}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}{}' \omega_n^2 \int \mathfrak{D}_{ii}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r};\omega_n)\delta\varepsilon(\boldsymbol{r},i\omega_n)d\boldsymbol{r}. \quad (30.2)$$

求和符号的上撇表示，$n=0$ 項的权重为 1/2. 注意 $\omega_n = 2n\pi T$.

变分 $\delta\varepsilon$ 和位移 $\boldsymbol{u}$ 的关系为[1]：

$$\delta\varepsilon = -\boldsymbol{u}\operatorname{grad}\varepsilon - \rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\operatorname{div}\boldsymbol{u}.$$

将它代入(30.2)式并作分部积分，得到 $\boldsymbol{f}$ 的表达式：

$$\boldsymbol{f} = -\operatorname{grad} p_0 - \frac{T}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}{}' \omega_n^2\mathfrak{D}_{ii}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r};\omega_n)\operatorname{grad}\varepsilon(\boldsymbol{r},i\omega_n) + $$
$$+\frac{T}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}{}' \omega_n^2\operatorname{grad}\left[\mathfrak{D}_{ii}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r};\omega_n)\rho\frac{\partial\varepsilon(\boldsymbol{r},i\omega_n)}{\partial\rho}\right]. \quad (30.3)$$

由此式容易算出对系統化学势的附加项. 为此须注意，力学平衡时 $\boldsymbol{f}=0$. 令(30.3)式等于零，并考虑到温度一定时有以下关系成立：

$$\operatorname{grad}\varepsilon(\rho, T) = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\operatorname{grad}\rho, \quad dp_0(\rho, T) = \rho d\mu_0(\rho, T),$$

其中 $\mu_0$ 是单位质量的未受扰动的化学势，簡单变换后得到：

$$-\rho\operatorname{grad}\left\{\mu_0(\rho, T) - \frac{T}{4\pi}\sum_n{}' \omega_n^2\mathfrak{D}_{ii}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r};\omega_n)\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right\} = 0. \quad (30.4)$$

大家知道，任何不均匀物体的力学平衡条件是化学势在物体内不变. 因此从(30.4)式立即得：

$$\mu(\rho, T) = \mu_0(\rho, T) - \frac{T}{4\pi}\sum_n{}' \omega_n^2\mathfrak{D}_{ii}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r};\omega_n)\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}. \quad (30.5)$$

现在計算拉伸张量. 为此须将力 $\boldsymbol{f}$ 的表达式(30.3)变成如下形式：

$$f_i = \frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}. \quad (30.6)$$

除了格林函数 $\mathfrak{D}_{ik}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';\omega_n)$，先引入两个其它函数：

$$\mathfrak{D}_{ik}^E(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';\omega_n) = -\omega_n^2\mathfrak{D}_{ik}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';\omega_n),$$
$$\mathfrak{D}_{ik}^H(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';\omega_n) = \operatorname{rot}_{il}\operatorname{rot}'_{km}\mathfrak{D}_{lm}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';\omega_n), \quad (30.7)$$

它們由电場和磁場算符构成，其規則同于由矢量势算符构成 $\mathfrak{D}$ 的方式.

利用新的記号将力的表达式写成：

$$f_i = -\frac{\partial p_0}{\partial x_i} + \frac{T}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\varepsilon(\boldsymbol{r},i\omega_n)\mathfrak{D}_{kk}^E(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r};\omega_n) - \right.$$
$$\left. -\rho(r)\frac{\partial\varepsilon(\boldsymbol{r},i\omega_n)}{\partial\rho}\mathfrak{D}_{kk}^E(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r};i\omega_n)\right] -$$
$$-\frac{T}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}{}' \varepsilon(\boldsymbol{r},i\omega_n)\frac{\partial}{\partial x_i}\mathfrak{D}_{kk}^E(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r};\omega_n). \quad (30.8)$$

由此可見，我們只須改造(30.8)式的最后一項. 将它写成如下形式（先不管求和与因子 $\frac{T}{4\pi}$）：

$$\varepsilon(\boldsymbol{r}')\frac{\partial}{\partial x_i}\mathfrak{D}_{kk}^E(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') + \varepsilon(\boldsymbol{r})\frac{\partial}{\partial x_i'}\mathfrak{D}_{kk}^E(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'), \quad (30.9)$$

計算完毕后将令 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$.

經过显而易見的变换，从(30.9)得：

$$2\frac{\partial}{\partial x_k}\varepsilon(\boldsymbol{r})\mathfrak{D}_{ik}^E(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}) - \frac{\partial}{\partial x_k}\varepsilon(\boldsymbol{r})\mathfrak{D}_{ki}^E(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') -$$
$$-\frac{\partial}{\partial x_k'}\varepsilon(\boldsymbol{r}')\mathfrak{D}_{ik}^E(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') + \varepsilon(\boldsymbol{r}')\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\mathfrak{D}_{kk}^E(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') -\right.$$
$$\left.-\frac{\partial}{\partial x_k}\mathfrak{D}_{ik}^E(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\right) + \varepsilon(\boldsymbol{r})\left(\frac{\partial}{\partial x_i'}\mathfrak{D}_{kk}^E(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') -\right.$$
$$\left.-\frac{\partial}{\partial x_k'}\mathfrak{D}_{ki}^E(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\right). \quad (30.10)$$

从格林函数 $\mathfrak{D}$ 的方程(28.18)式可以得到以下恆等式：

1) 給定点 $\varepsilon$ 的变化由两部分組成. 第一部分和 $\varepsilon$ 随物体的移动有关：

$$\delta_1\varepsilon = \varepsilon(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{u}) - \varepsilon(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{u}\operatorname{grad}\varepsilon,$$

而第二部分与形变时的密度变化有关：

$$\delta_2\varepsilon = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\delta\rho = -\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\rho\operatorname{div}\boldsymbol{u}.$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\varepsilon(\boldsymbol{r})\mathfrak{D}^E_{ki}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -4\pi\frac{\partial}{\partial x_i}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),$$

$$\frac{\partial}{\partial x'_k}\varepsilon(\boldsymbol{r}')\mathfrak{D}^E_{ik}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = 4\pi\frac{\partial}{\partial x_i}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\mathfrak{D}^H_{ik}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\frac{\partial}{\partial x'_k}\mathfrak{D}^H_{ik}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -4\pi\frac{\partial}{\partial x_i}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),$$

$$\varepsilon(\boldsymbol{r}')\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\mathfrak{D}^E_{ik}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') - \frac{\partial}{\partial x_i}\mathfrak{D}^E_{kk}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\right) =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x'_k}\mathfrak{D}^H_{ki}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') + \frac{\partial}{\partial x'_i}\mathfrak{D}^H_{kk}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') + 8\pi\frac{\partial\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\partial x_i},$$

$$\varepsilon(\boldsymbol{r})\left(\frac{\partial}{\partial x'_k}\mathfrak{D}^E_{ki}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') - \frac{\partial}{\partial x'_i}\mathfrak{D}^E_{kk}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\right) =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x_k}\mathfrak{D}^H_{ik}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') + \frac{\partial}{\partial x_i}\mathfrak{D}^H_{kk}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') - 8\pi\frac{\partial\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\partial x_i}.$$

将它們代入(30.10)式幷令 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$，得:

$$\varepsilon(\boldsymbol{r})\frac{\partial}{\partial x_i}\mathfrak{D}^E_{kk}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}) = 2\frac{\partial}{\partial x_k}\varepsilon(\boldsymbol{r})\mathfrak{D}^E_{ik}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}) +$$

$$+ 2\frac{\partial}{\partial x_k}\mathfrak{D}^H_{ik}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}) - \frac{\partial}{\partial x_i}\mathfrak{D}^H_{kk}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}).$$

再把此式代入(30.8)式，我們終于証明力 $\boldsymbol{f}$ 可表示成(30.6)式的形式，其拉伸张量为:

$$\sigma_{ik} = -\delta_{ik}p_0(\rho,T) - \frac{T}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}{}'\left\{-\frac{1}{2}\delta_{ik}\left[\varepsilon(\boldsymbol{r},i\omega_n) - \right.\right.$$

$$\left. - \rho\frac{\partial\varepsilon(\boldsymbol{r},i\omega_n)}{\partial\rho}\right]\mathfrak{D}^E_{ll}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r};\omega_n) - \frac{1}{2}\delta_{ik}\mathfrak{D}^H_{ll}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r};\omega_n) +$$

$$\left. + \varepsilon(\boldsymbol{r},i\omega_n)\mathfrak{D}^E_{ik}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r};\omega_n) + \mathfrak{D}^H_{ik}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r};\omega_n)\right\}. \quad (30.11)$$

(30.11) 式还沒有直接的物理意义，因为其中 $\mathfrak{D}^E(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 和 $\mathfrak{D}^H(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 在 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$ 处趋向无穷大。这是由于，如果不引入相应的截断，則短波电磁振动对 $\sigma_{ik}$ 作出无穷大貢献。然而短波振动与物体的不均匀性引起的效应无关，因而只要在所討論的点 $\varepsilon$ 值一样，这些振动对均匀物体和不均匀物体的貢献就是相同的。



我們关心的长波振动的貢献实际上与截断的性質无关，它們可从(30.11)式作适当削減而得。这就是，式中的格林函数 $\mathfrak{D}^E_{ik}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r})$（以及类似的 $\mathfrak{D}^H_{ik}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r})$），应理解为差的极限:

$$\lim_{\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{r}'}[\mathfrak{D}^E_{ik}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') - \overline{\mathfrak{D}}^E_{ik}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')],$$

其中 $\overline{\mathfrak{D}}^E$ 是均匀无限介質的格林函数，其介电常数值与非均匀物体中計算拉伸张量的那点的介电常数值相同。为避免使公式过于繁杂，我們以后将把 (30.11) 式写成原来形式，但認为已作过上述的削減。

这条意見也涉及化学势的(30.5)式，考虑了(30.7)式后它可以写成:

$$\mu(\rho,T) = \mu_0(\rho,T) + \frac{T}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}{}'\frac{\partial\varepsilon(\boldsymbol{r},i\omega_n)}{\partial\rho}\mathfrak{D}^E_{ii}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r};\omega_n). \quad (30.12)$$

注意在不均匀物体这一概念中，我們还包含由几个均匀物体构成的系統。这种情况下解方程式 (28.18) 时，$\mathfrak{D}_{ik}$ 分量应在物体之間的边界上滿足一定条件。方程式(28.18)的独立变量是 $\boldsymbol{r}$，而 $\boldsymbol{r}'$ 起着参量作用。因此这里講的是对变量 $\boldsymbol{r}$ 的边界条件。这些条件相当电場和磁場的切綫分量連續。既然 $\boldsymbol{r}$ 点对应张量 $\mathfrak{D}_{ik}$ 的一个下角标 $(i)$，則张量 $\mathfrak{D}^E_{ik}$ 和 $\mathfrak{D}^H_{ik}$ 对此角标的切綫分量应当是連續的。

Дзялошинский 和 Питаевский [53] 得到的(30.11)和(30.12)式，原則上解决了計算物体热力学量中范得瓦尔斯部分的問題。問題归結为解格林函数 $\mathfrak{D}_{ik}$ 的方程式(28.18)。

## § 31. 固体間的分子作用力

**1. 固体間的相互作用力.** 我們运用以上发展的一般理論，計算固体間的范得瓦尔斯作用力，这些固体表面間的距离很小。这时物体間的空隙可能充滿某种液体。以后将以角标 1, 2 代表两个固体的量，而以角标 3 代表空隙中的介質的量。

我們將假設空隙是无限和平行的，然而必須注意，实际上为了正确提出物体間的相互作用力問題，至少物体之一应当具有有限的尺寸，四面被介質 3 包圍，然后計算作用于其上的总力。可是由于分子力随距离迅速減小，事实上这个合力可以完全归結为作用在两个物体之間的狹縫里的力。

作用于物体 2 上的总力，可以作为从介質 3 流入物体的总动量通量算出，它等于通量密度对包含物体在内的任何表面的积分。这时应注意，介質 3 处于热力学平衡，其条件之一是化学势恆定：$\mu=$ 常数，其中 $\mu$ 由(30.12)式給出。

由于和場的长波涨落有关的介質密度修正很小，可以認为介質 3 中密度 $\rho$ 不变；这时化学势 $\mu_0(\rho, T)$ 的变化(由于(30.4)式)和 $p_0(\rho, T)/\rho$ 的变化一致。因此条件 $\mu=$ 常数可以改写成：

$$p_0(\rho, T)+\frac{T}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}{}'\rho\frac{\partial\varepsilon_3(i\omega_n)}{\partial\rho}\mathfrak{D}^E_{ll}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \omega_n)=\text{const.} \quad (31.1)$$

这个条件使总拉伸张量(30.11)式的一部分成为在液体内不变的均匀压力，它对作用于物体之上的总力无任何貢献；为了确定所求的力，实际上只須将介質 3 中的拉伸张量写成：

$$\sigma'_{ik}=-\frac{T}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}{}'\Big\{\varepsilon_3(i\omega_n)\Big[\mathfrak{D}^E_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \omega_n)-\frac{1}{2}\delta_{ik}\mathfrak{D}^E_{ll}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \omega_n)\Big]+$$
$$+\mathfrak{D}^H_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \omega_n)-\frac{1}{2}\delta_{ik}\mathfrak{D}^H_{ll}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \omega_n)\Big\}. \quad (31.2)$$

令 $x$ 軸垂直縫隙平面，隙的寬度記为 $l$（因而平面 $x=0$ 和 $x=l$ 就是固体 1 和 2 的表面。这时作用于物体 2 表面单位面积的力 $F$ 等于：

$$F(l)=\sigma'_{xx}(l)=\frac{T}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}{}'\{\varepsilon_3(i\omega_n)[\mathfrak{D}^E_{yy}(l, l; \omega_n)+$$
$$+\mathfrak{D}^E_{zz}(l, l; \omega_n)-\mathfrak{D}^E_{xx}(l, l; \omega_n)]+\mathfrak{D}^H_{yy}(l, l; \omega_n)+$$
$$+\mathfrak{D}^H_{zz}(l, l; \omega_n)-\mathfrak{D}^H_{xx}(l, l; \omega_n)\}; \quad (31.3)$$

正力相当于吸引，負力相当排斥。

由于 $y, z$ 方向的均匀性，格林函数 $\mathfrak{D}_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \omega_n)$ 只和 $y-y'$



与 $z-z'$ 有关。对这些变量作傅立叶变换：

$$\mathfrak{D}_{ik}(x, x'; \mathbf{q}; \omega_n)=\int e^{-iq_y(y-y')-iq_z(z-z')}\mathfrak{D}_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \omega_n)\times$$
$$\times d(y-y')d(z-z')$$

并令 $y$ 軸沿矢量 $\mathbf{q}$ 的方向。格林函数的方程式(28.18)成为：

$$\left(w^2-\frac{d^2}{dx^2}\right)\mathfrak{D}_{zz}(x, x')=-4\pi\delta(x-x'),$$

$$\left(\varepsilon\omega_n^2-\frac{d^2}{dx^2}\right)\mathfrak{D}_{yy}(x, x')+iq\frac{d}{dx}\mathfrak{D}_{xy}(x, x')=-4\pi\delta(x-x'),$$

$$w^2\mathfrak{D}_{xy}(x, x')+iq\frac{d}{dx}\mathfrak{D}_{yy}(x, x')=0,$$

$$w^2\mathfrak{D}_{xx}(x, x')+iq\frac{d}{dx}\mathfrak{D}_{xy}(x, x')=-4\pi\delta(x-y),$$

$$\left(\varepsilon\omega_n^2-\frac{d^2}{dx^2}\right)\mathfrak{D}_{xy}(x, x')+iq\frac{d}{dx}\mathfrak{D}_{xx}(x, x')=0,$$

其中 $w=\sqrt{\varepsilon\omega_n^2+q^2}$，而 $x'$ 起着参量作用(格林函数的分量 $\mathfrak{D}_{xz}$，$\mathfrak{D}_{yz}$ 等于零，因为它們的方程式是齐次的)。

这个方程組的求解，归結为解两个方程式：

$$\left(w^2-\frac{d^2}{dx^2}\right)\mathfrak{D}_{zz}(x, x')=-4\pi\delta(x-x'),$$
$$\left(w^2-\frac{d^2}{dx^2}\right)\mathfrak{D}_{yy}(x, x')=-\frac{4\pi w^2}{\varepsilon\omega_n^2}\delta(x-x'), \quad (31.4)$$

然后 $\mathfrak{D}_{xx}$ 和 $\mathfrak{D}_{xy}$，由下式定出：

$$\mathfrak{D}_{xy}=-\frac{iq}{w^2}\frac{d}{dx}\mathfrak{D}_{yy},$$
$$\mathfrak{D}_{xx}=-\frac{iq}{w^2}\frac{d}{dx}\mathfrak{D}_{xy}-\frac{4\pi}{w^2}\delta(x-x'). \quad (31.5)$$

电場和磁場切綫分量連續的边界条件，归結为要求 $\mathfrak{D}^E_{yk}$，$\mathfrak{D}^H_{yk}$，$\mathfrak{D}^E_{zk}$，$\mathfrak{D}^H_{zk}$ 連續，或者等价地要求 $\mathfrak{D}_{yk}$，$\mathfrak{D}_{zk}$，$\mathrm{rot}_{yl}\mathfrak{D}_{lk}$，$\mathrm{rot}_{zl}\mathfrak{D}_{lk}$ 連續。利用(31.5)式的第一个等式得出，边界上应連續的量为：

$$\mathfrak{D}_{zz}, \frac{d\mathfrak{D}_{zz}}{dx}, \mathfrak{D}_{yy}, \frac{\varepsilon}{w^2}\frac{d\mathfrak{D}_{yy}}{dx}. \quad (31.6)$$

由于我們只关心隙內的格林函数，可以只限于$0<x'<l$. 在区域 3($0<x<l$) 中函数 $\mathfrak{D}_{yy}$ 和 $\mathfrak{D}_{zz}$ 由方程式 (31.4) 决定，其中 $\varepsilon=\varepsilon_3$, $w=w_3=\sqrt{\varepsilon_3\omega_n^2+q^2}$. 在区域 1($x<0$) 和 2($x>l$) 中，它們满足同样的方程式，但无右端(因为这里 $x\neq x'$)，同时将 $\varepsilon$, $w$ 相应换成 $\varepsilon_1$, $w_1$ 或 $\varepsilon_2$, $w_2$.

§ 30 末尾提到的削减，归結为从縫隙区域所有的函数 $\mathfrak{D}$ 中，要減去它們在 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3$, $w_1=w_2=w_3$ 时的值. 結果 (31.5) 式第二項中可立即省去含 $\delta$ 函数之項，因而隙內的 $\mathfrak{D}_{xy}$, $\mathfrak{D}_{xx}$ 由以下公式决定：

$$\mathfrak{D}_{xy}=-\frac{iq}{w_3^2}\frac{d}{dx}\mathfrak{D}_{yy},\quad \mathfrak{D}_{xx}=-\frac{iq}{w_3^2}\frac{d}{dx}\mathfrak{D}_{xy}. \tag{31.7}$$

在解方程式前，还要注意一点. 方程式 (31.4) 一般解的形状是 $f_1(x-x')+f_2(x+x')$. 利用方程式(31.4)，(31.7)以及函数 $\mathfrak{D}^E$ 和 $\mathfrak{D}^H$ 的定义，可以証明，格林函数中与和 $x+x'$ 有关的部分，对力的表达式 (31.3) 无任何貢献. 我們不在这里詳細論証，因为这个結果从物理考虑是显然如此的：在形如 $f(x+x')$ 的解中令 $x=x'$，我們将求得与坐标有关的隙內动量通量，这和它的守恆律矛盾. 因此今后我們通常只引用和 $x-x'$ 有关的那部分格林函数 $\mathfrak{D}^+$.

现在求函数 $\mathfrak{D}_{zz}$. 它满足方程：

$$\left(w_3^2-\frac{d^2}{dx^2}\right)\mathfrak{D}_{zz}=-4\pi\delta(x-x') \quad 当 \quad 0<x<l,$$

$$\left(w_1^2-\frac{d^2}{dx^2}\right)\mathfrak{D}_{zz}=0 \quad 当 \quad x<0;$$

$$\left(w_2^2-\frac{d^2}{dx^2}\right)\mathfrak{D}_{zz}=0 \quad 当 \quad x>l.$$

由此得到：

$$\mathfrak{D}_{zz}=Ae^{w_1x} \quad 当 \quad x<0,\qquad \mathfrak{D}_{zz}=Be^{-w_2x} \quad 当 \quad x>l.$$

$$\mathfrak{D}_{zz}=C_1e^{w_3x}+C_2e^{-w_3x}-\frac{2\pi}{w_3}e^{-w_3|x-x'|} \quad 当 \quad 0<x<l.$$



从边界条件，即 $\mathfrak{D}_{zz}$ 和 $\frac{d\mathfrak{D}_{zz}}{dx}$ 的連續性，定出常数 $A$, $B$, $C_1$, $C_2$，得到 $\mathfrak{D}_{zz}^+$ 为：

$$\mathfrak{D}_{zz}^+=\frac{4\pi}{w_3\Delta}\operatorname{ch}w_3(x-x')-\frac{2\pi}{w_3}e^{-w_3|x-x'|} \quad 当 \quad 0<x<l,$$

其中

$$\Delta=1-e^{2w_3l}\frac{(w_1+w_3)(w_2+w_3)}{(w_1-w_3)(w_2-w_3)}. \tag{31.8}$$

減去 $\mathfrak{D}_{zz}^+$ 在 $w_1=w_2=w_3$ 的值(这时 $\Delta$ 趋向无穷大)，最終得：

$$\mathfrak{D}_{zz}^+=\frac{4\pi}{w_3\Delta}\operatorname{ch}w_3(x-x'). \tag{31.9}$$

类似地解 $\mathfrak{D}_{yy}$ 的方程，得到(已作削減)：

$$\mathfrak{D}_{yy}^+=\frac{4\pi w_3}{\omega_n^2\varepsilon_3\bar{\Delta}}\operatorname{ch}w_3(x-x'), \tag{31.10}$$

$$\bar{\Delta}=1-e^{2w_3l}\frac{(\varepsilon_1w_3+\varepsilon_3w_1)(\varepsilon_2w_3+\varepsilon_3w_2)}{(\varepsilon_1w_3-\varepsilon_3w_1)(\varepsilon_2w_3-\varepsilon_3w_2)} \tag{31.11}$$

而利用(31.7)式得：

$$\mathfrak{D}_{xy}^+=-\frac{4\pi iq}{\omega_n^2\varepsilon_3\bar{\Delta}}\operatorname{sh}w_3(x-x'),$$

$$\mathfrak{D}_{xx}^+=-\frac{4\pi q^2}{\omega_n^2\varepsilon_3w_3\bar{\Delta}}\operatorname{ch}w_3(x-x'). \tag{31.12}$$

算出 $\mathfrak{D}_{ik}^E(x,x';q;\omega_n)$ 和 $\mathfrak{D}_{ik}^H(x,x';q;\omega_n)$，并将其代入(31.3)式得：

$$F(l)=-\frac{T}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}{}'\int_0^\infty q\,dq\,w_3\left(\frac{1}{\Delta}+\frac{1}{\bar{\Delta}}\right).$$

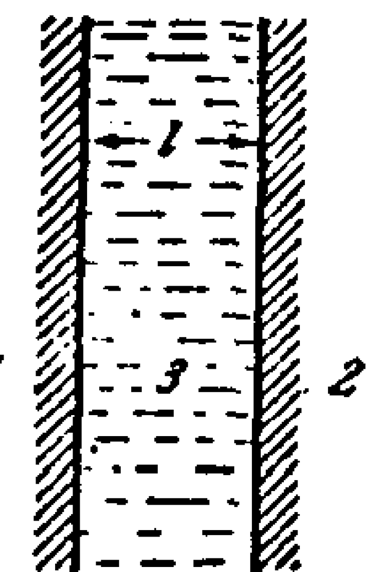


图 86

引入新的积分变量 $q=\sqrt{\varepsilon_3}\,\omega_n\sqrt{p^2-1}$ 并回到普通单位制，我們就得到最終表达式 (Дзялошинский, Лифшиц, Питаевский[55])：两个物体以充滿介質的隙相隔，隙的寬度为 $l$，作用在每个物体单位面积上的力 $F$ 等于：

$$F(l)=\frac{T}{\pi c^3}\sum_{n=0}^{\infty}{}'\varepsilon_3^{3/2}\omega_n^3\int_1^\infty p^2dp\left\{\left[\frac{(s_1+p)(s_2+p)}{(s_1-p)(s_2-p)}\times\right.\right.$$

$$\times\exp\left(\frac{2p\omega_n}{c}l\sqrt{\varepsilon_3}\right)-1\Bigg]^{-1}+\left[\frac{(s_1+p\varepsilon_1/\varepsilon_3)(s_2+p\varepsilon_2/\varepsilon_3)}{(s_1-p\varepsilon_1/\varepsilon_3)(s_2-p\varepsilon_2/\varepsilon_3)}\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left(\frac{2p\omega_n}{c}l\sqrt{\varepsilon_3}\right)-1\Bigg]^{-1}\right\},\qquad(31.13)$$

其中

$$s_1=\sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_3-1+p^2},\ s_2=\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_3-1+p^2},\ \omega_n=\frac{2\pi nT}{\hbar},$$

而 $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$ 是虚頻率 $i\omega_n$ 的函数 ($\varepsilon=\varepsilon(i\omega_n)$). 对于 $\varepsilon_3=1$, 即物体以空隙相隔的情形,此式是 Лифшиц[56] 首先用另一种方法得到的,当时未利用量子場論方法.

一般公式(31.13)相当复杂. 然而因为温度对物体相互作用力的影响,通常是完全无关紧要的,这个公式可以大为化簡1).

問題在于(31.13)式中含有指数,因而和中起主要作用的項为 $\omega_n\sim\frac{c}{l}$ 或 $n\sim\frac{c\hbar}{lT}$. 因此当 $\frac{lT}{c\hbar}\ll1$,大 $n$ 值重要,在(31.13)式中可从求和变到对 $dn=\frac{\hbar}{2\pi T}d\omega$ 积分. 这时公式中已不明显地含有温度,我們得出以下結果 ($\varepsilon=\varepsilon(i\omega)$):

$$F(l)=\frac{\hbar}{2\pi^2c^3}\int_0^\infty d\omega\int_1^\infty dp\,p^2\omega^3\varepsilon_3^{3/2}\left\{\left[\frac{(s_1+p)(s_2+p)}{(s_1-p)(s_2-p)}\times\right.\right.$$

$$\times\exp\left(\frac{2p\omega}{c}l\sqrt{\varepsilon_3}\right)-1\Bigg]^{-1}+\left[\frac{(s_1+p\varepsilon_1/\varepsilon_3)(s_2+p\varepsilon_2/\varepsilon_3)}{(s_1-p\varepsilon_1/\varepsilon_3)(s_2-p\varepsilon_2/\varepsilon_3)}\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left(\frac{2p\omega}{c}l\sqrt{\varepsilon_3}\right)-1\Bigg]^{-1}\right\}.\qquad(31.14)$$

公式(31.14)还是很复杂. 在两个重要的极限情况下它还可以进一步化簡.

先討論"近"距离极端情况,我們指的是比給定物体吸收光譜特征波长 $\lambda_0$ 小得多的距离. 凝聚物体能涉及的温度,无論如何比这里的 $\hbar\omega$ (例如在可見光頻段)小得多,因而不等式 $\frac{Tl}{\hbar c}\ll1$ 早就成立.

由于被积表达式分母中有指数因子

$$\exp(2p\omega l\sqrt{\varepsilon_3}/c),$$

对 $p$ 积分时起基本作用的 $p$ 值为 $\frac{p\omega l}{c}\sim1$. 这时 $p\gg1$,因此确定主要項时可令 $s_1\simeq s_2\simeq p$. 在这个近似下,(31.14)式中围括弧内第一項等于零. 第二項在引入积分变量 $x=2l\omega p\sqrt{\varepsilon_3}/c$ 后給出:

$$F=\frac{\hbar}{16\pi^2l^3}\int_0^\infty\int_0^\infty x^2dxd\omega\left[\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_3)(\varepsilon_2+\varepsilon_3)}{(\varepsilon_1-\varepsilon_3)(\varepsilon_2-\varepsilon_3)}e^x-1\right]^{-1}\qquad(31.15)$$

(对 $x$ 的积分下限在同級近似中为零). 这种情况下力和距离的立方成反比;从两个原子間范得瓦尔斯力的普通规律,本来就应期待这种立方关系. 函数 $\varepsilon(i\omega)-1$ 随 $\omega$ 的增加而单調下降至零. 因此从某个 $\omega\sim\omega_0$ 开始, $\omega$ 的值不再对积分有显著貢献; $l$ 小的条件表明,应有 $l\ll\frac{c}{\omega_0}$.

現在回到相反的极限, $l\gg\lambda_0$ 的"远"距离. 然而我們仍假定距离还不是太大,不等式 $\frac{lT}{\hbar c}\ll1$ 仍成立. 在一般公式(31.14)中引入新的积分变量 $x=2pl\omega/c$; 而第二个积分变量我們与上面不同,不取 $\omega$ 而取 $p$:

$$F=\frac{\hbar c}{32\pi^2l^4}\int_0^\infty dx\int_1^\infty dp\frac{x^3}{p^2}\varepsilon_3^{3/2}\left\{\left[\frac{(s_1+p)(s_2+p)}{(s_1-p)(s_2-p)}e^{x\sqrt{\varepsilon_3}}-1\right]^{-1}+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{(s_1+p\varepsilon_1/\varepsilon_3)(s_2+p\varepsilon_2/\varepsilon_3)}{(s_1-p\varepsilon_1/\varepsilon_3)(s_2-p\varepsilon_2/\varepsilon_3)}e^{x\sqrt{\varepsilon_3}}-1\right]^{-1}\right\},$$

$$\varepsilon=\varepsilon\left(i\frac{xc}{2pl}\right).$$

由于分母中的 $\exp(x\sqrt{\varepsilon_3})$, 对 $x$ 的积分中起作用的 $x$ 值为 $x\approx\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_3}}\ll1$,而因为 $p\geqslant1$, 则函数 $\varepsilon$ 的变量在整个积分主要区域内很接近零. 与此相应,可将 $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$ 换成它們在 $\omega=0$ 时的值,

1) 这里講的温度的影响,不包括简单地来自介电常数本身与温度关系的影响.

即静电介电常数值. 然后作代换 $x \to \frac{x}{\sqrt{\varepsilon_{30}}}$,得以下最終結果:

$$F = \frac{\hbar c}{32\pi^2 l^4 \sqrt{\varepsilon_{30}}} \int_0^\infty dx \int_1^\infty dp \frac{x^3}{p^2} \left\{ \left[ \frac{(s_{10}+p)(s_{20}+p)}{(s_{10}-p)(s_{20}-p)} e^x - 1 \right]^{-1} + \right.$$
$$\left. + \left[ \frac{(s_{10}+p\varepsilon_{10}/\varepsilon_{30})(s_{20}+p\varepsilon_{20}/\varepsilon_{30})}{(s_{10}-p\varepsilon_{10}/\varepsilon_{30})(s_{20}-p\varepsilon_{20}/\varepsilon_{30})} e^x - 1 \right]^{-1} \right\}, \qquad (31.16)$$

$$s_{10} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{10}}{\varepsilon_{30}} - 1 + p^2}, \quad s_{20} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{20}}{\varepsilon_{30}} - 1 + p^2},$$

其中 $\varepsilon_{10}$, $\varepsilon_{20}$, $\varepsilon_{30}$ 是靜电介电常数.

再看一下高溫情形. 当 $\frac{lT}{\hbar c} \gg 1$, (31.13)式的和中只須保留第一項. 然而这項中不能直接令 $n=0$, 因为会出现不定性(因子 $\omega_n^3$ 等于零,而积分发散). 先引入新积分变量 $x = 2p\omega_n l\sqrt{\varepsilon_{30}}/c$ 以代替 $p$ (因子 $\omega_n^3$ 因而消失),就可以繞过这个困难. 然后令 $\omega_n=0$, 得:

$$F = \frac{T}{16\pi l^3} \int_0^\infty x^2 \left[ \frac{(\varepsilon_{10}+\varepsilon_{30})(\varepsilon_{20}+\varepsilon_{30})}{(\varepsilon_{10}-\varepsilon_{30})(\varepsilon_{20}-\varepsilon_{30})} e^x - 1 \right]^{-1} dx. \qquad (31.17)$$

因此在足够大的距离上相互作用力的下降減慢, 重新遵从 $l^{-3}$ 律, 其系数依赖于温度和靜电介电常数值.

**2. 溶液中原子間的相互作用力.** 现在說明,如何从宏观公式(31.14)过渡到真空中个别原子間的相互作用. 为此我們形式地假設,两个物体都足够"稀薄". 从宏观电动力学的角度看,这就是說它們的介电常数接近1, 即差 $\varepsilon_1-1$ 和 $\varepsilon_2-1$ 很小.

从"近"距离情况开始. 从 $\varepsilon_3=1$ 的(31.15)式以应有的准确度得:

$$F = \frac{\hbar}{64\pi^2 l^3} \int_0^\infty\int_0^\infty x^2 e^{-x}(\varepsilon_1-1)(\varepsilon_2-1)dx d\omega =$$
$$= \frac{\hbar}{32\pi^2 l^3} \int_0^\infty (\varepsilon_1(i\omega)-1)(\varepsilon_2(i\omega)-1)d\omega. \qquad (31.18)$$

根据(28.19)式将 $\varepsilon(i\omega)$ 通过实軸上的 $\varepsilon''(\omega)$ 表示,得到:



$$\int_0^\infty (\varepsilon_1(i\omega)-1)(\varepsilon_2(i\omega)-1)d\omega =$$
$$= \frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\omega_1\omega_2\varepsilon_1''(\omega_1)\varepsilon_2''(\omega_2)}{(\omega_1^2+\omega^2)(\omega_2^2+\omega^2)} d\omega_1 d\omega_2 d\omega =$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\varepsilon_1''(\omega_1)\varepsilon_2''(\omega_2)}{\omega_1+\omega_2} d\omega_1 d\omega_2,$$

由此得力 $F$ 的表示

$$F = \frac{\hbar}{16\pi^3 l^3}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\varepsilon_1''(\omega_1)\varepsilon_2''(\omega_2)}{\omega_1+\omega_2} d\omega_1 d\omega_2. \qquad (31.19)$$

这个力相应于原子間的相互作用能[1]:

$$U(R) = -\frac{3\hbar}{8\pi^4 R^6 N_1 N_2}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\varepsilon_1''(\omega_1)\varepsilon_2''(\omega_2)}{\omega_1+\omega_2} d\omega_1 d\omega_2, \quad (31.20)$$

其中 $R$ 是原子間的距离, $N_1$, $N_2$——第一和第二物体单位体积内的原子数. 介电常数的虛部和光譜学中熟知的"振子力"譜密度 $f(\omega)$ 的关系为(参看[52], § 62):

$$\omega\varepsilon''(\omega) = \frac{2\pi^2 e^2}{m} N f(\omega).$$

将它代入(31.20)式,得到:

$$U(R) = -\frac{3\hbar e^4}{2m^2 R^6}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f_1(\omega_1)f_2(\omega_2)}{\omega_1+\omega_2} d\omega_1 d\omega_2. \qquad (31.21)$$

这个表达式和著名的 London[57] 公式准确一致, 它是对原子間的偶极相互作用运用普通微扰論而得到的. 試以两个氫原子的相互作用为例. 利用状态 $E_0$ 和 $E_n$ 間跃迁振子力的熟知表达式

$$f_{0n} = \frac{2m}{\hbar^2}(E_n - E_0)|x_{0n}|^2$$

---

1) 如果分子1和2的相互作用位能是 $U = -a/R^6$, 则两个以隙 $l$ 相隔的半空間中所有分子成对相互作用的总能量是:

$$U = -\frac{a\pi N_1 N_2}{12 l^2}.$$

而力 $F$ 为:

$$F = -\frac{dU}{dl} = \frac{a\pi N_1 N_2}{6 l^3}.$$

(31.19)和(31.20)式的对应关系就是如此.

($x_{0n}$ 是原子內电子坐标的相应矩陣元)，并在(31.19)式中从对頻率积分变到对原子能級求和，得到氫原子的伦敦公式：

$$U(R) = -\frac{6e^4}{R^6}\sum_{n,m}\frac{|x_{0n}|^2|x_{0m}|^2}{E_n - E_0 + E_m - E_0}.$$

在"远"距离上两个"稀薄"物体的吸引力公式为：

$$F = \frac{\hbar c}{32\pi^2 l^4}(\varepsilon_{10}-1)(\varepsilon_{20}-1)\int_0^\infty x^3 e^{-x}dx\int_1^\infty \frac{1-2p^2+2p^4}{8p^6}dp =$$

$$= \frac{\hbar c}{l^4}\frac{23}{640\pi^2}(\varepsilon_{10}-1)(\varepsilon_{20}-1). \qquad (31.22)$$

这个力相应于两个原子間的相互作用能

$$U(R) = -\frac{23\hbar c}{4\pi R^7}\alpha_1\alpha_2, \qquad (31.23)$$

其中 $\alpha_1$, $\alpha_2$ 是两个原子的静极化率 ($\varepsilon_0=1-4\pi N\alpha$). 公式(31.23)和 Casimir 和 Polder[58] 的量子力学計算結果一致，他們計算了相当远距离上两个原子的吸引，这时推迟效应已經变得重要了。

現在討論两个处于液体中的原子的相互作用(Питаевский[59]). 設想两种不同原子在同一溶剂中的稀溶液，其浓度(每立方厘米中的粒子数)各为 $N_1$ 和 $N_2$. 其次，假定縫隙被純溶剂充满. 被溶解原子的浓度很小时，溶液的介电常数 $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ 和純溶剂的介电常数 $\varepsilon_3 = \varepsilon$ 相去不远. 准确到浓度的一級項，有：

$$\varepsilon_1 = \varepsilon + N_1\left(\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial N_1}\right)_{N_1=0},$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon + N_2\left(\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial N_2}\right)_{N_2=0}.$$

在"近"距离力的(31.15)式中保留同級小量，得到(和(31.18)式的推导相似)：

$$F(l) = \frac{\hbar}{32\pi^2 l^3}N_1N_2\int_0^\infty\left(\frac{\partial\varepsilon_1(i\omega)}{\partial N_1}\right)_{N_1=0}\left(\frac{\partial\varepsilon_2(i\omega)}{\partial N_2}\right)_{N_2=0}\frac{d\omega}{\varepsilon^2(i\omega)}.$$

这个力相当于溶质原子間的相互作用能：

$$U(R) = -\frac{3\hbar}{16\pi^3R^6}\int_0^\infty\left(\frac{\partial\varepsilon_1(i\omega)}{\partial N_1}\right)_{N_1=0}\left(\frac{\partial\varepsilon_2(i\omega)}{\partial N_2}\right)_{N_2=0}\frac{d\omega}{\varepsilon^2(i\omega)}. \qquad (31.24)$$



类似地为"远"距离的能量求得：

$$U(R) = -\frac{23\hbar c}{64\pi^3\varepsilon_0^{5/2}R^7}\left(\frac{\partial\varepsilon_{10}}{\partial N_1}\right)_{N_1=0}\left(\frac{\partial\varepsilon_{20}}{\partial N_2}\right)_{N_2=0}. \qquad (31.25)$$

我們看到，当溶质分子和溶剂的作用強时，它們之間的相互作用力已不由极化率决定。

**3. 固体表面上的薄膜.** 以上发展的范得瓦尔斯力一般理論可用以計算固体表面上液体薄膜的热力学量；自然应設膜的厚度 $l$ 远大于原子間距离。

以前得出了将单位質量液体的化学势通过其中長波电磁輻射格林函数表达的(30.12)式. 可是此式不方便，其原因有二：第一，它含有整个頻率范围內的 $\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}$，这是实驗上完全未研究过的量；第二，它将化学势作为密度 $\rho$ 的函数給出，而通常須知道 $\mu$ 和压力 $p$ 的关系。

討論固体 1 表面上的膜 3，它和自己的蒸汽 2 处于平衡(图 85). 我們将在电磁性質上，把蒸汽当成真空，并在各处令其介电常数 $\varepsilon_2 = 1$.

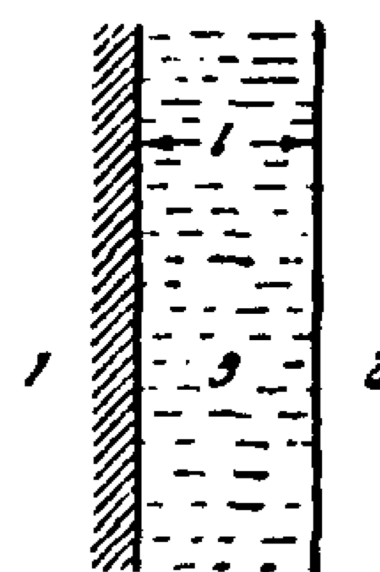


图 87

根据力学平衡条件，应力张量的法綫分量 $\sigma_{xx}$ 应在膜表面上連續. 由此得出方程：

$$p = p_0(\rho, T) - \bar{\sigma}_{xx},$$

其中 $p$ 是蒸汽压，$p_0(\rho,T)$ 是密度和温度一定时大量液体的压力，而 $\bar{\sigma}_{xx}$ 表示膜的应力张量表达式(30.11)中除第一項外其它各項之和. 对 $\rho$ 解此方程，求出密度作为压力的函数1)：

$$\rho = \rho_0(p + \bar{\sigma}_{xx}, T).$$

将此式代入化学势的(30.12)式，得到：

$$\mu = \mu_0(p + \bar{\sigma}_{xx}, T) + \frac{T}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}{}'\frac{\partial\varepsilon(i\omega_n)}{\partial\rho}\mathfrak{D}^E_{ii}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}; \omega_n),$$

其中 $\mu_0(p, T)$ 是大量液体的化学势. 将 $\mu_0$ 按小量 $\bar{\sigma}_{xx}$ 的冪級展

1) $\bar{\sigma}_{xx}$ 也是 $\rho$ 的函数，但由于它是对压力的小修正項，我們可令其 $\rho = \rho_0(p, T)$.

开，并注意热力学关系式 $\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)_T = \frac{1}{\rho}$，上式变成：

$$\mu(p, T) = \mu_0(p, T) + \frac{1}{\rho}\bar{\sigma}_{xx} + \frac{T}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{\partial\varepsilon(i\omega_n)}{\partial\rho}\mathfrak{D}_{ii}^E(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}; \omega_n).$$

最后将 $\bar{\sigma}_{xx}$ 的(30.11)式代入，含有 $\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}$ 的項消去而剩下：

$$\mu(p, T) = \mu_0(p, T) + \frac{1}{\rho}\sigma'_{xx}.$$

这里 $\sigma'_{xx}$ 是应力张量(31.2)的分量．此量不沿膜的厚度变化(由于动量通量恆定)，根据(31.3)式，正是它决定力 $F(l)$．

为液体膜单位体积化学势的"范德瓦尔斯部分"引入符号 $\zeta$：

$$\mu = \mu_0 + \frac{\zeta}{\rho}. \tag{31.26}$$

根据以上所述：

$$\zeta = \sigma'_{xx} = F(l). \tag{31.27}$$

$l$ 趋向无限大，即对大量液体，$\zeta$ 等于零．

因此，为了确定我們关心的量 $\zeta$，沒有必要重新作任何計算．它由前面求得的 $F(l)$ 的式子决定(一般公式(31.13)以及后面的各种极限公式)，只須在式中令 $\varepsilon_2 = 1$．

对 § 30，§ 31 中涉及的間題感兴趣的讀者，可参閱 Дзялошинский，Лифшиц 和 Питаевский[55] 以及 Лифшиц[56] 的詳細論文．



# 第七章　超导理論

## § 32. 概論．模型的选择

**1. 超导現象．** 超导是量子統計中最重要而艰难的間題之一．大家知道，許多金属在温度足够低时經过相变而轉变到新的"超导"态．这种状态中金属的热力学和电磁性質，和它在正常状态中的性質极为不同．实驗上这个轉变最直观的表現是，冷却至临界温度时金属突然失去电阻．換言之，电流在超导体中流过时，不发生能量損耗．

实驗研究表明，超导体在磁場中的性質和正常金属比較簡单的性質有很大差别．磁場不能穿透到大块超导体内部（Meissner-Ochsenfeld 效应）．从处于恆磁場中的超导体表面算起，磁場不为零的有效深度(所謂穿透深度)很小，約为 $\sim 10^{-5}$ 厘米．从正常态到超导态的热力学轉变是二級相变，其特点是金属的比热在轉变温度有跃变．

最近几年对此現象的理解有相当进展．超导理論的发展要求广泛利用量子場論方法．以后几节将敍述这些方法，本节中我們先比較詳細地討論一下間題的物理方面．

很久以来就已經清楚，超导現象和超流現象有相近之处．这首先是因为，为了在超导体中保持电流，不需外电势差，即不需外源作功．金属中的載流子是电子；上述性質乃是电子液体的超流．

第一章中討論氦的超流时，我們詳細地研究了为产生超流所必須的元激发能譜性質．然而应当立即指出，动量很小时超导体能譜不能具有和液体氦相应的形状．实际上液体氦能譜的初始段是声子支．我們知道，声的传播和密度的长波振动相联系．然而对于金属中的电子液体，密度的改变要消耗相当大的能量，这是因

为电子和晶格間，以及电子本身之間的庫伦力妨碍这种改变．电子液体密度的改变要破坏电中性条件，因此相应的長波振动譜和等离子体中振动相似，从某个不为零的頻率开始．事实上在金属中这个頻率很高（～1电子伏特 $\simeq 10^4$°K）．这些論点当然不涉及波矢約为原子間距离倒数的短波振动．我們已經知道，正是这些电子激发在正常金属中起着基本作用．根据第一章的結果，为了存在超流，只須要求激发态和基态之間有一能隙，即能譜应有如图88所示的形状．要注意，除了这里引述的論点之外，低温下电子比热的实驗数据給出了比热和温度的关系 $e^{-\Delta/T}$，这也指明超导体的能譜有上述形状．

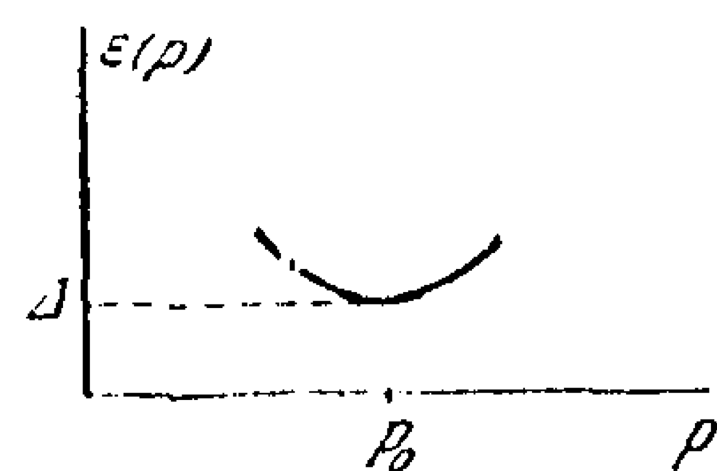



图 88

我們不在此叙述若干唯象理論，它們常常能很好地描述实驗材料．我們仅指出，这些理論不能闡明現象的微观机制．

理解金属中各种作用对发生超导的相对重要性的关鍵，是1950年发現的同位素效应[60,61]．已經証实，临界温度 $T_c$（从正常态到超导态的轉变温度）和同位素質量的关系是 $T_c \sim (M)^{-1/2}$．弗留里希[62]也曾独立地提出假定，認为引起超导的基本相互作用应当是电声子作用．这个相互作用和离子質量密切相关．

**2. 模型．相互作用哈密頓量．** 我們知道，第二章里已講过的相互作用哈密頓量的形状是：

$$H_{int}(x) = g\psi^+(x)\psi(x)\varphi(x). \qquad (32.1)$$

計算两个电子交換一个声子的相互散射矩陣元．这个过程的图解如图89所示． 虛綫代表交換一个声子，它在矩陣元中对应声子的 $D$ 函数：

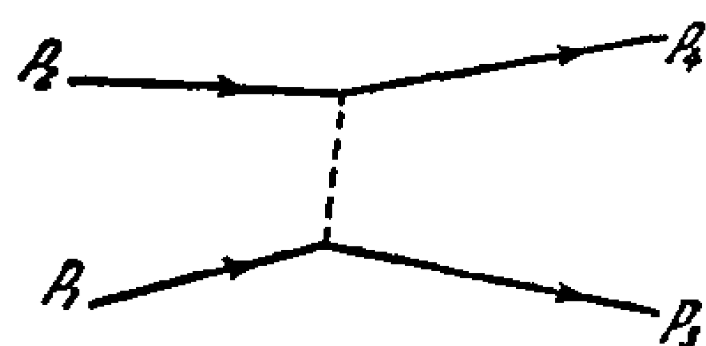


图 89

$$g^2D(\varepsilon_3-\varepsilon_1;\ \mathbf{p}_3-\mathbf{p}_1) = g^2\frac{u^2(\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_1)^2}{(\varepsilon_3-\varepsilon_1)^2-u^2(\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_1)^2},$$

其中 $\varepsilon_3-\varepsilon_1$，$\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_1$ 相应为碰撞电子之一的能量和动量变化．



在費米面附近碰撞时的动量变化一般地为 $p_0$ 的数量級（即 $u|\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_1|$ 約为德拜頻率 $\omega_D$，因为 $p_0\sim a^{-1}$），而电子的能量变化可能不大．在这个区域內，即当 $|\varepsilon_3-\varepsilon_1|\ll\omega_D$ 时，上式所决定的有效相互作用簡单地归結为常数 $-g^2$，即具有相吸性质．

L. Cooper[63] 在1956年証明，費米面附近电子間因电声子作用而致的有效吸引，无論多弱都必定导致电子束縛对的形成．既然成对在能量上有利，加入相互作用后系統基态就会发生改組．为了使这种系統激发，必须消耗一定的能量，它等于电子对的結合能，并在能譜中起能隙的作用． 以这个思想为基础，已証明有可能建立完整的超导理論，来解释几十年紧张研究所积累的大量事实．

我們选定的理論表述和最初的表述（Bardeen, Cooper, Schrieffer[64], Боголюбов[65]1)）不同，因为我們覚得量子場論方法在这个問題中有相当大的优越性．除了簡单严整之外，以下叙述的方法还給出了許多重要的新結果．

在継續叙述之前应指出，电声子相互作用并不是金属中电子間的唯一相互作用．电子之間作用着庫伦排斥力．因此它們之間的有效相互作用是吸引还是排斥，取决于电声子吸引和电子庫伦排斥的数值比較． 在一般情况下对具体金属考虑两种相互作用，是异常复杂的問題． 加之实际超导体是各向异性的． 因此应申明，現代超导理論中实质上討論的是具有平方色散律电子的簡单模型，而且事先設电子相互作用在費米面附近的狭窄能量范围中是吸引． 这个能量范围显然約为所輻射声子的最大能量，即 $\sim\omega_D$，$\omega_D$ 是德拜頻率． 除此之外，我們以后为簡化起見假定相互作用在这个范围內是恆定的，并且足够弱．

直到現在为止，还沒有建立基于費米液体概念，同时考虑了各向异性的超导理論．有意义的是，目前模型虽很粗糙，但理論不仅定性地解释了現象，而且还与現有的实驗数据有相当好的定量符

1) 并参看[66].

台.

写出二次量子化表象中电子間相互作用的有效哈密頓量如下:

$$H_{int}=\frac{\lambda}{2(2\pi)^3}\sum_{p_1+p_2=p_3+p_4}a^+_{p_1\sigma_1}a^+_{p_2\sigma_2}a_{p_3\sigma_2}a_{p_4\sigma_1}\theta_{p_1}\theta_{p_2}\theta_{p_3}\theta_{p_4}, \quad (32.2)$$

其中 $\lambda<0$, 而 $\theta_p$ 是截断因子:

$$\theta_p=\begin{cases}1, & |\varepsilon(\boldsymbol{p})-\varepsilon_F|<\omega_D,\\ 0, & |\varepsilon(\boldsymbol{p})-\varepsilon_F|>\omega_D.\end{cases}$$

这些因子的存在表明,只有能量在費米面附近寬度为 $2\omega_D(\omega_D\ll\varepsilon_F)$ 的窄层内的电子才参与相互作用. 以后我們常将这个哈密頓量通过在坐标表象中的算符 $\psi_\alpha(\boldsymbol{r})$ 和 $\psi^+_\alpha(\boldsymbol{r})$ 写出:

$$H_{int}=\frac{\lambda}{2}\int\psi^+_\alpha(\boldsymbol{r})\psi^+_\beta(\boldsymbol{r})\psi_\beta(\boldsymbol{r})\psi_\alpha(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}, \quad (32.3)$$

这时当然还須注意到,(32.3) 式中四个 $\psi$ 算符的变量实际上略有差别. 这是因为哈密頓量的(32.2)式中有因子 $\theta_p$ 存在. (32.3) 式更确切的写法是:

$$H_{int}=\frac{\lambda}{2}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\theta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\xi}_1)\theta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\xi}_2)\theta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\xi}_3)\theta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\xi}_4)\times$$
$$\times\psi^+_\alpha(\boldsymbol{\xi}_1)\psi^+_\beta(\boldsymbol{\xi}_2)\psi_\beta(\boldsymbol{\xi}_3)\psi_\alpha(\boldsymbol{\xi}_4)d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{\xi}_1\cdots d\boldsymbol{\xi}_4, \quad (32.4)$$

其中 $\theta(\boldsymbol{x})$ 是 $\theta_p$ 的傅立叶反演:

$$\theta(\boldsymbol{x})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}\theta_p d\boldsymbol{p}. \quad (32.5)$$

轉入傅立叶表象后,容易証明 $\theta(\boldsymbol{x})$ 具有 $\delta$ 函数的性質:

$$\int\theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x}),$$

只要函数 $f(\boldsymbol{x})$ 具有仅在动量 $\boldsymbol{p}$ 在費米面附近时才不为零的傅立叶分量 $f_p$. 在以下所述的理論中我們正好遇見这样的函数. (32.3) 式也应在此意义下理解.



## §33. Cooper 現象. 无相互作用費米粒子系統基态对粒子間任意弱吸引的不稳定性

**1. 頂角部分的方程.** 討論具有相互作用 (32.3) 的系統的性質. 先研究絕对零度时的頂角部分 $\Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1, p_2; p_3, p_4)$. 写出此量的微扰論級数. 第一級近似下頂角部分是:

$$\lambda(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}-\delta_{\alpha\delta}\delta_{\gamma\beta}). \quad (33.1)$$

对应微扰論級数前几項的图形示于图 90 中. 我們已經知道,图

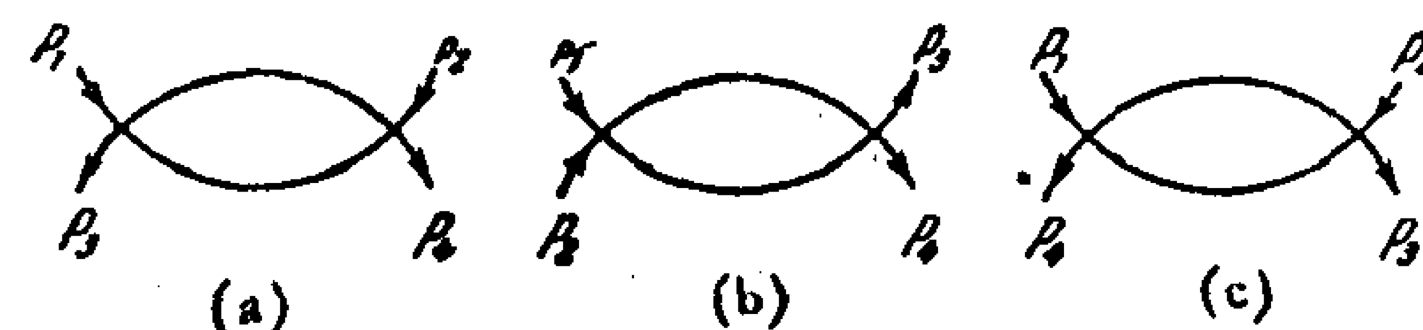



图 90

(a) 和 (c) 与頂角部分中"零声"型奇异性有关,也就是說,这些奇异性在动量传递小时重要. 与图 (b) 相联系的,是 $\Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1, p_2; p_3, p_4)$ 中总四維动量 $q=p_1+p_2$ 很小时的奇异性. 我們較詳細地研究后一情形. 利用所討論模型的具体性質,我們可以得出比一般結果(20.8)式更細致的有关頂角部分的知識.

图 90(b) 的矩陣元等于:

$$\lambda^2\frac{i}{(2\pi)^4}(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}-\delta_{\alpha\delta}\delta_{\gamma\beta})\int d^4k G(k)G(q-k),$$

其中 $q=\{\omega_0, \boldsymbol{q}\}=\{\omega_1+\omega_2, \boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2\}$. 代入格林函数的表达式并对頻率积分得:

$$\frac{\lambda^2}{(2\pi)^3}(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}-\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma})\int\frac{d\boldsymbol{k}}{\omega_0-\varepsilon_0(\boldsymbol{k})-\varepsilon_0(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})+2\mu+i\delta}$$
$$(\varepsilon_0(\boldsymbol{k})>\mu,\ \varepsilon_0(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})>\mu),$$
$$-\frac{\lambda^2}{(2\pi)^3}(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}-\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma})\int\frac{d\boldsymbol{k}}{\omega_0-\varepsilon_0(\boldsymbol{k})-\varepsilon_0(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})+2\mu-i\delta}$$
$$(\varepsilon_0(\boldsymbol{k})<\mu,\ \varepsilon_0(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})<\mu). \quad (33.2)$$

在我們所討論的模型中,只有費米面 $\varepsilon_F\simeq\mu$ 附近很窄的能量范围

內的电子才有相互作用. 因此 (33.2) 式中对 $\boldsymbol{k}$ 的积分受条件 $|\varepsilon_0(\boldsymbol{k})-\mu|$, $|\varepsilon_0(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})-\mu|<\omega_D$ 限制. 設 $\omega_0$, $|\boldsymbol{q}|v \ll \omega_D$, 和通常一样轉到对 $\xi=v(|\boldsymbol{k}|-p_0)$ 积分. 同时在积分中忽略上限数量級約为 $\omega_0$, $|\boldsymbol{q}|v$ 的变化,将(33.2)式改写成:

$$-\frac{\lambda^2 m p_0}{2\pi^2}(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}-\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma})\int_0^{\omega_D}d\xi\times$$

$$\times\int_0^1\left[\frac{1}{\omega_0+2\xi+v|\boldsymbol{q}|x-i\delta}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\xi+v|\boldsymbol{q}|x-\omega_0-i\delta}\right]dx$$

(式中 $x=\cos\theta$, $\theta$ 是矢量 $\boldsymbol{q}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 的夹角). 剩下的积分极为簡易. 选择对数支的条件是, $\omega_0>0$ 时方括弧內第一項的积分为正,而 $\omega_0<0$ 时第二項的积分为正. 我們得到以下表达式:

$$-\frac{\lambda^2 m p_0}{2\pi^2}(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}-\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma})\left[1+\frac{1}{2}\ln\frac{2\omega_D-i\delta}{\omega_0+v|\boldsymbol{q}|-i\delta}+\right.$$

$$+\frac{1}{2}\ln\frac{2\omega_D-i\delta}{-\omega_0+v|\boldsymbol{q}|-i\delta}+$$

$$\left.+\frac{\omega_0}{2v|\boldsymbol{q}|}\left(\ln\frac{\omega_0-i\delta}{\omega_0+v|\boldsymbol{q}|-i\delta}+\ln\frac{v|\boldsymbol{q}|-\omega_0-i\delta}{-\omega_0-i\delta}\right)\right]. \tag{33.3}$$

在 $\omega_0$ 和 $|\boldsymbol{q}|v$ 很小时此式主要項为:

$$-\lambda^2\frac{m p_0}{2\pi^2}(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}-\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma})\ln\frac{\omega_D}{\{\omega_0,\ v|\boldsymbol{q}|\}}.$$

因此当 $\omega_D\gg\omega_0$, $v|\boldsymbol{q}|$ 时,相互作用常数 $\lambda$ 虽很小,但可能被大的对数值所补偿,結果这項和微扰論第一項(33.1)成为同数量級. 可見,为求得 $\omega_0$ 和 $v|\boldsymbol{q}|$ 小值附近,即 $\lambda\ln\frac{\omega_D}{\{\omega_0,\ v|\boldsymbol{q}|\}}\sim1$时的頂角部分,必須和第四章一样,对微扰論級数主要項求和.

为此目的我們写出頂角部分的方程,其中 $q=p_1+p_2$ 很小时引起 $\Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1,p_2;p_3,p_4)$ 奇异性的諸項特別分出:

$$\Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1,p_2;p_3,p_4)=\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1,p_2;p_3,p_4)+$$



$$+\frac{i}{2(2\pi)^4}\int\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta,\xi\eta}(p_1,p_2;k,q-k)G(k)G(q-k)\times$$

$$\times\Gamma_{\xi\eta,\gamma\delta}(k,q-k;p_3,p_4)d^4k. \tag{33.4}$$

方程中 $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1,p_2;p_3,p_4)$ 是在我們关心的意义下不可約的图形矩陣元之和, 即这些图形不能分割成仅以两条电子綫相联的两部分,其中一部分只含进去的外綫,另一部分只含出来的外綫. 积分方程(33.4)的核包含来自两个格林函数积分的大对数項. 由于相互作用常数很小,只須取前几个微扰項作为 $\tilde{\Gamma}$ 就够了,因为 $\tilde{\Gamma}$ 的相应表达式不包括数值很大的量. 然而我們的目的不仅要算出方程式(33.4)核中数量級为 $\lambda\ln\frac{\omega_D}{\omega_0}\sim1$ 的項, 还要試图求得准确到 $\lambda$ 諸項的表达式. 因此初看之下会覺得, 为此須知道准确到微扰論中 $\lambda^2$ 項的 $\tilde{\Gamma}$ 值,因为由(33.4)式中积分得出的对数可能补偿一个 $\lambda$. 考慮 $\tilde{\Gamma}$ 的微扰論二級近似項. 相应图形示于图 91 中. 試估計图(a)的矩陣元值. 省去数字系数,得到:

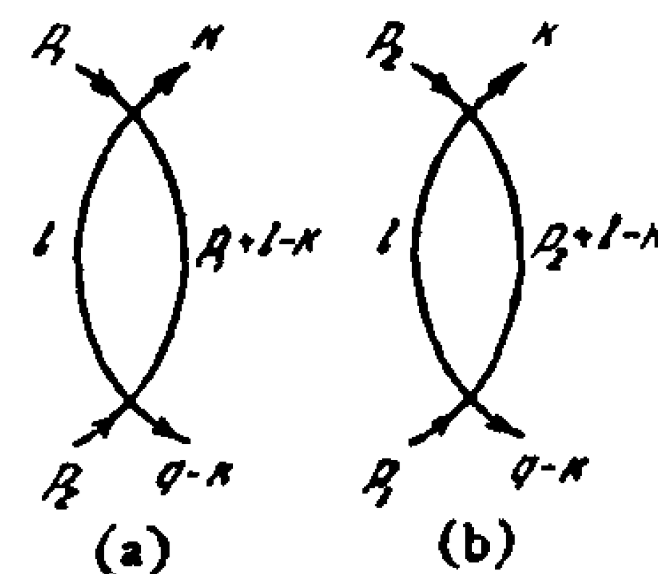


图 91

$$\lambda^2\int G(l)G(l-k+p_1)d^4l.$$

代入格林函数的表达式,对频率积分:

$$\lambda^2\int\frac{d\boldsymbol{l}}{\Omega+\varepsilon_0(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}_1)-\varepsilon_0(\boldsymbol{l})}$$
$$(\varepsilon_0(\boldsymbol{l})>\mu;\varepsilon_0(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}_1)<\mu), \tag{33.5}$$
$$-\lambda^2\int\frac{d\boldsymbol{l}}{\Omega+\varepsilon_0(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}_1)-\varepsilon_0(\boldsymbol{l})}$$
$$(\varepsilon_0(\boldsymbol{l})<\mu;\varepsilon_0(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}_1)>\mu).$$

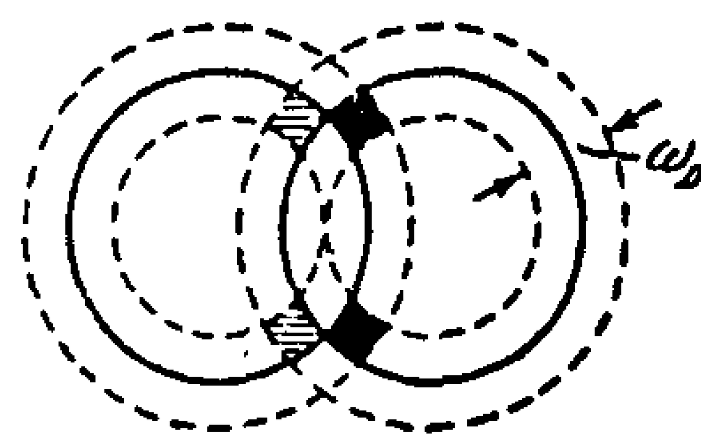


图 92

事实上对 $\boldsymbol{l}$ 的积分区域比上面条件所决定的窄得多. 这是因为根据模型的性质, 只有动量在費米动量附近的电子 $|v(|\boldsymbol{p}|-p_0)|<\omega_D$ 才能参与相互作用. 实际积分区域在图 92 中标

出，(33.5) 式第一条件以横綫条示出，第二条件以黑色表之 ($|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}_1|<2p_0$; 如果 $|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}_1|>2p_0$, 积分区域为零). 两种情形下被积表达式分母中的差 $\varepsilon(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}_1)-\varepsilon(\boldsymbol{l})$ 的値，就数量級說等于 $\omega_D$，而积分区域的体积是 $\sim\frac{m^2\omega_D^2}{p_0}$. 因此图 91 矩陣元的数量級是 $\lambda^2\frac{m^2\omega_D}{p_0}$，即它們与簡单頂点的比値約为 $(\lambda m p_0)\frac{\omega_D}{\varepsilon_F}$. (从(33.3)式看出，所研究的模型中的无量綱的小参量是 $\lambda m p_0\ll 1$). 旣然根据物理条件 $\omega_D\ll\varepsilon_F$，則在所討論的区域內这个附加小量不能被大对数値补偿. 因此方程式(33.4)中的 $\tilde{\Gamma}$ 可只限于用微扰論一級近似的普通頂点(33.1).

这样得到的頂角部分方程容易求解. 为此应注意，从 (33.3) 式看出，$\Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1,p_2;p_3,p_4)$ 只依賴于变量之和 $q=p_1+p_2$. 因此方程式 (33.4) 右端的积分，还原成我們已算出的微扰論二級矩陣元的积分(33.3). 結果得到 ($\omega_0>v|\boldsymbol{q}|$):

$$\Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1,p_2;p_3,p_4)\equiv\Gamma(q)(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}-\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}),$$

$$\Gamma(q)=\lambda\left\{1+\left(\frac{\lambda m p_0}{2\pi^2}\right)\left[\ln e\left|\frac{2\omega_D}{\omega_0}\right|+\frac{\pi i}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2-v^2|\boldsymbol{q}|^2}\right|+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\omega_0}{2v|\boldsymbol{q}|}\ln\left|\frac{\omega_0-v|\boldsymbol{q}|}{\omega_0+v|\boldsymbol{q}|}\right|\right]\right\}^{-1}. \quad (33.6)$$

**2. 頂角部分的性質.** 为了簡单起見，先在 $\boldsymbol{q}=0$ 时討論(33.6)式. 对于 $\omega_0$ 的正实数値得:

$$\Gamma(\omega_0)=\frac{\lambda}{1+\left(\frac{\lambda m p_0}{2\pi^2}\right)\left[\ln\left|\frac{2\omega_D}{\omega_0}\right|+\frac{\pi i}{2}\right]}. \quad (33.7)$$

现在将 $\Gamma(\omega_0)$ 看成复变量 $\omega_0$ 的函数，将它定义为(33.7)式向上半平面 $\operatorname{Im}\omega_0>0$ 的解析延拓. 这时得到:

$$\Gamma(\omega_0)=\frac{\lambda}{1+\left(\frac{\lambda m p_0}{2\pi^2}\right)\left[\ln\left|\frac{2\omega_D}{\omega_0}\right|+\frac{\pi i}{2}-i\varphi\right]}.$$

因此，如果相互作用具有吸引性质($\lambda<0$)，則 $\Gamma(\omega_0)$ 在 $\omega_0=i\Omega$



处有极点，其中

$$\Omega=2\omega_D e^{-\frac{2\pi^2}{|\lambda|m p_0}}. \quad (33.8)$$

极点邻域中 $\Gamma(\omega_0)$ 的形状是:

$$\Gamma(\omega_0)=-\frac{2\pi^2}{m p_0}\frac{i\Omega}{\omega_0-i\Omega}.$$

这个結果应和前面提及的 Cooper 关于两个电子形成束縛对的思想联系起来. 頂角部分 $\Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1,p_2;p_3,p_4)$ 由 (10.17) 式通过双粒子格林函数的傅立叶分量确定. 因此 $\Gamma$ 的极点导致双粒子格林函数的同样极点. 形成束縛对，表明相互作用使我們由之出发的费米气体基态不稳定. 在粒子間加上无論多弱的互相吸引力，就使整个系統改組. 不稳定性表現为，頂角函数在变量 $\omega_0=\omega_1+\omega_2$ 的上半平面出現极点. 这个純虛极点决定不稳定基态的弛豫时間. 这个时間由于測不准原理而对应实际束縛对的結合能. 在改組过的基态中，束縛对有如玻色粒子，也能和普通玻色粒子相似地，以任意数目集聚在最低的能級上. 在超导态里它們处于对的总动量为零的能級上，这和普通玻色粒子的"玻色凝聚"完全相似.

$v|\boldsymbol{q}|$ 不等于零时，(33.6)式可写成以下形式 ($\omega_0>v|\boldsymbol{q}|$):

$$\Gamma(\boldsymbol{q},\omega_0)=\lambda\left\{1+\left(\frac{\lambda m p_0}{2\pi^2}\right)\left[\ln e\left|\frac{2\omega_D}{\omega_0}\right|+\frac{i\pi}{2}-i\varphi-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{v^2|\boldsymbol{q}|^2}{\omega_0^2}\right)+\frac{\omega_0}{2v|\boldsymbol{q}|}\ln\left(\frac{\omega_0-v|\boldsymbol{q}|}{\omega_0+v|\boldsymbol{q}|}\right)\right]\right\}^{-1}.$$

延拓到半平面 $\operatorname{Im}\omega_0>0$，并利用 $\Omega$ 的定义(33.8)得:

$$\Gamma(\boldsymbol{q},\omega_0)=-\frac{2\pi^2}{m p_0}\left\{\ln\frac{\omega_0}{i\Omega}-1+\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{v^2|\boldsymbol{q}|^2}{\omega_0^2}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{\omega_0}{2v|\boldsymbol{q}|}\ln\left(\frac{\omega_0-v|\boldsymbol{q}|}{\omega_0+v|\boldsymbol{q}|}\right)\right\}^{-1}. \quad (33.9)$$

当 $v|\boldsymbol{q}|\ll\Omega$ 时

$$\Gamma(\boldsymbol{q},\omega_0)=-\frac{2\pi^2}{m p_0}\frac{i\Omega}{\omega_0-i\Omega+i(v^2|\boldsymbol{q}|^2/6\Omega)}.$$

令(33.9)式的分母等于零,就定出 $\Gamma(\boldsymbol{q}, \omega_0)$ 作为 $|\boldsymbol{q}|$ 函数的极点. $|\boldsymbol{q}|$ 很小时有:

$$\omega_0 = i\Omega\left(1 - \frac{v^2|\boldsymbol{q}|^2}{6\Omega^2}\right),$$

即 $\omega_0$ 的絕对値減小. 在 $v|\boldsymbol{q}|_{\max}$ 的某个値下, 极点 $\omega_0$ 变成零, $v|\boldsymbol{q}|$ 更大时 $\Gamma$ 沒有极点. 容易确定使 $\omega_0 = 0$ 的 $v|\boldsymbol{q}|_{\max}$ 値:

$$v|\boldsymbol{q}|_{\max} = e\Omega. \tag{33.10}$$

由于 $\boldsymbol{q}$ 是两个粒子系統整体的动量,这个结果説明,只有几乎相向运动的电子才表現出形成束縛对的趋势.

**3. 轉变溫度的确定.** 再指出一次, 上述論点証明, 在低溫下"相吸"粒子系統的普遍基态是不稳定的. 这种不稳定性表现为, 慣性中心几乎静止的粒子能够組成束縛对,即某种玻色粒子,它們"凝聚"在基态上.

首次出現这种不稳定性的溫度, 就是金屬从正常态到超导态的轉变溫度.

为了确定轉变溫度,可利用前面提到的与玻色气体的相似性. 在忽略粒子彼此散射的近似下(弱作用模型), 束縛对形成理想气体. 已經知道,理想玻色气体的溫度格林函数是:

$$\mathfrak{G}(\boldsymbol{q}, i\omega_n) = \left[i\omega_n - \frac{\boldsymbol{q}^2}{2m} + \mu\right]^{-1}$$

它在 $\omega = i\omega_n = i2n\pi T$ 处等于在 $\omega$ 上半平面解析的函数 $G^R(\boldsymbol{q}, \omega)$ 的値. 当 $\omega_n = 0$ 时,它等于 $\left[\mu - \frac{\boldsymbol{q}^2}{2m}\right]^{-1}$. 在某个溫度, $T = T_0$, 即所謂"玻色凝聚"溫度时, 此量初次在 $\boldsymbol{q} = 0$ 点趋向无穷大. 决定溫度 $T_0$ 的条件是 $\mu = 0$.

对束縛对来說, 与这种玻色粒子格林函数相应的是双粒子費米格林函数 (16.5) 式. 后者就对束縛对慣性中心的变量 $\omega_{0n} = (\omega_1 + \omega_2)_n$ 和 $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2$ 的关系說, 应在轉变点附近具有类似的性质. (16.5) 式的費米格林函数对这些变量沒有任何奇异性. 因此我們討論頂角部分 $\mathcal{T}(\boldsymbol{q}, \omega_0)$ (各处都省去自旋变量, $\boldsymbol{q}$ 和 $\omega_0$ 的意义已在前面說明), 將它定义为在 $\omega_0$ 上半平面的解析函数, 而在 $\omega_0 = i(\omega_1 + \omega_2)_n$ 处和热力学方法中的頂角部分一致. 換句話說, 函数 $\mathcal{T}(\boldsymbol{q}, \omega_0)$ 乃是热力学頂角部分 $\mathcal{T}_{\alpha\beta\gamma\delta}(\boldsymbol{p}_1\omega_1, \boldsymbol{p}_2\omega_2; \boldsymbol{p}_3\omega_3, \boldsymbol{p}_4\omega_4) \equiv \mathcal{T}(\boldsymbol{q}, \omega_0)(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma})$ 的解析延拓 (以后将証明, 和 (33.9) 相似, 这个量在我們所考虑的近似下其实只与变量 $\boldsymbol{q}$ 和 $\omega_0$ 有关). 我們根据前述假定, 溫度低于轉变溫度时 $\mathcal{T}(\boldsymbol{q}, \omega_0)$ 在 $\operatorname{Im}\omega_0 > 0$ 处有极点. 在溫度等于轉变溫度时, 函数 $\mathcal{T}(\boldsymbol{q}, \omega_0)$ 首次出現极点 $\omega_0 = 0$.

热力学頂角部分的方程和(33.4)式結构相同:

$$\mathcal{T}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\boldsymbol{p}_1\omega_1, \boldsymbol{p}_2\omega_2; \boldsymbol{p}_3\omega_3, \boldsymbol{p}_4\omega_4) = \tilde{\mathcal{T}}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\boldsymbol{p}_1\omega_1, \boldsymbol{p}_2\omega_2; \boldsymbol{p}_3\omega_3, \boldsymbol{p}_4\omega_4) - $$
$$- \frac{T}{2(2\pi)^3}\sum_{\omega'}\int \tilde{\mathcal{T}}_{\alpha\beta,\xi\eta}(\boldsymbol{p}_1\omega_1, \boldsymbol{p}_2\omega_2; \boldsymbol{k}\omega'; q - \boldsymbol{k}\omega_0 - \omega') \times$$
$$\times \mathfrak{G}(k)\mathfrak{G}(q-k)\mathcal{T}_{\xi\eta,\gamma\delta}(\boldsymbol{k}\omega', \boldsymbol{q} - \boldsymbol{k}\omega_0 - \omega'; \boldsymbol{p}_3\omega_3, \boldsymbol{p}_4\omega_4)d\boldsymbol{k}, \tag{33.11}$$

其中 $\tilde{\mathcal{T}}$ 又是所有不能以一条垂直割綫分成仅以两条同向电子綫相连的两部分的图形矩陣元之和. 基于和前面相同的理由, 对 $\tilde{\mathcal{T}}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\boldsymbol{p}_1\omega_1, \boldsymbol{p}_2\omega_2; \boldsymbol{p}_3\omega_3, \boldsymbol{p}_4\omega_4)$ 只須取微扰論第一級近似即可. 求頂角部分的問題,这时就归結为計算矩陣元中的求和与积分:

$$-\frac{\lambda^2}{(2\pi)^3}T\sum_{\omega'}\int \mathfrak{G}(k)\mathfrak{G}(q-k)d\boldsymbol{k}. \tag{33.12}$$

将格林函数的(14.6)式代入后,容易完成对頻率的簡单求和.

我們將不对任意的 $\omega_0$, $|\boldsymbol{q}|$ 値計算(33.12)式. 从均勻性考虑得知, 同玻色气体一样, $\mathcal{T}(\boldsymbol{q}, \omega_0)$ 中初次出現极点的値是 $\omega_0 = |\boldsymbol{q}| = 0$. 因此只須在 $|\boldsymbol{q}| = \omega_0 = 0$ 处求得方程(33.11)的解. 这个函数趋向无穷大的时刻, 决定从正常态到超导态的轉变溫度. 当 $|\boldsymbol{q}| = \omega_0 = 0$ 时,积分(33.12)式可以变換成:

$$-\frac{\lambda^2}{2\pi^2}mp_0\int_0^{\omega_D}\operatorname{th}\left(\frac{\xi}{2T}\right)\frac{d\xi}{\xi} = -\lambda^2\frac{mp_0}{2\pi^2}\left(\ln\frac{\omega_D}{2T} - \int_0^\infty\frac{\ln x\,dx}{\operatorname{ch}^2 x}\right) \tag{33.13}$$

[分部积分后,由于所剩下的积分收斂,极限 $x = \frac{\omega_D}{2T}$ 可換成无穷大. 积分等于 $-\ln(2\gamma/\pi)$, 其中 $\ln\gamma = C = 0.577$]. 因此:

$$\mathcal{J}(0,0)=\frac{\lambda}{1+\frac{\lambda m p_0}{2\pi^2}\ln\left(\frac{2\omega_D\gamma}{\pi T}\right)}.$$

在轉变温度附近此式可写成：

$$\mathcal{J}(0,0)=-\frac{2\pi^2}{mp_0}\frac{T_c}{T-T_c}, \tag{33.14}$$

其中轉变温度 $T_c$ 等于：

$$T_c=\frac{\gamma}{\pi}2\omega_D e^{-\left(\frac{2\pi^2}{|\lambda|mp_0}\right)}. \tag{33.15}$$

前面引入的频率 $\Omega$ 描述系統在絕对零度时的不稳定性，它的值等于：

$$\Omega=\frac{\pi}{\gamma}T_c. \tag{33.16}$$

## §34. 超导体的基本方程組

**1. 絕对温度零度的超导体.** 現在着手推导描述金属超导态性質的格林函数的方程組（Горьков[67]）. 先限于絕对温度零度的情形. 在我們所討論的模型中，电子系統的总哈密頓量在二次量子化表象中的形式是：

$$\hat{H}=\int\left\{-\left(\psi^+\frac{\nabla^2}{2m}\psi\right)+\frac{\lambda}{2}(\psi^+(\psi^+\psi)\psi)\right\}d\boldsymbol{r},$$

$\lambda<0$

其中 $(\psi^+\psi)\equiv\psi_\alpha^+\psi_\alpha$，而薛定格表象的算符 $\psi(\boldsymbol{r})$ 和 $\psi^+(\boldsymbol{r})$ 滿足普通的对易关系：

$$\{\psi_\alpha(\boldsymbol{r}),\psi_\beta^+(\boldsymbol{r}')\}=\delta_{\alpha\beta}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),$$
$$\{\psi_\alpha(\boldsymbol{r}),\psi_\beta(\boldsymbol{r}')\}=\{\psi_\alpha^+(\boldsymbol{r}),\psi_\beta^+(\boldsymbol{r}')\}=0. \tag{34.1}$$

轉入海森堡表象，其中算符 $\tilde{\psi}$ 和 $\tilde{\psi}^+$ 与时間有关并遵从以下算符方程式：

$$\left\{i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\nabla^2}{2m}\right\}\tilde{\psi}_\alpha(x)-\lambda(\tilde{\psi}^+(x)\tilde{\psi}(x))\tilde{\psi}_\alpha(x)=0,$$
$$\left\{i\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\nabla^2}{2m}\right\}\tilde{\psi}_\alpha^+(x)+\lambda\tilde{\psi}_\alpha^+(x)(\tilde{\psi}^+(x)\tilde{\psi}(x))=0. \tag{34.2}$$



系統的格林函数

$$G_{\alpha\beta}(x,x')=-i\langle T(\tilde{\psi}_\alpha(x)\tilde{\psi}_\beta^+(x'))\rangle$$

的方程可用显而易見的方式得自(34.2)式：

$$\left\{i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\nabla^2}{2m}\right\}G_{\alpha\beta}(x,x')+i\lambda\langle T((\tilde{\psi}^+(x)\tilde{\psi}(x))\tilde{\psi}_\alpha(x),\tilde{\psi}_\beta^+(x'))\rangle$$
$$=\delta(x-x')\delta_{\alpha\beta} \tag{34.3}$$

这个方程式中出現的四个 $\tilde{\psi}$ 算符乘积的平均值，对于不相互作用电子系統，按維克定理分解为算符 $\tilde{\psi}$ 和 $\tilde{\psi}^+$ 的成对平均值. 而对于有相互作用的粒子，四个 $\tilde{\psi}$ 算符的乘积要通过頂角部分表示，即包括了各种散射过程的貢献. 在我們考虑的弱相互作用模型中，可以忽略粒子的彼此散射. 同时应考虑到，系統基态和滿費米球的普通态的差別，在于存在着束縛电子对. 前节里已指出，这些对乃是玻色子，因而能以任何数量聚集在最低能級上. 在沒有外場存在，并且忽略对間散射过程时，它們显然"凝聚"到束縛对作为整体靜止不动的状态中. 討論算符乘积 $\tilde{\psi}\tilde{\psi}$ 或 $\tilde{\psi}^+\tilde{\psi}^+$. 前者消灭、后者产生两个电子. 其特殊情形之一，是这两个电子处于束縛态，換言之，算符 $\tilde{\psi}\tilde{\psi}$ 和 $\tilde{\psi}^+\tilde{\psi}^+$ 中包含有消灭和产生束縛对的項，其中包括处于基态的对. 由于这种对很多（其数目正比于总粒子数），就可以和玻色系統类似地認为它們对算符 $\tilde{\psi}\tilde{\psi}$ 和 $\tilde{\psi}^+\tilde{\psi}^+$ 的相应貢献是普通数. 还須指出，在金属中有特殊理由不去考虑处于基态之外的束縛对. 实际上总动量不为零的束縛电子对，乃是自旋为零的玻色激发. 我們已經提到过，金属中的电中性条件使得从"玻色凝聚体"中激发一个这种对时，需要相当大的能量（$\sim$ 1 电子伏特），它比建立超导理論时所能遇見的特征能量要大得多.

回到格林函数的方程式(34.3). 考虑到以上种种，可将四个 $\tilde{\psi}$ 算符乘积的平均值用一定方式写出. 例如有：

$$\langle T(\tilde{\psi}_\alpha(x_1)\tilde{\psi}_\beta(x_2)\tilde{\psi}_\gamma^+(x_3)\tilde{\psi}_\delta^+(x_4))\rangle=$$
$$=-\langle T(\tilde{\psi}_\alpha(x_1)\tilde{\psi}_\gamma^+(x_3))\rangle\langle T(\tilde{\psi}_\beta(x_2)\tilde{\psi}_\delta^+(x_4))\rangle+$$
$$+\langle T(\tilde{\psi}_\alpha(x_1)\tilde{\psi}_\delta^+(x_4))\rangle\langle T(\tilde{\psi}_\beta(x_2)\tilde{\psi}_\gamma^+(x_3))\rangle+$$
$$+\langle N|T(\tilde{\psi}_\alpha(x_1)\tilde{\psi}_\beta(x_2))|N+2\rangle\langle N+$$

$$+ 2|T(\tilde{\psi}_{\gamma}^{+}(x_3)\tilde{\psi}_{\delta}^{+}(x_4))|N\rangle, \tag{34.4}$$

其中 $N\rangle$ 和 $N+2\rangle$ 是粒子数为 $N$ 和 $N+2$ 的系統基态. 这种写法表明,我們忽略了全部粒子間的散射效应. 相互作用的存在,只在形成束縛对的意义上計入. 等式(34.4)右端第三項和玻色气体情况下的相应項完全相似,因为大量束縛对"凝聚"在基态上. 显然,

$$\langle N|T(\tilde{\psi}\tilde{\psi})|N+2\rangle\langle N+2|T(\tilde{\psi}^{+}\tilde{\psi}^{+})|N\rangle$$

的数量級为束縛对密度.

容易驗証,这样引入的量可写成:

$$\begin{aligned}&\langle N|T(\tilde{\psi}_{\alpha}(x)\tilde{\psi}_{\beta}(x'))|N+2\rangle = e^{-2i\mu t}F_{\alpha\beta}(x-x'),\\&\langle N+2|T(\tilde{\psi}_{\alpha}^{+}(x)\tilde{\psi}_{\beta}^{+}(x'))|N\rangle = e^{2i\mu t}F_{\alpha\beta}^{+}(x-x').\end{aligned} \tag{34.5}$$

对于均匀的問題(无外場),格林函数 $G(x-x')$ 只和坐标差 $x-x'$ 有关. (34.5)式中对时間 $t$ 的附加关系来自量子力学中任何算符 $\tilde{A}(t)$ 对时間微分的一般公式:

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle N|\tilde{A}(t)|N+2\rangle = i(E_N - E_{N+2})\langle N|\tilde{A}(t)|N+2\rangle.$$

根据定义,化学势 $\mu = \dfrac{\partial E}{\partial N}$,因此,能量差 $E_{N+2} - E_N$ 等于 $2\mu$.

把格林函数的表达式(34.4)代入方程式(34.3)时,我們将在各处省去(34.4)式右端的前两項,因为不难驗証,它們只在函数 $G$、$F$ 和 $F^+$ 的方程式中导致化学势的附加修正項,因而无重大意义. 結果我們得到联系函数 $G$ 和 $F^+$ 的如下方程式:

$$\left\{i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\nabla^2}{2m}\right\}\hat{G}(x-x') - i\lambda\hat{F}(0+)\hat{F}^{+}(x-x') = \delta(x-x'). \tag{34.6}$$

(这里 $\hat{G}$, $\hat{F}$, $\hat{F}^+$ 是函数 $G_{\alpha\beta}$, $F_{\alpha\beta}$, $F_{\alpha\beta}^{+}$ 对自旋角标的矩陣写法,其乘积乃是矩陣乘积).

$\hat{F}(0+)$ 定义如下:

$$\begin{aligned}F_{\alpha\beta}(0+) &= e^{2i\mu t}\langle N|\tilde{\psi}_{\alpha}(x)\tilde{\psi}_{\beta}(x)|N+2\rangle =\\&= \lim_{r\to r',\, t\to t'+0} F_{\alpha\beta}(x-x').\end{aligned} \tag{34.7}$$



$\hat{F}^{+}(x-x')$ 的方程可利用(34.2)式的第二个方程类似地求得:

$$\left\{i\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\nabla^2}{2m} - 2\mu\right\}\hat{F}^{+}(x-x') + i\lambda\hat{F}^{+}(0+)\hat{G}(x-x') = 0. \tag{34.8}$$

和(34.7)式对应:

$$F_{\alpha\beta}^{+}(0+) = e^{-2i\mu t}\langle N+2|\tilde{\psi}_{\alpha}^{+}(x)\tilde{\psi}_{\beta}^{+}(x)|N\rangle. \tag{34.9}$$

不存在与粒子自旋有关的相互作用时,格林函数 $\hat{G}(x-x')$ 正比于自旋变量的单位矩陣:

$$\hat{G}_{\alpha\beta}(x-x') = \delta_{\alpha\beta}G(x-x').$$

函数 $\hat{F}$ 和 $\hat{F}^+$ 比例于反对称矩陣 $\hat{I}$. 其实由于算符 $\tilde{\psi}_{\alpha}(x)$ 和 $\tilde{\psi}_{\beta}(x')$ 在同一时刻反对易,則 $F_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}', 0) = -F_{\beta\alpha}(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}, 0)$. 由此得:

$$\{F_{\alpha\beta}^{+}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}', 0)\}^{*} = -F_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}', 0). \tag{34.10}$$

其特例为:

$$\{F_{\alpha\beta}^{+}(0+)\}^{*} = -F_{\alpha\beta}(0+). \tag{34.11}$$

$\hat{F}$ 和 $\hat{F}^+$ 宜写成以下形式:

$$\begin{aligned}\hat{F}^{+}(x-x') &= \hat{I}F^{+}(x-x'),\\\hat{F}(x-x') &= -\hat{I}F(x-x'),\end{aligned} \tag{34.12}$$

其中

$$(\hat{I}^2)_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}.$$

从(34.10)式看出,$F^{+}(x-x')$ 和 $F(x-x')$ 滿足关系式:

$$\{F^{+}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}', 0)\}^{*} = F(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}', 0).$$

$\hat{F}$ 和 $\hat{F}^+$ 对自旋变量的反对称,和束縛对处于单重态一致. 显然,可以把函数 $F_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}', 0)$ 看成是准确到数值因子的束縛对的波函数(束縛对的慣性中心靜止).

消去对自旋变量的依賴性,将方程組写成

$$\left\{i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\nabla^2}{2m}\right\}G(x-x') - i\lambda F(0+)F^{+}(x-x') = \delta(x-x'), \tag{34.13}$$

$$\left\{i\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\nabla^2}{2m} - 2\mu\right\}F^{+}(x-x') + i\lambda F^{+}(0+)G(x-x') = 0,$$

其中

$$(F(0+))^* = F^+(0+).$$

引入諸量的傅立叶分量,得[1]:

$$\left(\omega - \frac{p^2}{2m}\right)G(p) - i\lambda F(0+)F^+(p) = 1,$$

$$\left(\omega + \frac{p^2}{2m} - 2\mu\right)F^+(p) + i\lambda F^+(0+)G(p) = 0. \quad (34.14)$$

以上討論是用粒子数一定的热力学变量进行的. 以化学势 $\mu$ 作独立变量更为方便. 和平常一样,形式上可借代换 $\omega = \omega' + \mu$ 轉到新的变量. 以后我們省去頻率上的一撇,将方程組(34.14)写成:

$$(\omega - \xi)G(p) - i\lambda F(0+)F^+(p) = 1,$$

$$(\omega + \xi)F^+(p) + i\lambda F^+(0+)G(p) = 0, \quad (34.15)$$

其中 $\xi = v(|p| - p_0)$, $p_0 \simeq \sqrt{2m\mu}$ 是費米边界动量, $v = \frac{p_0}{m}$.

解方程組得:

$$G(p) = \frac{\omega + \xi}{\omega^2 - \xi^2 - \Delta^2}, \quad F^+(p) = -i\lambda \frac{F^+(0+)}{\omega^2 - \xi^2 - \Delta^2}$$

以及

$$\Delta^2 = \lambda^2 |F^+(0+)|^2. \quad (34.16)$$

方程組 (34.15) 左端的行列式在点 $\omega = \pm \varepsilon(p)$, $(\varepsilon(p) = \sqrt{\xi^2 + \Delta^2})$处等于零. 因此(34.15)式的解只准确到形如

$$A_1(p)\delta(\omega - \varepsilon(p)) + A_2(p)\delta(\omega + \varepsilon(p)).$$

的任意項. 决定函数 $G$ 和 $F^+$ 中 $A_1$ 和 $A_2$ 取法的边界条件, 是兰道定理(第二章), 根据这个定理格林函数 $G$ 的虛部和 $\omega$ 的符号相反,而函数

$$G^R(\omega, p) = \mathrm{Re}\, G(\omega, p) + i\varepsilon(\omega)\mathrm{Im}\, G(\omega, p)$$

应是解析的并在上半平面无奇点. 不难証明, 滿足这些条件的解是[1]:

$$G(p) = \frac{u_p^2}{\omega - \varepsilon(p) + i\delta} + \frac{v_p^2}{\omega + \varepsilon(p) - i\delta}, \quad (34.17)$$

$$F^+(p) = -i\lambda \frac{F^+(0+)}{(\omega - \varepsilon(p) + i\delta)(\omega + \varepsilon(p) - i\delta)}, \quad (34.18)$$

其中函数 $u_p^2$ 和 $v_p^2$ 等于:

$$u_p^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\xi}{\varepsilon(p)}\right); \quad v_p^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\xi}{\varepsilon(p)}\right). \quad (34.19)$$

格林函数 (34.17) 的正极点 $\omega = \varepsilon(p)$ 决定元激发譜 $\varepsilon(p) = \sqrt{\xi^2 + \Delta^2}$. 这个譜中有能隙 $\Delta$,它可从关系式

$$F^+(0) = (2\pi)^{-4}\int F^+(p)d\omega dp. \quad (34.20)$$

决定. 以(34.18)式代入,得方程式:

$$1 = -\frac{\lambda}{2(2\pi)^3}\int\frac{dp}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}}. \quad (34.21)$$

截断这个发散积分的条件是, 所研究的模型中只有能量在費米面附近厚度为 $2\omega_D$ 层内的电子才参与相互作用. 完成积分,得:

$$1 = -\frac{\lambda}{2\pi^2} m p_0 \ln\frac{2\omega_D}{\Delta}.$$

結果我們得到:

$$\Delta = 2\omega_D e^{-1/\zeta}, \quad (34.22)$$

其中 $\zeta = \frac{|\lambda| m p_0}{2\pi^2}$. 将此式和前一节的結果比較, 我們发现, 絕对温度零度时能譜中能隙的值和轉变温度的关系为:

$$\Delta = \frac{\pi}{\gamma} T_c. \quad (34.23)$$

1) 这个方程組和玻色系統中函数 $G'$ 和 $\hat{G}$ 的方程組极为相似. 然而应注意, 与凝聚体粒子算符 $\xi_0$ 和 $\xi_0^+$ 相似的,是函数 $F$ 和 $F^+$. 因此我們采用有別于玻色粒子 $G'$ 和 $\hat{G}$ 的記号 $G$ 和 $F^+$.

1) 我們取 $F^+(0+)$ 为实数. 这在无外場时总是可能的, 因为方程式 (34.13) 允許有变换 $\{F(x-x'), F(0+)\}\to\{F(x-x')e^{2i\varphi}, F(0+)e^{2i\varphi}\}$, 而 $\{F^+(x-x'), F^+(0+)\}\to\{F^+(x-x')e^{-2i\varphi}, F^+(0+)e^{-2i\varphi}\}$, 相是常数. 詳見下面第 2 段.

**2. 有外电磁場存在时的方程．規范不变性．** 如果超导体处于外場、例如电磁場中，則方程組 (34.13) 将稍复杂些．首先应指出，在外場中所有各函数已不仅是坐标差的函数．在方程式 (34.13) 中引入电磁場的方法，仍是平常的代换：

$$\nabla \to \nabla - ie\boldsymbol{A} \quad 或 \quad \nabla \to \nabla + ie\boldsymbol{A}, \tag{34.24}$$

視对算符 $\tilde{\psi}$ 或 $\tilde{\psi}^+$ 微分而定．(通常采用标量势 $\varphi$ 等于零的規范比較方便)．函数 $G$ 和 $F^+$ 在外場中的方程式为：

$$\left\{i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} - ie\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\right)^2 + \mu\right\}G(x, x') -$$
$$- i\lambda F(x, x)F^+(x, x') = \delta(x - x'),$$
$$\left\{i\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} + ie\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\right)^2 - \mu\right\}F^+(x, x') +$$
$$+ i\lambda F^+(x, x)G(x, x') = 0. \tag{34.25}$$

这些方程式显然是規范不变的．当矢量势作規范变换

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} + \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{r}} \tag{34.26}$$

时，函数 $G$, $F$ 和 $F^+$ 各自变为：

$$G(x, x') \to G(x, x')e^{ie[\varphi(\boldsymbol{r}) - \varphi(\boldsymbol{r}')]},$$
$$F(x, x') \to F(x, x')e^{ie[\varphi(\boldsymbol{r}) + \varphi(\boldsymbol{r}')]},$$
$$F^+(x, x') \to F^+(x, x')e^{-ie[\varphi(\boldsymbol{r}) + \varphi(\boldsymbol{r}')]}, \tag{34.27}$$

而"隙" $|\lambda| F(x, x)$ 或 $|\lambda| F^+(x, x)$ 在外場中一般是 $x$ 的函数，它变换为：

$$F(x, x) \to F(x, x)e^{2ie\varphi(\boldsymbol{r})},$$
$$F^+(x, x) \to F^+(x, x)e^{-2ie\varphi(\boldsymbol{r})}. \tag{34.28}$$

这些方程式的規范不变性，使我們能彻底地研究超导体在磁場中的性質．在指出方程式 (34.25) 的規范不变性时，还应強調，这个事实与哈密頓量的写法(32.3)有关．严格說来，哈密頓量(32.2)并非規范不变的，这当然是模型本身的性質．容易驗証，这个模型中出現于方程式 (34.13) 中的函数 $F$ 和 $F^+$ 在自变量重合时的值，不是 $F(x, x)$，而是



$$\overline{F(x, x)} = \int \theta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{y})\theta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{z})F(y, z)d\boldsymbol{z}\,d\boldsymbol{y}$$

和相应的 $\overline{F^+(x, x)}$．$F(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}; t = t')$ 作为束縛对的波函数，其关联半径約为束縛对的尺寸 $\xi_0 \sim \frac{hv}{T_c}$，而当 $|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}| \gg \xi_0$ 时迅速下降．§ 32 中已指出，函数 $\theta$ 具有 $\delta$ 函数性質，其最大値寬度約为 $v/\omega_D$．因此，将 $\overline{F(x, x)}$ 换成 $F(x, x)$ 所引起的誤差数量級为 $T_c/\omega_D$，这在实际超导体中总是很小的．

**3. 温度高于零的超导体．** 在本节結束前，我們討論如何推广以上方法至温度高于零的情形．这种推广显然应以第三章所述 $T \neq 0$ 的方法为基础．系統在超导态的特性由不等于零的平均值：

$$\mathfrak{F}(x, x') = \frac{\langle T_\tau(\psi(x)\psi(x')\mathfrak{S})\rangle}{\langle \mathfrak{S}\rangle},$$
$$\mathfrak{F}^+(x, x') = \frac{\langle T_\tau(\bar{\psi}(x)\bar{\psi}(x')\mathfrak{S})\rangle}{\langle \mathfrak{S}\rangle}$$

描述(求平均的意义以及算符 $\psi(x)$ 和 $\psi^+(x)$ 的定义同第三章．注意化学势是独立热力学变量)．如果将 $\mathfrak{F}(x, x')$ 和 $\mathfrak{F}^+(x, x')$ 定义中的吉布斯平均，看成对能量等于平均能 $\bar{E}$，而粒子数等于平均粒子数的状态的量子力学平均，则这就表明，电子对的产生和消灭实际上对状态无影响．为此須要求上述电子对属于处在"玻色凝聚"态的束縛对．由于这种对的数目很多(比例于系統整个体积内的总粒子数)，则增减一个对不影响系統的状态．换言之，和在絕对零度时一样，系統处于超导态时，算符乘积 $\psi\psi$ 和 $\psi^+\psi^+$ 中有些项可看成普通数字．我們假定，四个 $\psi$ 算符乘积的 (热力学) 平均值，可以和絕对零度的 (34.4) 式一样，通过格林函数 $\mathfrak{G}(x, x') = -\langle T_\tau(\psi(x)\bar{\psi}(x')\mathfrak{S})\rangle/\langle \mathfrak{S}\rangle$ 以及函数 $\mathfrak{F}(x, x')$ 和 $\mathfrak{F}^+(x, x')$ 表示出来．和前面一样，这表明忽略了粒子間的散射效应．我們有：

$$\frac{\langle T_\tau(\psi_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_2)\bar{\psi}_\gamma(x_3)\bar{\psi}_\delta(x_4)\mathfrak{S})\rangle}{\langle \mathfrak{S}\rangle} =$$
$$= -\mathfrak{G}_{\alpha\gamma}(x_1, x_3)\mathfrak{G}_{\beta\delta}(x_2, x_4) + \mathfrak{G}_{\alpha\delta}(x_1, x_4)\mathfrak{G}_{\beta\gamma}(x_2, x_3) +$$
$$+ \mathfrak{F}_{\alpha\beta}(x_1, x_2)\mathfrak{F}^+_{\gamma\delta}(x_3, x_4). \tag{34.29}$$

我們不在此重复函数 $\mathfrak{G}$ 和 $\mathfrak{F}^+$ 的方程式的推导．它和方程式(34.13)的推导完全相似；下面給出这些方程式的最終形式：

$$\left\{-\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\nabla^2}{2m}+\mu\right\}\mathfrak{G}(x-x')+\Delta\mathfrak{F}^+(x-x')=$$

$$=\delta(x-x'),\tag{34.30}$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\nabla^2}{2m}+\mu\right\}\mathfrak{F}^+(x-x')-\Delta^*\mathfrak{G}(x-x')=0,$$

其中

$$\Delta=|\lambda|\mathfrak{F}(0+),\quad \Delta^*=|\lambda|\mathfrak{F}^+(0+).\tag{34.31}$$

有时須决定函数 $\mathfrak{F}(x-x')$．容易得出相应方程式：

$$\left\{-\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\nabla^2}{2m}+\mu\right\}\mathfrak{F}(x-x')-\Delta\mathfrak{G}(x'-x)=0.$$

这里函数 $\mathfrak{G}$ 的变量换了位置．

不难驗証，函数 $\mathfrak{G}(x-x')$，$\mathfrak{F}^+(x-x')$，$\mathfrak{F}(x-x')$ 和 $\mathfrak{G}(x'-x)$ 的四个方程式可写成矩陣形式：

$$\begin{pmatrix}\left\{-\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\nabla^2}{2m}+\mu\right\} & \Delta\\ +\Delta^* & -\left\{\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\nabla^2}{2m}+\mu\right\}\end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}\mathfrak{G}(x-x') & \mathfrak{F}(x-x')\\ \mathfrak{F}^+(x-x') & -\mathfrak{G}(x'-x)\end{pmatrix}=I\delta(x-x')\tag{34.32}$$

换言之，这四个函数組成(34.30)式左端算符的矩陣格林函数．

我們知道，在温度方法中不把各量展成頻率的傅立叶积分，而展成傅立叶級数．从写出的方程式看出，如果象在第三章中引入格林函数的傅立叶分量那样，引入 $\mathfrak{F}$ 和 $\mathfrak{F}^+$ 的傅立叶分量

$$\mathfrak{F}^+(x-x')=(2\pi)^{-3}T\sum_n e^{-i\omega_n\tau}\int d\boldsymbol{p}e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}}\mathfrak{F}^+_\omega(\boldsymbol{p}),$$

$$\mathfrak{F}(x-x')=(2\pi)^{-3}T\sum_n e^{-i\omega_n\tau}\int d\boldsymbol{p}e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}}\mathfrak{F}_\omega(\boldsymbol{p}),\tag{34.33}$$

其中 $\omega=(2n+1)\pi T$，則与方程組(34.15)对应的是：

$$(i\omega-\xi)\mathfrak{G}_\omega(\boldsymbol{p})+\Delta\mathfrak{F}^+_\omega(\boldsymbol{p})=1,$$

$$(i\omega+\xi)\mathfrak{F}^+_\omega(\boldsymbol{p})+\Delta^*\mathfrak{G}_\omega(\boldsymbol{p})=0,\tag{34.34}$$



滿足这个方程組的函数是：

$$\mathfrak{G}_\omega(\boldsymbol{p})=-\frac{i\omega+\xi}{\omega^2+\xi^2+\Delta^2},\quad \mathfrak{F}^+_\omega(\boldsymbol{p})=\frac{\Delta^*}{\omega^2+\xi^2+\Delta^2}.\tag{34.35}$$

还要指出，无外場时函数 $\mathfrak{F}$ 和 $\mathfrak{F}^+$ 彼此相等，而 $\Delta$ 是实数．和方程組(34.15)情形不同，这里的解是单值的．这是因为热力学函数的解析性質已单值地确定．决定能隙的条件是：

$$1=\frac{|\lambda|T}{(2\pi)^3}\sum_n\int\frac{d\boldsymbol{p}}{\omega+\xi^2+\Delta^2}.\tag{34.36}$$

对頻率的級数不难求和．結果代替 $T=0$ 时的条件(34.21)，我們得到一个新的关系式，它决定温度高于零时能隙的值：

$$1=\frac{|\lambda|mp_0}{2\pi^2}\int_0^{\omega_D}d\xi\frac{\operatorname{th}\frac{\sqrt{\xi^2+\Delta^2(T)}}{2T}}{\sqrt{\xi^2+\Delta^2(T)}}.\tag{34.37}$$

在相变点，即 $T=T_c$ 处，能隙 $\Delta(T)$ 成为零，而条件(34.37)就成为决定轉变温度的条件(33.15)．

## §35. 声子模型中超导理論方程組的推导

現在考慮电子彼此間通过电声子作用而发生关系的模型，并用它推导出超导理論的方程組．自然，这个模型和前面一样具有同一缺点，即未計入金属內的庫伦作用力．它当然比四費米子相互作用模型有更直接的物理意义，虽然后者更便于得出实际結果．声子模型的基本优点，首先在于电声子相互作用哈密頓量(32.1)从一开始就是規范不变的，这就不同于四費米子相互作用哈密頓量(32.2)，后者只在 $T_c\ll\omega_D$ 条件下才近似地規范不变．而一般說来，这个条件只在弱耦合[1]近似下成立．我們以后要証明，弱耦合在超导理論中并不是本质性的限制，而理論中实际的小參量是比值 $\frac{\omega_D}{\varepsilon_F}\ll1\left(\frac{\omega_D}{\omega_F}\sim\frac{u}{v}\sim10^{-2}—10^{-3}\right.$，其中 $u$ 是物体中的声速，

1) 然而实际超导体中总有 $T_c\ll\omega_D$．

而 $v$ 是費米面上的电子速度)[1]. 我們只限于推导在絕对溫度零度时的方程式.

这样,設电子和声子系統的相互作用哈密頓量为:

$$H_{int}(x)=g(\tilde{\psi}^{+}(x)\tilde{\psi}(x))\tilde{\varphi}(x).$$

如果系統处于超导态,則除了格林函数 $G$ 之外,还需两个函数 $F$ 和 $F^{+}$ 来描述它的性質. 因此一般說来,必須研究联系三个函数

$$\hat{G}_{\alpha\beta}(x,x')=-i\langle T(\tilde{\psi}_{\alpha}(x),\tilde{\psi}^{+}_{\beta}(x'))\rangle\equiv\delta_{\alpha\beta}G(x-x'),$$
$$\hat{F}^{+}_{\alpha\beta}(x,x')=\langle T(\tilde{\psi}^{+}_{\alpha}(x),\tilde{\psi}^{+}_{\beta}(x'))\rangle=I_{\alpha\beta}F^{+}(x-x'),\quad(35.1)$$
$$\hat{F}_{\alpha\beta}(x,x')=\langle T(\tilde{\psi}_{\alpha}(x),\tilde{\psi}_{\beta}(x'))\rangle=-I_{\alpha\beta}F(x-x')$$

的三个方程式,以代替普通的戴逊方程式(§21). 至于声子格林函数

$$D(x_1-x_2)=-i\langle T(\varphi(x_1),\varphi(x_2))\rangle$$

的方程式,則我們将看到,它几乎无需改变.

可从微扰論图解法得到格林函数的方程式. 和低于"玻色凝聚"点的玻色系統相似,由于出現了代表函数 $F$ 和 $F^{+}$ 的綫,微扰論中可能有的图形增多了. 我們約定在图上以具有两个箭头的粗綫来代表函数 $G$, $F^{+}$ 和 $F$, 它在点 $x$ 和 $x'$ 处的方向与(35.1)式取一致,即 $\tilde{\psi}$ 算符对应离开此点的箭头,而算符 $\tilde{\psi}^{+}$ 对应进入此点的箭头. 所有三种綫示于图 93 中.

图 93

容易看出,和玻色气体完全相似,存在着三类不可約自能部分,我們分别記为 $\Sigma_{11}(x,x')$, $\Sigma_{20}(x,x')$ 和 $\Sigma_{02}(x,x')$. 图 94 中給出了 $\Sigma_{ik}$ 的图形,其中虛綫代表声子的 $D$ 函数,点代表普通頂点或因子 $g$, 而实心圓或长方形代表因各种电声子作用而改变了的普通頂点.

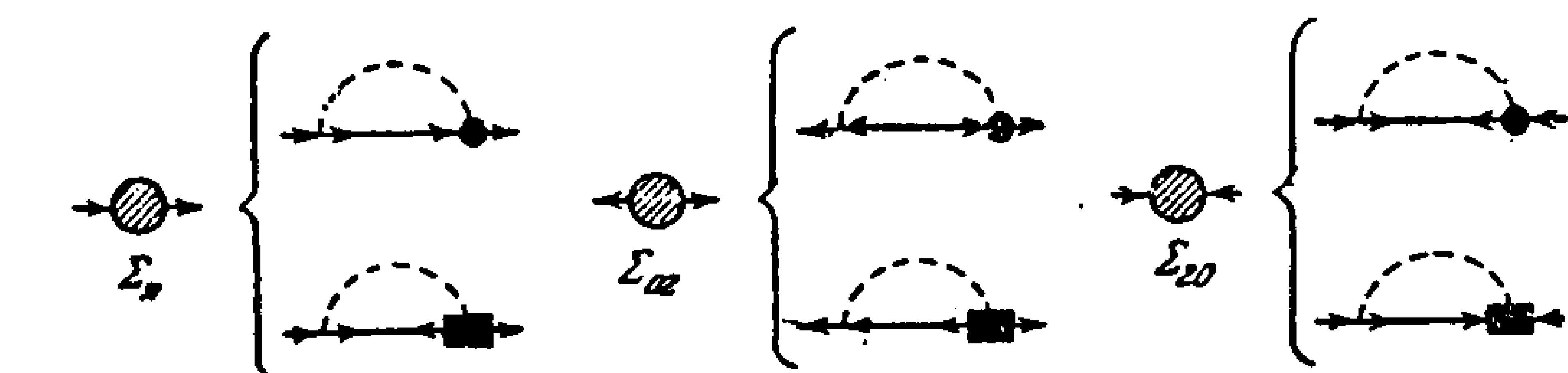


图 94

1) 文献[65,66]研究了超导理論中的电声子相互作用.



引入各函数的傅立叶分量,并討論任一个自能图形,如 $\Sigma_{11}(p)$. 不难看出,在 $\Sigma_{11}(p)$ 的最簡单图形图 95 中,若准确到 $\omega_D/\varepsilon_F$ 可以忽略所有对三端頂角部分的声子修正. 实际上我們在§21中已經証明,在相应的被积表达式中,只有动量約为电子費米动量的声子的 $D$ 函数(和声子頂角)值才是重要的. 基于这个原因,§21中所作的电声子相互作用对声子頂角修正項的估值,在現在討論的情况中仍成立,因为这些修正項决定于能量和动量远离費米面的格林函数值. 同时完全清楚,只有在費米面附近的很窄范围內,当激发能不超过声子最大能量的数量級,即不超过 $\omega_D$ 的数量級时,超导态金属电子格林函数的傅立叶分量才不同于正常态. 同样的,超导态所特有的函数 $F$ 和 $F^{+}$, 也仅在上述范围內不为零. 图 94 上对每个自能部分 $\Sigma_{11}$, $\Sigma_{20}$ 和 $\Sigma_{02}$ 画出了两类可能的图形,其差別在于声子頂角的不同选择. 基于以上所述,我們可以立即忽略第二类图形,其声子頂角以实心长方形表示,因为这类图形只能借助超导格林函数 $F$ 和 $F^{+}$ 构成.



图 95

因此,不可約部分 $\Sigma_{11}$, $\Sigma_{20}$ 和 $\Sigma_{02}$ 中的声子頂角,可只限于微扰論零級近似.

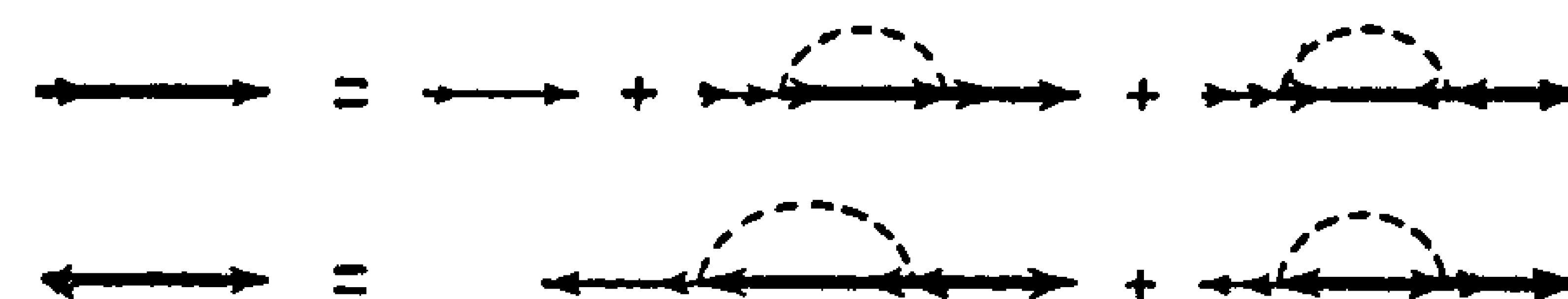


图 96

由于同样的原因,声子格林函数 $D(x_1-x_2)$ 也不变,其傅立叶分量可直接利用表达式(21.14). 函数 $G$ 和 $F^{+}$ 的方程式的結构示于图 96 中,其意义不需更多解释. 我們写出这些方程的解析形式. 在坐标表象中有:

$$\left\{i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\nabla^2}{2m}+\mu\right\}G(x-x')=$$

$$=\delta(x-x')+g^2i\int G(x-z)D(x-z)G(z-x')d^4z+$$

$$+g^2i\int F(x-z)D(x-z)F^+(z-x')d^4z,$$

$$\left\{-i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\nabla^2}{2m}+\mu\right\}F^+(x-x')=$$

$$=g^2i\int G(z-x)D(z-x)F^+(z-x')d^4z+$$

$$+g^2i\int F^+(x-z)D(x-z)G(z-x')d^4z. \qquad (35.2)$$

在这些方程中可引入电磁場，其方法同于§34. 应着重指出，这样得到的方程組是完全規范不变的，这是不同于方程組(34.13)之处，后者的規范不变性只是准确到 $T_c/\omega_D$ 項的近似結果. 可惜的是，方程組(35.2)形状更复杂了，它含有非綫性积分項，这就使它不便在坐标表象中求解，而这正是在許多有不均匀磁場存在的問題中所必須作的. 两个模型中得到的实际結果，通常是等价的.

对于无磁場存在的均匀問題，在方程(35.2)式中轉到动量表象，不难得到各函数的傅立叶分量的方程式：

$$\begin{aligned}&(\omega-\xi-g^2i\bar{G}_\omega)G(p)-g^2i\bar{F}_\omega F^+(p)=1,\\&(-\omega-\xi-g^2i\bar{G}_{-\omega})F^+(p)-g^2i\overline{F_\omega^+}G(p)=0.\end{aligned} \qquad (35.3)$$

这里引入了記号：

$$\bar{G}_\omega=\frac{1}{(2\pi)^4}\int G(p-k)D(k)d^4k,$$

$$\bar{F}_\omega=\frac{1}{(2\pi)^4}\int F(p-k)D(k)d^4k, \qquad (35.4)$$

$$\overline{F_\omega^+}=\frac{1}{(2\pi)^4}\int F^+(p-k)D(k)d^4k.$$

$$\bar{G}_{-\omega}=\bar{G}_\omega(-p)$$

这个方程組和前面得到的方程組(34.15)完全相似. 唯一的不同是，方程式(34.15)中 $\bar{G}_\omega$, $\bar{F}_\omega$ 和 $\overline{F_\omega^+}$ 在費米面附近 $|v(|\boldsymbol{p}|-p_0)|<\omega_D$ 区域内是常量，而在区域外等于零，然而(35.4)式中諸量一般說来是 $\omega$ 和 $p$ 的函数，它們在 $\omega$, $|v(|\boldsymbol{p}|-p_0)|\gg\omega_D$ 时平滑地降至零.

将函数 $G$ 和 $F^+$ 通过 $\bar{G}_\omega$ 和 $\bar{F}_\omega$, $\overline{F_\omega^+}$ 表示：

$$G(p)=\frac{\omega-g^2i\bar{G}_\omega+\xi}{[\omega-\xi-g^2i\bar{G}_\omega][\omega+\xi+g^2i\bar{G}_{-\omega}]-g^4|\overline{F_\omega^+}|^2},$$

$$F^+(p)=\frac{-ig^2\overline{F_\omega^+}}{[\omega-\xi-g^2i\bar{G}_\omega][\omega+\xi+g^2i\bar{G}_{-\omega}]-g^4|\overline{F_\omega^+}|^2}.$$

将这些式子代入 $\bar{G}_\omega$ 和 $\overline{F_\omega^+}$ 的定义(35.4)后，我們得到两个积分方程式，它代替了§21中的一个方程式(21.16). Элиашберг[68] 得到了这些方程式的解. 我們省去計算，引用最終結果. 可以証明，能量小时激发譜的形状是

$$\varepsilon(\boldsymbol{p})=\sqrt{\xi^2+\Delta^2},$$

然而其中 $\xi=v_1(p-p_0)$，却根据(23.31)式含有費米面上的重整速度 $v_1$. 絕对零度时能隙和 $\overline{F_{\omega=0}^+}$ 的关系是：

$$\Delta=g^2\frac{v_1}{v_0}|\overline{F_{\omega=0}^+}|.$$

在弱作用极限 $g^2\ll1$，这些公式和前节的結果一致.

## §36. 超导体的热力学

**1. 能隙和溫度的关系.** 我們比較詳細地研究能隙值和溫度的关系. 先討論低溫 $T\ll T_c$ 情形，并将条件(34.37)作相应展开. 我們有恆等式

$$\frac{1}{\zeta}=\int_0^{\omega_D}\frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2+\Delta^2}}-2\int_0^\infty\frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2+\Delta^2}}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\exp(\sqrt{\xi^2+\Delta^2}/T)+1}, \qquad (36.1)$$

其中 $\zeta=|\lambda|\frac{mp_0}{2\pi^2}$(第二个积分收斂，因而可令积分上限等于无穷大). 在第二个积分号下展开指数項，变到对 $\varepsilon$ 积分，并利用貝塞

尔函数的定义，可将方程式(36.1)写成零阶貝塞尔函数的級数：

$$\ln\frac{\Delta_0}{\Delta}=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}K_0\left(\frac{n\Delta}{T}\right) \tag{36.2}$$

这里 $\Delta_0\equiv\Delta(T=0)$.

低温下 $\Delta\gg T$，利用貝塞尔函数的漸近展开得：

$$\Delta=\Delta_0-\sqrt{2\pi T\Delta_0}\left(1-\frac{T}{8\Delta_0}\right)e^{-\frac{\Delta_0}{T}}. \tag{36.3}$$

能隙在温度接近轉变温度 $T_c$ 时的行为，宜从(34.36)式决定．在 $T_c$ 附近能隙很小，因此(34.36)式中可对 $\frac{\Delta^2}{T^2}$ 的冪展开：

$$\frac{1}{\zeta}=T\sum_n\int_{-\omega_D}^{\omega_D}d\xi\left\{\frac{1}{\omega^2+\xi^2}-\frac{\Delta^2}{(\omega^2+\xi^2)^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{\Delta^4}{(\omega^2+\xi^2)^3}+\cdots\right\}.$$

在右端的收斂項中改变对頻率求和与对 $\xi$ 积分的順序，得：

$$\frac{1}{\zeta}=\int_0^{\omega_D}\frac{d\xi}{\xi}\,\mathrm{th}\,\frac{\xi}{2T}-\frac{\Delta^2}{(\pi T)^2}\sum_0^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}+$$
$$+\frac{3}{4}\frac{\Delta^4}{(\pi T)^4}\sum_0^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^5}+\cdots \tag{36.4}$$

这里的級数通过黎曼的 $\zeta$ 函数表示：

$$\sum_0^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^z}=\frac{2^z-1}{2^z}\zeta(z). \tag{36.5}$$

代入前式得：

$$\ln\frac{T}{T_c}=-\frac{7\zeta(3)}{8}\frac{\Delta^2}{(\pi T)^2}+\frac{93\zeta(5)}{128}\frac{\Delta^4}{(\pi T)^4}+\cdots$$

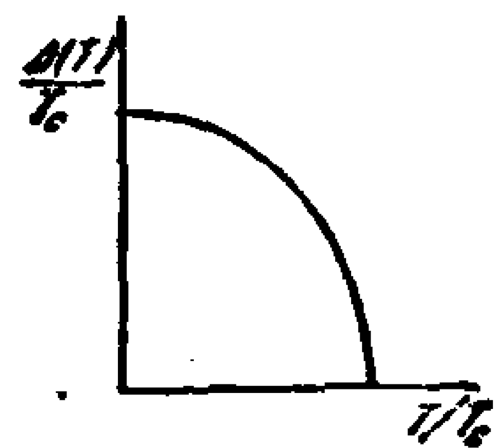


图 97

在 $T_c$ 附近第一級近似下能隙为：

$$\Delta=\pi T_c\sqrt{\frac{8}{7\zeta(3)}}\sqrt{1-\frac{T}{T_c}}\simeq$$
$$\simeq 3.06T_c\sqrt{1-\frac{T}{T_c}}. \tag{36.6}$$



图 97 給出了整个温度范围内能隙与温度的关系．

**2. 超导体的热力学．** 为了求得各种热力学量，我們利用从前导出的热力学势对相互作用常数的微分公式：

$$\frac{\delta\Omega}{\delta\lambda}=\frac{1}{\lambda}\langle H_{int}\rangle.$$

这里 $H_{int}$ 由(32.3)式給出．若在平均値中保留只在超导态中不为零的項，得到(注意 $\lambda<0$)：

$$\frac{\delta\Omega}{\delta|\lambda|}=-\frac{1}{\lambda^2}|\Delta|^2.$$

温度一定时 $\frac{1}{|\lambda|}$ 和 $\Delta$ 的关系由(36.1)式决定．因此金属的热力学势 $\Omega$ 在超导态和正常态之差为：

$$\Omega_s-\Omega_n=\int_0^{\Delta}\left(\frac{d\frac{1}{|\lambda|}}{d\Delta}\right)\Delta^2d\Delta.$$

根据統計物理的一般原理，这个修正項，以相应变量表示，对所有的热力学函数是一样的．根据(36.2)式有：

$$\frac{1}{|\lambda|}=\frac{mp_0}{2\pi^2}\left\{\ln\frac{2\omega_D}{\Delta}-2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}K_0\left(\frac{n\Delta}{T}\right)\right\},$$

再利用貝塞尔函数理論中熟知的公式 $K_0'(x)=-K_1(x)$，得：

$$F_s-F_n=-\left(\frac{mp_0}{2\pi^2}\right)\left\{\frac{\Delta^2}{2}-2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{T^2}{n^2}\int_0^{\frac{n\Delta}{T}}K_1(x)x^2dx\right\}.$$

低温下 $\frac{\Delta}{T}\gg 1$．这时 $\int_0^{\frac{n\Delta}{T}}K_1(x)x^2dx=2-\int_{\frac{n\Delta}{T}}^{\infty}K_1(x)x^2dx$．后一积分仅需对 $n=1$ 算出，为此須利用 $K_1(x)$ 的漸近展开式．

剩下的級数极易对 $n$ 求和．結果得：

$$F_s-F_n=\frac{mp_0T^2}{6}-\frac{mp_0}{2\pi^2}\left[\frac{\Delta^2}{2}+\sqrt{2\pi\Delta_0^3T}\left(1+\frac{15}{8}\frac{T}{\Delta_0}\right)e^{-\Delta_0/T}\right]. \tag{36.7}$$

右端第一項和正常金属自由能对 $T$ 展开的基本項差一符号．我們知道，这項导致正常态电子比热的綫性律：

$$C_n = \frac{mp_0T}{3}.$$

以(36.3)式代入，求出低温下超导态的熵等于:

$$S_s = \frac{mp_0}{\pi^2}\sqrt{\frac{2\pi\Delta_0^3}{T}}e^{-\frac{\Delta_0}{T}},$$

而比热等于:

$$C_s = \frac{mp_0}{\pi^2}\sqrt{\frac{2\pi\Delta_0^5}{T^3}}e^{-\frac{\Delta_0}{T}}.$$

利用 (34.23) 式，由此得到超导态在 $T \ll T_c$ 的比热和正常态在 $T = T_c$ 时比热的比值:

$$\frac{C_s(T)}{C_n(T_c)} = \frac{3}{\gamma}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\Delta_0}{T}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{\Delta_0}{T}\right). \tag{36.8}$$

为了求得温度接近 $T_c$ 时的漸近公式，我們从展开式(36.4)出发:

$$\delta\frac{1}{|\lambda|} = -\left(\frac{mp_0}{2\pi^2}\right)\frac{7\zeta(3)}{(2\pi T)^2}\Delta\delta\Delta.$$

利用(36.6)式得自由能之差为:

$$F_s - F_n = -\left(\frac{mp_0}{2\pi^2}\right)\frac{7\zeta(3)}{16(\pi T)^2}\Delta^4 =$$

$$= -\frac{2mp_0T_c^2}{7\zeta(3)}\left(1-\frac{T}{T_c}\right)^2. \tag{36.9}$$

由此得超导态的熵等于:

$$S_s = -\frac{4mp_0T_c}{7\zeta(3)}\left(1-\frac{T}{T_c}\right) + S_n.$$

再微分一次并保留主要項，得到在轉变点的超导体的比热:

$$C_s(T_c) = C_n(T_c) + \frac{4mp_0}{7\zeta(3)}T_c.$$

因此，在金属轉入超导态的相变点，比热有跃变，它等于 $\frac{4mp_0T_c}{7\zeta(3)}$. 在展开式(36.9)中考虑 $T_c - T$ 的更高次項，得出比热 $C_s(T)$ 和正常态在 $T_c$ 附近的比热 $C_n(T_c)$ 之比:



$$\frac{C_s(T)}{C_n(T_c)} = 2.43 + 3.77\left(\frac{T}{T_c} - 1\right).$$

金属电子比热在 $T_c$ 附近的这种变化示于图 98 中.

超导理論中重要的热力学量是所謂临界磁場 $H_c$. 在給定的温度 $T < T_c$ 下，金属在磁場中既可以处于超导态，也可以处于正常态.

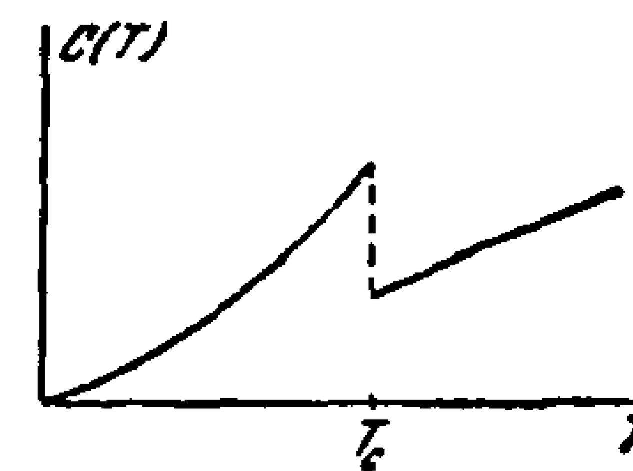



图 98

如果将超导体放入磁場，则屏蔽这个場的表面电流造成磁矩，后者与外場相互作用. 由这个相互作用而来的附加能量是 $-\frac{HM}{2}$(每单位体积). 考虑超导圓柱，处于平行其軸綫的場中. 从超导体內磁場为零条件計算表面电流値，再决定这个电流造成的磁矩，得出附加磁能为 $\frac{H^2}{8\pi}$，即超导体在磁場中的自由能为 $F_{sH} = F_s + \frac{H^2}{8\pi}$. 因此在一定温度下增加磁場，就发生从超导态到正常态的轉变；这种轉变是一級相变. 临界磁場的値等于:

$$\frac{H_c^2}{8\pi} = F_n - F_s.$$

还是以极端情形为限. 对于低温 ($T \ll T_c$) 情况，从(36.3)式和(36.7)式忽略小指数項而得

$$H_c(0) = \sqrt{\frac{2mp_0}{\pi}}\Delta_0 = T_c\frac{\pi}{\gamma}\sqrt{\frac{2mp_0}{\pi}} \tag{36.10}$$

以及

$$H_c(T) = H_c(0)\left(1 - \frac{\gamma^2}{3}\frac{T^2}{T_c^2}\right). \tag{36.11}$$

利用 (36.9) 式，并借助 (36.10) 式将轉变点附近的 $H_c(T)$ 通过 $H_c(0)$ 表示，求得 $H_c(T)$ 在 $T_c$ 附近与温度的关系:

$$H_c(T) = H_c(0)\gamma\sqrt{\frac{8}{7\zeta(3)}}\left(1-\frac{T}{T_c}\right) \simeq$$

$$\simeq 1.73H_c(0)\left(1-\frac{T}{T_c}\right). \tag{36.12}$$

须指出，实验数据通常遵循以下关系：

$$H_c(T) = H_c(0)\left(1 - \frac{T^2}{T_c^2}\right). \qquad (36.13)$$

在两个极端情形下理論公式(36.11)和(36.12)与經驗关系(36.13)相当好地符合(参閱[64]，[69])。

## § 37. 在弱电磁場中的超导体

**1. 弱恒定磁場.** 現在轉到超导体的电磁性質。本节中我們只限于討論超导体在相当弱的場中的行为，外場的值要远小于临界磁場。假定具有平表面的超导体充滿半空間 $z < 0$ (图 99)，恆定磁場平行其表面。引入矢量势 $\boldsymbol{A}$：

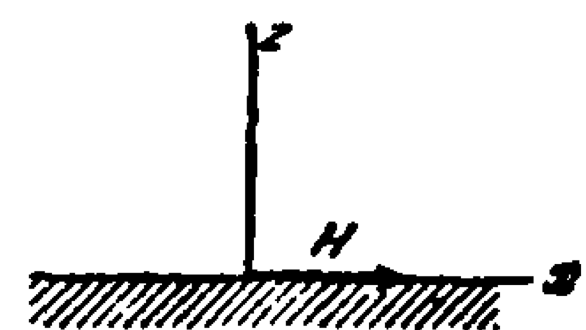



图 99

$$\boldsymbol{H} = \text{rot}\, \boldsymbol{A}.$$

真空中 $\boldsymbol{H}$ = 常数，矢量势可取如：

$$A_y = -Hz, \quad A_x = A_z = 0. \qquad (37.1)$$

在磁場的作用下超导体內产生电流；超导体內場的分布遵从馬克士韦方程：

$$\Delta \boldsymbol{A} = -4\pi \boldsymbol{j}. \qquad (37.2)$$

由于电流本身是外場引起的，則在对外場的綫性近似下电流密度的值比例于 $\boldsymbol{A}$。从无限超导体的均匀性考虑，一般情况下电流密度和場的关系应为：

$$\boldsymbol{j}(x) = -\int Q(x-y)\boldsymbol{A}(y)d^4y \qquad (37.3)$$

或以傅立叶分量表示：

$$\boldsymbol{j}(k) = -Q(k)\boldsymbol{A}(k). \qquad (37.3')$$

我們不打算詳細論述，如何解方程式(37.2)和(37.3)所决定的电磁問題，而只限于推导核 $Q(x-y)$ 的表达式，以便演示量子場論方法对此种情况的应用。

在給定点电流密度 $\boldsymbol{j}$ 的值，乃是熟知的二次量子化电流算符 $\hat{\boldsymbol{j}}(x)$ 的量子力学表达式的热力学平均值：



$$\boldsymbol{j}(x) = \frac{ie}{2m}(\nabla_{r'} - \nabla_r)_{r'\to r}\tilde{\bar{\psi}}(x')\tilde{\psi}(x) - \frac{e^2\boldsymbol{A}(x)}{m}\tilde{\bar{\psi}}(x)\tilde{\psi}(x). \qquad (37.4)$$

因此电流密度 $\boldsymbol{j}(x)$ 可以直接通过系統的格林函数写出：

$$\boldsymbol{j}(x) = 2\left\{\frac{ie}{2m}(\nabla_{r'} - \nabla_r)\mathfrak{G}(x, x') - \frac{e^2\boldsymbol{A}(x)}{m}\mathfrak{G}(x, x')\right\}_{r'\to r,\, \tau'=\tau+0}. \qquad (37.5)$$

我們着手求格林函数，更确切些，求格林函数的一級(就外場值說)修正項。在恆定磁場中所有的格林函数 $\mathfrak{G}$ 和 $\mathfrak{F}$，$\mathfrak{F}^+$ 都只和"时間"坐标的差 $\tau = \tau_1 - \tau_2$ 有关。变换到傅立叶分量 $\mathfrak{G}_\omega$ 和 $\mathfrak{F}_\omega$。在恆定磁場中这些量的方程組为：

$$\left\{i\omega + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} - ie\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\right)^2 + \mu\right\}\mathfrak{G}_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') + \Delta(\boldsymbol{r})\mathfrak{F}^+_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'),$$
$$\left\{-i\omega + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} + ie\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\right)^2 + \mu\right\}\mathfrak{F}^+_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') - \Delta^*(\boldsymbol{r})\mathfrak{G}_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = 0. \qquad (37.6)$$

将格林函数 $\mathfrak{G}$ 和 $\mathfrak{F}^+$ 写成：

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0 + \mathfrak{G}^{(1)}; \quad \mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0 + \mathfrak{F}^{(1)}; \quad \mathfrak{F}^+ = \mathfrak{F}^+_0 + \mathfrak{F}^{+(1)}$$

其中 $\mathfrak{G}_0$，$\mathfrak{F}_0$，$\mathfrak{F}^+_0$ 是无外場时的格林函数，而 $\mathfrak{G}^{(1)}$，$\mathfrak{F}^{(1)}$，$\mathfrak{F}^{+(1)}$ 是綫性(对外場)修正項。将方程組(37.6)綫性化，得：

$$\left\{i\omega + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu\right\}\mathfrak{G}^{(1)}_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') + \Delta_0\mathfrak{F}^{+(1)}_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') =$$
$$= -\Delta^{(1)}(\boldsymbol{r})\mathfrak{F}^+_{0\omega}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') + \frac{ie}{2m}(\nabla\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\nabla)\mathfrak{G}_{0\omega}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'),$$
$$\left\{-i\omega + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu\right\}\mathfrak{F}^{+(1)}_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') - \Delta_0\mathfrak{G}^{(1)}_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') =$$
$$= \Delta^{*(1)}(\boldsymbol{r})\mathfrak{G}_{0\omega}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') - \frac{ie}{2m}(\nabla\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\nabla)\mathfrak{F}^+_{0\omega}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'). \qquad (37.7)$$

由这些方程式很容易将 $\mathfrak{G}_\omega^{(1)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ 和 $\mathfrak{F}_\omega^{+(1)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ 通过(37.7)式右端的量表示. 为此宜利用方程組(37.7)左端算符的逆算符表达式(34.32). 然而在写出 $\mathfrak{G}_\omega^{(1)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ 的相应結果之前，先要比較詳細地討論一下方程組(37.7)的結构.

方程組(37.6)是規范不变的,因之(37.7)式也是規范不变的，卽对变换(34.26)和(34.27)不变. 因此在綫性近似下計算电流 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \frac{ie}{m} T \sum_\omega (\nabla_{r'} - \nabla_r)_{r' \to r} \mathfrak{G}_\omega^{(1)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') - \frac{e^2 \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) N}{m} \quad (37.8)$$

时，最終結果只能和矢量势的横分量有关. 換言之，在 $\boldsymbol{A}$ 上附加任意标量 $\varphi$ 的梯度: $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} + \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{r}}$,不能改变电流 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ 的值.

至于函数 $\mathfrak{G}_\omega^{(1)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$, $\mathfrak{F}_\omega^{+(1)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$, 则根据(34.27)式，它們对矢量势的这种变化并不是不变的. (37.7)式右端的量 $\Delta^{(1)}(\boldsymbol{r})$、$\Delta^{*(1)}(\boldsymbol{r})$ 也是这样，它們应从积分方程式

$$\Delta^{*(1)}(\boldsymbol{r}) = |\lambda| T \sum_\omega \mathfrak{F}_\omega^{+(1)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$$

决定. 对任意的 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$,一般說来 $\Delta(\boldsymbol{r})$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的未知函数. 然而可以断定，在对外場的綫性近似下由于間題的均匀性，函数 $\Delta^{*(1)}(\boldsymbol{r})$ 是标量，只和 $\operatorname{div} \boldsymbol{A}$ 有关. 因此，如果取矢量势的規范为

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0,$$

则可能令 $\Delta^{*(1)}(\boldsymbol{r})$ 恆等于零，从而使間題大为簡化. 以下所得結果都只对純"横"矢量势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ 成立.

在无外場时已不存在空間均匀性的間題中（例如在磁場里的有限尺寸超导体)，还可能推广以上令 $\Delta^{*(1)}$, $\Delta^{(1)}$ 为零的方法. 在这种情形下可用場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ 和矢量 $\boldsymbol{r}$ 或某个間題中的特征矢量构成标量. 因此在不均匀間題的一般情况下，方程式(37.7)(其中 $\mathfrak{G}_0$ 和 $\mathfrak{F}_0$ 应理解为滿足相应边界条件的格林函数)中的 $\Delta^{(1)}(\boldsymbol{r})$, $\Delta^{*(1)}(\boldsymbol{r})$ 旣和矢量 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ 的縱分量、又和横分量有关. 然而总能如此选出縱部分 $\boldsymbol{A}_{縱} = \operatorname{grad} \varphi$,以令 $\Delta^{(1)}(\boldsymbol{r})$, $\Delta^{*(1)}(\boldsymbol{r})$ 等于零. 至于能滿足



此条件的函数 $\varphi$，则它可由 $\operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0$,卽电荷守恆条件决定[1].

現在还回到无限超导体的方程式(37.7). 令 $\Delta^{(1)}(\boldsymbol{r}) = 0$ 并利用(34.32)式,得到格林函数綫性修正項 $\mathfrak{G}_\omega^{(1)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ 的如下表达式:

$$\mathfrak{G}_\omega^{(1)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \frac{ie}{m} \int \{ \mathfrak{G}_{0\omega}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{l})(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{l})\nabla) \mathfrak{G}_{0\omega}(\boldsymbol{l} - \boldsymbol{r}') + \\ + \mathfrak{F}_{0\omega}(\boldsymbol{l} - \boldsymbol{r})(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{l})\nabla) \mathfrak{F}_{0\omega}^{+}(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{l}) \} d\boldsymbol{l}. \quad (37.9)$$

在此式中已用过条件 $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0$，故括弧 $(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{l})\nabla)$ 中的微分只作用在函数 $\mathfrak{G}_{0\omega}(\boldsymbol{l} - \boldsymbol{r}')$ 和 $\mathfrak{F}_{0\omega}^{+}(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{l})$ 上. 根据(37.8)式电流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ 等于:

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \frac{e^2}{m^2} T \sum_\omega (\nabla_r - \nabla_{r'}) \int \{ \mathfrak{G}_{0\omega}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{l})(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{l})\nabla) \mathfrak{G}_{0\omega}(\boldsymbol{l} - \boldsymbol{r}') + \\ + \mathfrak{F}_{0\omega}(\boldsymbol{l} - \boldsymbol{r})(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{l})\nabla) \mathfrak{F}_{0\omega}^{+}(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{l}) \}_{r' \to r} d\boldsymbol{l} - \frac{Ne^2}{m} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}). \quad (37.10)$$

这里宜轉到傅立叶表象，仍以普通方式引入电流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ 和矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ 的傅立叶分量:

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} d\boldsymbol{k}; \quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \boldsymbol{A}(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} d\boldsymbol{k}.$$

分量 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{k})$ 和 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})$ 以如下方程式相联系:

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{k}) = -\frac{2e^2 T}{(2\pi)^3 m^2} \sum_\omega \int \boldsymbol{p}(\boldsymbol{p}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})) \{ \mathfrak{G}_\omega(\boldsymbol{p}_+) \mathfrak{G}_\omega(\boldsymbol{p}_-) + \\ + \mathfrak{F}_\omega(\boldsymbol{p}_+) \mathfrak{F}_\omega^{+}(\boldsymbol{p}_-) \} d\boldsymbol{p} - \frac{Ne^2}{m} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{k}), \quad (37.11)$$

其中 $\boldsymbol{p}_\pm = \boldsymbol{p} \pm \frac{\boldsymbol{k}}{2}$. 再強調一次，这些結果只适用于矢量势的横規范. (然而可以証明，所得公式在任意規范下成立，卽縱部分不出現在最終結果里).

超导体中的場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ 和电流 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ 在数量級为穿透深度 $\delta$ 的距离上变化，其通常值約为 $\sim 10^{-5}$ (卽远大于原子間距离). 因

1) 关于規范不变及与它有关的集体激发間題，文献中已有較深入的討論. 例如，可参看[80, 81]. ——校者注.

此 (37.11) 式中重要的只是在 $k \sim \frac{1}{\delta} \ll p_0$ 区域内的分量 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{k})$ 和 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})$. 我們以后将看到, (37.11) 式核中的积分基本上在費米面附近 $|\boldsymbol{p}|$ 值的窄区間 $||\boldsymbol{p}|-p_0| \sim |\boldsymbol{k}|$ 内进行. 其次, (37.11) 式中只有两个矢量 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})$, 而且 $(\boldsymbol{kA})=0$. 取矢量 $\boldsymbol{k}$ 为积分变量 $\boldsymbol{p}$ 的坐标极軸, 并在方位面内对角度平均, 立刻看出矢量 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{k})$ 平行于矢量 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})$. 基于以上所述, 并将函数 $\mathfrak{G}$ 和 $\mathfrak{F}$ 的表达式(34.35)代入,得:

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{k})=-\frac{Ne^2}{m}\bar{Q}(\boldsymbol{k})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k}),$$

其中

$$\bar{Q}(\boldsymbol{k})=1+\frac{3T}{4}\sum_{\omega}\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,d\theta\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi\times$$
$$\times\frac{(i\omega+\xi_+)(i\omega+\xi_-)+\Delta^2}{[\omega^2+\xi_+^2+\Delta^2][\omega^2+\xi_-^2+\Delta^2]} \qquad (37.12)$$

$\left(\text{我們利用了 } \frac{p_0^3}{3\pi^2}=N\right)$. $\boldsymbol{k}$ 小时, $\xi_\pm=\xi\pm\frac{(\boldsymbol{vk})}{2}$.

为了作进一步計算, 須注意(37.12)式右端的被积表达式当 $\omega$ 和 $\xi$ 很大时的变化为:当 $\omega \gg \xi$ 时,如 $\omega^{-2}$,而当 $\xi \gg \omega$ 时,如 $\xi^{-2}$. 因此严格說来, 对 $\xi$ 的积分和对 $\omega$ 的求和是发散的. 为了理解問題何在,我們考虑对正常金属(即 $\Delta=0$ 时)此式中的奇异性:

$$\frac{3}{4}T\sum_{\omega}\int d\xi\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta\frac{1}{(i\omega-\xi_+)(i\omega-\xi_-)}. \qquad (37.13)$$

首先要注意, 此式中对頻率求和与对 $\xi$ 的积分的顺序极为重要. 实际上当先对 $\xi$ 积分时,不管 $\omega$ 的符号如何,被积表达式的极点总处于实軸一側, 因而結果为零. 现在先对頻率 $\omega=(2n+1)\pi T$ 求和. 容易驗証,这个簡单級数求和的結果是:

$$\frac{3}{8}\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta\int\frac{d\xi}{(\boldsymbol{vk})}\left[\text{th}\frac{\xi_-}{2T}-\text{th}\frac{\xi_+}{2T}\right]=-1. \qquad (37.14)$$

由积分和求和顺序改变而引起的非单值性, 其原因在于整个表达式形式上是发散的. 然而可以看出,問題的实質是,先对頻率求和



时,其結果只在費米面附近很窄的能量范围內才不为零(从(37.14)式知, 这个范围的寬度为 $\sim(\boldsymbol{vk})$). 在这个范围內对动量的积分很快收斂, 正因为如此, 从費米面算起的激发能才可近似地写成 $\xi=\frac{\boldsymbol{p}^2-p_0^2}{2m}\simeq v(|\boldsymbol{p}|-p_0)$. 由于这个原因,在所有这类积分中永远应先对頻率求和,再对 $\xi$ 积分, 因为在相反的情形下, 对 $\xi$ 的积分涉及 $||\boldsymbol{p}|-p_0|\sim p_0$ 的区域,其中所有在費米面附近的展开式都不适用.

然而可以避免在 (37.12) 式中作复杂的对頻率求和. 为此我們作如下处理. 在 (37.12) 式被积表达式中加上再减去正常金属的表达式 (37.13). 这时两个被积表达式之差的积分和对頻率求和迅速收斂, 因而可以变换积分和求和順序. 正常金属的表达式已在(37.14)式中算出,它消去了(37.12)式中的 1. 对 $\xi$ 积分,得:

$$\bar{Q}(\boldsymbol{k})=\frac{3\pi T}{4}\sum_{\omega}\int_{-1}^{+1}\frac{(1-\mu^2)d\mu}{\sqrt{\omega^2+\Delta^2}}\cdot\frac{\Delta^2}{\omega^2+\Delta^2+\frac{1}{4}v^2|\boldsymbol{k}|^2\mu^2}. \qquad (37.15)$$

如果不对 $|\boldsymbol{k}|$ 的值作任何假設, 很难継續变換这个核. 从被积表达式的結构看出, 起作用的只是 $v|\boldsymbol{k}|$ 值和轉变温度 $T_c$ 之比. 事实上当 $T \ll T_c$, 能隙 $\Delta_0$ 的数量級为 $T_c$;在 $T_c$ 附近,即 $|T-T_c| \ll T_c$, 能隙很小,但 $\omega=(2n+1)\pi T\sim T_c$. 具有长度量綱的量 $\xi_0\sim\frac{v}{T_c}$ 是现代超导理論的特征参量, 这是束縛电子的关联半径. 穿透深度 $\delta$ 可能大于, 也可能小于 $\xi_0$. 在第一种情况下, 主要的 $|\boldsymbol{k}|\sim\frac{1}{\delta}$ 滿足不等式 $v|\boldsymbol{k}|\ll T_c$, 而第二种情况由相反的不等式 $v|\boldsymbol{k}|\gg T_c$ 描述.

先討論第一种情况. 設 $v|\boldsymbol{k}|\ll T_c$. 在 (37.15) 式中只保留对 $v|\boldsymbol{k}|$ 的第一个不为零的展开項:

$$\bar{Q}(\boldsymbol{k})=\frac{3\pi}{4}\Delta^2T\sum_{\omega}\int_{-1}^{+1}\frac{(1-\mu^2)d\mu}{(\omega^2+\Delta^2)^{3/2}}=\pi T\Delta^2\sum_{\omega}\frac{1}{(\omega^2+\Delta^2)^{3/2}}. \qquad (37.16)$$

因此，当 $\delta \gg \xi_0$，核 $\bar{Q}(\boldsymbol{k})$ 与 $\boldsymbol{k}$ 无关，电流和場的关系是局域性的，即在点 $\boldsymbol{r}$ 的电流值只由同一点的場值 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ 决定：

$$j(\boldsymbol{r}) = -\frac{e^2N_s}{m}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}). \tag{37.17}$$

H. London 和 F. London[70] 首先建議了这样的方程．因此超导体中 $\delta \gg \xi_0$ 的情形，自然地称为 London 情形．函数 $N_s(T)$ 起着"超导"电子数目的作用．(37.16) 式将比值 $\frac{N_s(T)}{N}$ 作为温度的函数表出．应着重指出，这里的能隙 $\Delta$ 是一定温度下无外場存在时的平衡能隙，它由条件(34.37)式决定．$T = 0$ 时对频率的求和可以换成积分：$2\pi T\delta n = d\omega$．計算积分得出，$T = 0$ 时超导电子的数目等于电子总数 $N$．

在 $T_c$ 附近，$\Delta(T)$ 的值远小于 $T_c$ 和 $\omega$．省去分母中的 $\Delta^2$，得級数：

$$\frac{N_s(T)}{N} = \frac{2\Delta^2}{\pi^2T^2}\sum_{n>0}\frac{1}{(2n+1)^3},$$

它已在 § 36 中算过．利用 $T_c$ 附近能隙的表达式(36.6)，得到，在所討論的情况下：

$$\frac{N_s(T)}{N} = 2\left(1 - \frac{T}{T_c}\right).$$

現在討論第二种极限情况 $v|\boldsymbol{k}| \gg T_c$．被积表达式在点 $\frac{v|\boldsymbol{k}|\mu}{2} = \pm i\sqrt{\omega^2 + \Delta^2}$ 处有极点．既然 $v|\boldsymbol{k}|$ 很大，这就說明被积表达式在相应于 $\mu \simeq \frac{T_c}{v|\boldsymbol{k}|} \ll 1$ 的角度范围内有尖銳的极大值．因此分子中有 $\mu^2$ 的項与一相比，可略而不計．剩下的式子是迅速收斂的对 $\mu$ 的积分，而且在区間 $\frac{T_c}{v|\boldsymbol{k}|} \ll \mu \ll 1$ 内，积分下的式子減小如 $1/\mu^2$．作代换 $v|\boldsymbol{k}|\mu = x$，并令积分限等于无穷大，借助留数理論算出积分得：

$$\bar{Q}(\boldsymbol{k}) = \frac{3T\pi^2}{v|\boldsymbol{k}|}\sum_{\omega>0}\frac{\Delta^2}{\omega^2+\Delta^2} = \frac{3\pi^2}{4v|\boldsymbol{k}|}\Delta\,\mathrm{th}\frac{\Delta}{2T}. \tag{37.18}$$



我們看到，这种情形下核 $\bar{Q}(\boldsymbol{k})$ 与 $\boldsymbol{k}$ 有密切关系．因此如果場的穿透深度 $\delta \ll \xi_0$，則(37.3)式是非局域性的，换言之，給定点电流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ 的值，由这个点附近綫度为 $\xi_0$ 的邻域内矢量势的值决定．Pippard[71] 以实驗数据的分析为基础，首先預言了某些超导体中电流和場的非局域性关系．以后 $\delta \ll \xi_0$ 时的这种情形我們将称为 Pippard 情形．

立刻須指出以下重要情况．我們已經講过，为了确定实际存在的是那一种情形，重要的只是穿透深度 $\delta$ 和参量 $\xi_0 \sim \frac{v}{T_c}$ 的比．因此如果在足够低的温度下条件 $\delta \ll \xi_0$ 成立，則 $\delta$ 随温度接近 $T_c$ 而增加，在足够接近 $T_c$ 的温度区間内发生相反的情形，即 $\delta$ 远大于 $\xi_0$．换言之，在邻近 $T_c$ 的温度区間内总是 London 情形．相当多已知的超导体在几乎整个温度范围内都是 Pippard 型的，而只在很窄的区域 $|T - T_c| \ll T_c$ 内，才变成 London 型．其它超导元素在低温下处于中間情形，因此在 $T_c$ 附近有相当显著的 London 区域．我們在这里未涉及合金的問題(見 § 39)．

有了核 $\bar{Q}(\boldsymbol{k})$ 的表达式 (37.15)，可以借助馬克士韦方程式求解磁場穿透平面超导体的問題．在 London 情形下特别容易求解：将(37.17)式代入(37.2)式，并認为所有的量都只是坐标 $z$ 的函数，我們求得矢量势在超导体內的分布为：

$$A_y(z) = -H_0\delta e^{-\frac{z}{\delta}},$$

其中 $\delta$ 是 London 穿透深度：

$$\delta = \sqrt{\frac{m}{4\pi N_s e^2}}\left(\text{或以普通单位写出 } \delta = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi N_s e^2}}\right). \tag{37.19}$$

在 Pippard 情形下解类似問題就复杂得多，須引用特別的数学方法．我們不在此叙述，而建議直接对超导理論感兴趣的讀者去閱讀原始文献(参閱[64]和[69])．

**2. 交变場中的超导体．** 迄今我們只限于討論超导体在恒定磁場中的性质．然而超导体在交变电磁場中的行为，具体說，电磁輻射在超导体表面吸收和反射的特点，也有很重要的物理意义．

在交变場情形下，不能直接使用前面的热力学的、平衡的处理方法．这时第三章中推导出的，将各种时間函数和热力学方法中相应函数联系起来的解析关系，就极为有益了．設頻率为 $\omega$ 的交变場 $\boldsymbol{A}$（和从前一样令 $\varphi=0$）存在于无限超导体內．超导体內在場的影响下产生的电流，显然仍以(37.3)型的关系式和場相联系．差别只在于对交变場須知道頻率 $\omega$ 不为零的傅立叶分量 $Q(\boldsymbol{k},\omega)$．[前面定义的核 $\bar{Q}(\boldsymbol{k})$，显然就是 $\bar{Q}(\boldsymbol{k})\equiv Q(\boldsymbol{k},0)$]．仍从电流算符的量子力学表达式出发：

$$\hat{\boldsymbol{j}}(x)=\frac{ie}{2m}(\nabla_{r'}-\nabla_r)_{r'\to r}\tilde{\psi}^+(x')\tilde{\psi}(x)-\frac{e^2}{m}\boldsymbol{A}(x)\tilde{\psi}^+(x)\tilde{\psi}(x)\equiv$$

$$\equiv\hat{\boldsymbol{j}}_1(x)-\frac{e^2}{m}\boldsymbol{A}(x)\tilde{\psi}^+(x)\psi(x),$$

式中算符在海森堡表象中写出，它們与外場有关．根据(6.28)式，和相互作用表象相应算符的关系是：

$$\hat{\boldsymbol{j}}=S^{-1}(t)\boldsymbol{j}S(t),$$

其中

$$S(t)=T\exp\left\{i\int_{-\infty}^{t}(\boldsymbol{j}(x)\boldsymbol{A}(x))d^4x\right\}.$$

在对外場的綫性近似下：

$$\hat{j}_\alpha(x)=\hat{j}_{1\alpha}(x)-\frac{e^2}{m}A_\alpha(x)\psi^+(x)\psi(x)+$$

$$+i\int_{-\infty}^{t}[\hat{j}_{1\alpha}(x),\hat{j}_{1\beta}(y)]A_\beta(y)d^4y.$$

超导体中一定点在一定时刻的电流值乃是平均值：

$$\boldsymbol{j}(x)=\langle\hat{\boldsymbol{j}}(x)\rangle=\sum_m e^{\frac{\Omega+\mu N_m-E_m}{T}}\langle m|\hat{\boldsymbol{j}}(x)|m\rangle.$$

由于 $\langle\hat{j}_1\rangle\equiv0$，有：

$$j_\alpha(x)=-\frac{e^2N}{m}A_\alpha(x)+\int P^R_{\alpha\beta}(x-y)A_\beta(y)d^4y,\qquad(37.20)$$

式中我們引入了記号：

$$P^R_{\alpha\beta}(x-y)=\begin{cases}i\langle[\hat{j}_\alpha(x),\hat{j}_\beta(y)]\rangle & \text{当}\ t_x>t_y,\\ 0 & \text{当}\ t_x<t_y.\end{cases}\qquad(37.21)$$



变到傅立叶分量后，积分关系(37.3)的核为：

$$Q_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\omega)=\frac{e^2N}{m}\delta_{\alpha\beta}-P^R_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\omega).$$

現在以温度大于零的方法处理同一問題，形式地認为場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\tau)$ 和 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},\tau)$ 是“时間”参量 $\tau$ 的函数．这时代替(37.20)式的是：

$$j_\alpha(\boldsymbol{r},\tau)=-\frac{e^2N}{m}A_\alpha(\boldsymbol{r},\tau)+\int d\boldsymbol{r}\int_0^\beta\mathscr{P}_{\alpha\beta}(x-y)A_\beta(y)d\tau_y,$$

其中

$$\mathscr{P}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',\tau-\tau')=\langle T(\hat{j}_{\alpha1}(\boldsymbol{r},\tau),\hat{j}_{1\beta}(\boldsymbol{r}',\tau'))\rangle.\quad(37.22)$$

引入热力学量的傅立叶分量，我們求得，以下表达式

$$Q_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\omega_0)=\frac{e^2N}{m}\delta_{\alpha\beta}-\mathscr{P}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\omega_0)$$

起着核 $Q_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\omega_0)$ 的作用，其中 $\omega_0$ 取不連續值 $\omega_0=2n\pi T$．

現在我們以一般形式証明，傅立叶分量 $P^R_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\omega)$ 和 $\mathscr{P}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\omega_0)$ 乃是同一个在上半 $\omega$ 平面解析的复变函数的值，前者取在实軸上，后者取在点 $\omega=i\omega_0$ 处．証明和前几章中作过的完全相同．将(37.21)式和(37.22)式按中間态求和展开．这时为 $P^R_{\alpha\beta}$ 和 $\mathscr{P}_{\alpha\beta}$ 两种情形下定义的傅立叶分量得：

$$P^R_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\omega)=-\sum_{m,p}\rho_{pm}(\boldsymbol{k})\frac{1}{\omega-\omega_{pm}+i\delta},$$

$$\mathscr{P}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\omega_0)=-\sum_{m,p}\rho_{pm}(\boldsymbol{k})\frac{1}{i\omega_0-\omega_{pm}},\qquad(37.23)$$

其中

$$\rho_{pm}(\boldsymbol{k})=e^{\frac{\Omega+\mu N_m-E_m}{T}}\left(1-e^{-\frac{\omega_{pm}}{T}}\right)(j_{\alpha1})_{mp}(j_{\beta1})_{pm}(2\pi)^3\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_{pm}).$$

从(37.23)式看出，在 $\mathscr{P}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\omega_0)$ 中作代换 $\omega_0\to-i\omega$，就得到 $P^R_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\omega)$，而且它在实軸上的值是 $\omega$ 从上面趋向实軸的极限．

这样，以松原方法算得 $\mathscr{P}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\omega_0)$，将其解析延拓到实頻率 $P^R_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\omega)=\mathscr{P}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},-i\omega)$，并要求所得的函数在 $\omega$ 上半平面无奇点，原則上就可以求得交变場中决定 $\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 关系的核 $Q_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\omega)$．

以此为目的，我們形式地討論在对 $\tau$ 交变的場 $A(\boldsymbol{r},\tau)=$

$= A(\boldsymbol{k}, \omega_0)e^{i\boldsymbol{kr}-i\omega_0\tau}$ 中，热力学函数 $\mathfrak{G}$ 和 $\mathfrak{F}^+$ 的方程式. 电流的傅立叶分量的表达式不是(37.11)式，而是:

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{k}, \omega_0) = -\frac{2e^2}{(2\pi)^3 m^2} T \sum_{\omega} \int \boldsymbol{p}(\boldsymbol{p}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k}, \omega_0))[\mathfrak{G}(p_+)\mathfrak{G}(p_-) + \mathfrak{F}(p_+)\mathfrak{F}^+(p_-)]d\boldsymbol{p} - \frac{Ne^2}{m}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k}, \omega_0)$$

(这里 $p_\pm = \left\{\boldsymbol{p} \pm \frac{\boldsymbol{k}}{2}; \omega' \pm \frac{\omega_0}{2}\right\}$). 重复在恆定場中导致(37.15)式的論点，对 $\xi$ 积分后得:

$$\bar{Q}(\boldsymbol{k}, \omega_0) = \frac{3\pi T}{4}\sum_{\omega'}\int_{-1}^{+1}(1-\mu^2)d\mu \times \left\{\frac{i(\omega_+ + \sqrt{\omega_+^2+\Delta^2})[i(\omega_- + \sqrt{\omega_+^2+\Delta^2}) - v|\boldsymbol{k}|\mu] + \Delta^2}{\sqrt{\omega_+^2+\Delta^2}[\omega_-^2 + \Delta^2 + (v|\boldsymbol{k}|\mu - i\sqrt{\omega_+^2+\Delta^2})^2]} + \frac{i(\omega_- + \sqrt{\omega_-^2+\Delta^2})[i(\omega_+ + \sqrt{\omega_-^2+\Delta^2}) + v|\boldsymbol{k}|\mu] + \Delta^2}{\sqrt{\omega_-^2+\Delta^2}[\omega_+^2 + \Delta^2 + (v|\boldsymbol{k}|\mu + i\sqrt{\omega_-^2+\Delta^2})^2]}\right\}. \tag{37.24}$$

和前面一样，为了进一步化簡此式，須对 $v|\boldsymbol{k}|$ 的值作一些假定. 我們限于最有实际意义的情形，即 $v|\boldsymbol{k}| \gg (T_c, \omega_0)$. 这时和从前一样，对 $\bar{Q}(\boldsymbol{k}, \omega_0)$ 的基本貢献来自相应 $\mu \sim \frac{T_c}{v|\boldsymbol{k}|}, \frac{\omega'}{v|\boldsymbol{k}|}$ 的角度范围，因此积分下分子中可省去 $\mu^2$ 項. 剩下的圓括弧中的表达式在 $\mu \gg \frac{T_c}{v|\boldsymbol{k}|}, \frac{\omega'}{v|\boldsymbol{k}|}$ 时，比 $T=0$ 时下降的較慢，即如 $1/\mu$. 因此宜改組(37.24)式各項，以分出下降較慢者:

$$\bar{Q}(\boldsymbol{k}, \omega_0) = \frac{3\pi T}{4}\sum_{\omega'}\int_{-1}^{1}d\mu \times \left\{\frac{\Delta^2 - (\omega_+ + \sqrt{\omega_+^2+\Delta^2})(\omega_- + \sqrt{\omega_-^2+\Delta^2})}{\sqrt{\omega_+^2+\Delta^2}[\omega_-^2 + \Delta^2 + (v|\boldsymbol{k}|\mu - i\sqrt{\omega_+^2+\Delta^2})^2]} + \frac{\Delta^2 - (\omega_- + \sqrt{\omega_-^2+\Delta^2})(\omega_+ + \sqrt{\omega_+^2+\Delta^2})}{\sqrt{\omega_-^2+\Delta^2}[\omega_+^2 + \Delta^2 + (v|\boldsymbol{k}|\mu + i\sqrt{\omega_-^2+\Delta^2})^2]} - i\frac{\omega_+ + \sqrt{\omega_+^2+\Delta^2}}{\sqrt{\omega_+^2+\Delta^2}[v|\boldsymbol{k}|\mu - i(\sqrt{\omega_+^2+\Delta^2} + \sqrt{\omega_-^2+\Delta^2})]} + i\frac{\omega_- + \sqrt{\omega_-^2+\Delta^2}}{\sqrt{\omega_-^2+\Delta^2}[v|\boldsymbol{k}|\mu + i(\sqrt{\omega_+^2+\Delta^2} + \sqrt{\omega_-^2+\Delta^2})]}\right\}.$$



完成积分并取极限 $v|\boldsymbol{k}| \to \infty$，得到:

$$\bar{Q}(\boldsymbol{k}, \omega_0) = \frac{3\pi^2 T}{4v|\boldsymbol{k}|}\sum_{\omega'}\left[1 + \frac{\Delta^2 - \omega'(\omega' - \omega_0)}{\sqrt{\omega'^2+\Delta^2}\sqrt{(\omega'-\omega_0)^2+\Delta^2}}\right]. \tag{37.25}$$

当 $\omega_0 = 0$，这个結果回到(37.18)式.

既然(37.25)式求和时 $\omega$ 取值 $\omega = (2n+1)\pi T$，$\bar{Q}(\boldsymbol{k}, \omega_0)$ 可表示成迴路积分:

$$\bar{Q}(\boldsymbol{k}, \omega_0) = \frac{3\pi i}{16v|\boldsymbol{k}|}\int_C \operatorname{tg}\frac{\omega'}{2T}\left\{1 + \frac{\Delta^2 - \omega'(\omega' - \omega_0)}{\sqrt{\omega'^2+\Delta^2}\sqrt{(\omega'-\omega_0)^2+\Delta^2}}\right\}d\omega, \tag{37.26}$$

其中迴路 $C$ 由图 100 所示的两部分，$C_+$ 和 $C_-$ 組成. 函数 $\sqrt{\omega'^2+\Delta^2}$ 和 $\sqrt{(\omega'-\omega_0)^2+\Delta^2}$ 的解析支的选取也示于同一图中：在割綫上这些函数取純虛値，而且在上割綫右側和下割綫左側，虛部是正的. 从对迴路 $C_+$ 和 $C_-$ 的积分变到对四条迴路 $C_+^{(1,2)}$ 和 $C_-^{(1,2)}$ 积分(图 101). 容易看出，沿 $C_+^{(2)}$ 和 $C_-^{(2)}$ 的积分形式地作为 $\omega_0$ 的函数，

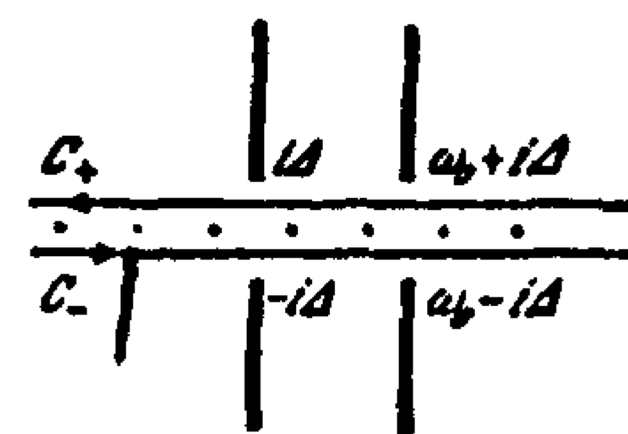


图 100

在 $\omega_0 = (2n+1)\pi T$ 处有奇异性，因为这时积分迴路經过点 $\omega' = (2n+1)\pi T$，該处 $\operatorname{tg}\frac{\omega'}{2T}$ 等于无穷大. 因此为了确定在变量 $\omega = i\omega_0$ 上半平面解析的函数支，須在特殊值 $\omega = 2n\pi T$ 处变换(37.26)式，以便此式推广到任意 $\omega$ 值后，积分迴路不通过被积表达式的奇点. 为此我們注意到，当 $\omega_0 = 2n\pi T$ 时，由于 $\operatorname{tg}\frac{\omega'}{2T}$ 的周期性，沿 $C_-^{(2)}$ 的积分等于沿 $C_+^{(1)}$ 的积分（沿 $C_+^{(2)}$ 和 $C_-^{(1)}$ 的积分亦等). 只要在沿 $C_-^{(2)}$ 的积分中作变量代换 $\omega' - \omega_0 = -u$，就容易

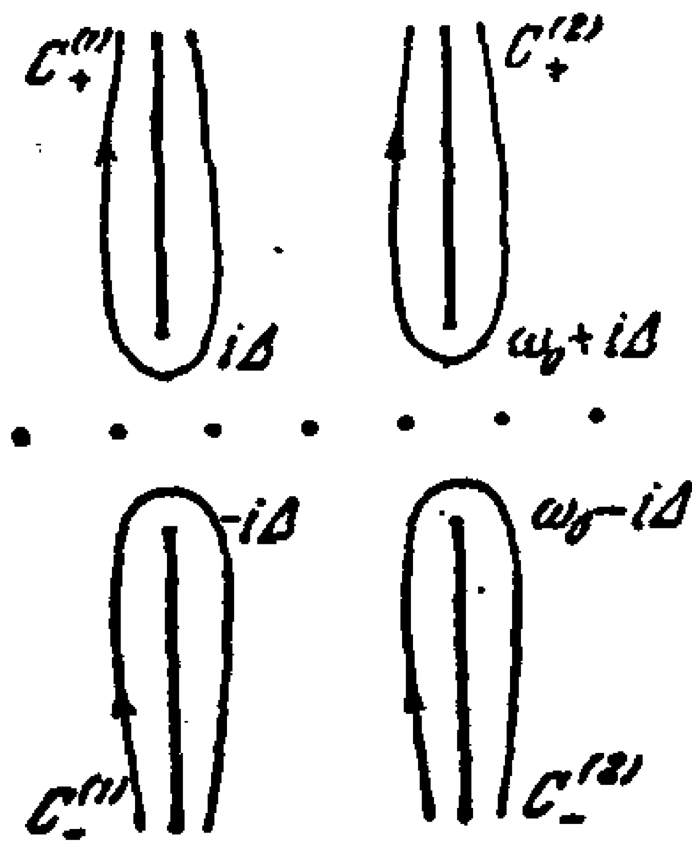



图 101

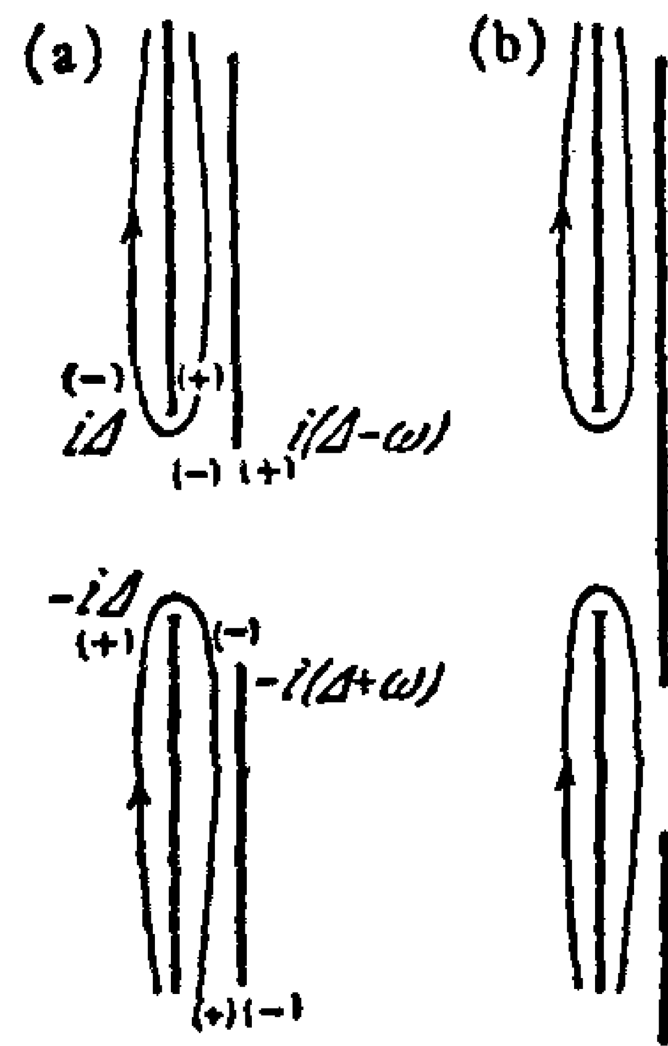



图 102

証明上述論断。因此(37.26)式可改写成:

$$\bar{Q}(\boldsymbol{k},\omega_0)=\frac{3\pi i}{8v|\boldsymbol{k}|}\left(\int_{C_-^{(1)}}+\int_{C_+^{(1)}}\right)\times$$
$$\times\left\{\operatorname{tg}\frac{\omega'}{2T}\left[1+\frac{\Delta^2-\omega'(\omega'-\omega_0)}{\sqrt{\omega'^2+\Delta^2}\sqrt{(\omega'-\omega_0)^2+\Delta^2}}\right]\right\}d\omega$$

所得表达式作为参量 $\omega=i\omega_0$ 的函数，乃是在 $\omega$ 上半平面解析的函数，因为这种情形下 $\operatorname{Im}\omega>0$ 时的积分迴路不通过被积表达式的任何奇点。

我們关心的 $\omega>0$ 时的 $\bar{Q}(\boldsymbol{k},\omega)$ 可以直接写出。这时出現两种情形: (a) $\omega<2\Delta$ 和 (b) $\omega>2\Delta$. 两种情况下的計算可簡单地按图 102 完成，图中括弧里指明了割綫各侧函数虚部的符号。下面給出最終結果[72,73]:

(a) $\omega<2\Delta$

$$\bar{Q}(\boldsymbol{k},\omega)=\frac{3\pi}{4v|\boldsymbol{k}|}\left\{\int_{\Delta}^{\Delta+\omega}\operatorname{th}\frac{\omega'}{2T}\,\frac{\omega'(\omega'-\omega)+\Delta^2}{\sqrt{\omega'^2-\Delta^2}\sqrt{\Delta^2-(\omega'-\omega)^2}}d\omega'+\right.$$
$$\left.+\,i\int_{\Delta}^{\infty}\left[\operatorname{th}\frac{\omega'}{2T}-\operatorname{th}\frac{\omega'+\omega}{2T}\right]\frac{\omega'(\omega'+\omega)+\Delta^2}{\sqrt{\omega'^2-\Delta^2}\sqrt{(\omega'+\omega)^2-\Delta^2}}d\omega'\right\},$$

(b) $\omega>2\Delta$



$$\bar{Q}(\boldsymbol{k},\omega)=\frac{3\pi}{4v|\boldsymbol{k}|}\left\{\int_{\omega-\Delta}^{\omega+\Delta}\operatorname{th}\frac{\omega'}{2T}\,\frac{\omega'(\omega'-\omega)+\Delta^2}{\sqrt{\omega'^2-\Delta^2}\sqrt{\Delta^2-(\omega'-\omega)^2}}d\omega'+\right.$$
$$+\,i\int_{\Delta}^{\omega-\Delta}\operatorname{th}\frac{\omega'}{2T}\,\frac{\omega'(\omega'-\omega)+\Delta^2}{\sqrt{\omega'^2-\Delta^2}\sqrt{(\omega'-\omega)^2-\Delta^2}}d\omega'+$$
$$\left.+\,i\int_{\Delta}^{\infty}\left[\operatorname{th}\frac{\omega'}{2T}-\operatorname{th}\frac{\omega'+\omega}{2T}\right]\frac{\omega'(\omega'+\omega)+\Delta^2}{\sqrt{\omega'^2-\Delta^2}\sqrt{(\omega'+\omega)^2-\Delta^2}}d\omega'\right\}.$$

## § 38. 任意磁場中的超导体在轉变溫度附近的性質

超导体在临界温度附近的性质是一种特殊情形。这时能隙足够小，因而所有的方程式大为簡化。从 § 36 节的結果 (36.4) 式容易看出，可将方程式按 $1-\frac{T}{T_c}\ll 1$ 展开。此外我們已在上节指出，在 $T_c$ 附近弱磁場的穿透深度 $\delta\gg\xi_0$，即所有在場中的量，包括場本身，在远大于理論中参量 $\xi_0\sim\frac{v}{T_c}$ 的距离上才有显著变化。由于这种情况，在这个温度范围内可以建立描述超导体在任意磁場(数量級为临界磁場)中性质的理論 (Горьков[74])。

我們为此重新写出方程式(37.6):

$$\left\{i\omega+\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}-ie\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\right)^2+\mu\right\}\mathfrak{G}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+$$
$$+\Delta(\boldsymbol{r})\mathfrak{F}_\omega^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),$$
$$\left\{-i\omega+\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}+ie\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\right)^2+\mu\right\}\mathfrak{F}_\omega^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')-$$
$$-\Delta^*(\boldsymbol{r})\mathfrak{G}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=0$$

以及决定能隙数值的方程式:

$$\Delta^*(\boldsymbol{r})=|\lambda|T\sum_\omega\mathfrak{F}_\omega^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}).\tag{38.1}$$

既然 $|\Delta|$ 很小，我們将函数 $\mathfrak{F}_\omega^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 按 $|\Delta|$ 的冪展开并代入(38.1)式，就求得 $\Delta^*(\boldsymbol{r})$ 的方程式。这时宜引入正常金屬(在場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ 中)的电子格林函数的傅立叶分量 $\tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$. $\tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 满足的方程式可以两种方式写出:

$$\left\{i\omega + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} - ie\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\right)^2 + \mu\right\}\tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \tag{38.2}$$

或者

$$\left\{i\omega + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}'} + ie\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}')\right)^2 + \mu\right\}\tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'). \tag{38.2'}$$

借助函数 $\tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ 和上面第二个方程式，将 $\mathfrak{G}_\omega$ 和 $\mathfrak{F}_\omega^+$ 的方程式写成积分形式：

$$\mathfrak{G}_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') - \int \tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{l})\Delta(\boldsymbol{l})\mathfrak{F}_\omega^+(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{r}')d\boldsymbol{l},$$

$$\mathfrak{F}_\omega^+(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \int \tilde{\mathfrak{G}}_{-\omega}^{(0)}(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{r})\Delta^*(\boldsymbol{l})\mathfrak{G}_\omega(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{r}')d\boldsymbol{l}. \tag{38.3}$$

先求函数 $\tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$. 无磁場时 $\mathfrak{G}_\omega^{(0)}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')$ 等于($R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|$)：

$$\mathfrak{G}_\omega^{(0)}(R) = \begin{cases} -\dfrac{m}{2\pi R}e^{ip_0R - \frac{|\omega|}{v}R} & 当 \quad \omega > 0, \\ -\dfrac{m}{2\pi R}e^{-ip_0R - \frac{|\omega|}{v}R} & 当 \quad \omega < 0. \end{cases} \tag{38.4}$$

为証明此式，可直接将(38.4)式代入无外場的方程式(38.2)，或者利用我們已知的傅立叶分量的表达式 $\mathfrak{G}_\omega^{(0)}(\boldsymbol{p}) = [i\omega - \xi]^{-1}$：

$$\mathfrak{G}_\omega^{(0)}(R) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathfrak{G}_\omega^{(0)}(\boldsymbol{p})d\boldsymbol{p}e^{i\boldsymbol{pR}} =$$

$$= \frac{m}{(2\pi)^2 iR}\int \frac{e^{ip_0R + i\frac{\xi}{v}R} - e^{-ip_0R - i\frac{\xi}{v}R}}{i\omega - \xi}d\xi$$

(自然我們关心函数 $\mathfrak{G}_\omega^{(0)}(R)$ 在远大于原子距离，即 $Rp_0 \gg 1$ 时的值)。对 $\xi$ 积分，直接得(38.4)式。

函数 $\mathfrak{G}_\omega^{(0)}(R)$ 迅速起伏．由于 $Rp_0 \gg 1$，我們可以采用一种独特的准經典近似来决定磁場中函数 $\tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$．我們求如下形式的 $\tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$：

$$\tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = e^{i\varphi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')}\mathfrak{G}_\omega^{(0)}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'), \tag{38.5}$$

其中 $\varphi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}) = 0$．将(38.5)式代入(38.2)式并只微分主要項，得



到作用量的附加項 $\varphi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ 的方程式：

$$(\boldsymbol{n}, \nabla_r\varphi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')) = e(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}));\left(\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|}\right). \tag{38.6}$$

在这个方程中我們忽略了 $\boldsymbol{A}$ 的平方項，因为在我們关心的場強下电子繞圈的半径 $\frac{cp_0}{eH}$ 比穿透深度大得多：$p_0 \gg eA \sim eH\delta$ ($\delta$ 为穿透深度的数量級)。

回到方程式(38.3)，作对 $|\Delta(\boldsymbol{r})|$ 的展开．从(38.4)式和(38.6)式看出，$\mathfrak{F}_\omega^+(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ 只須展开到 $|\Delta|$ 的三次項在內．至于格林函数 $\mathfrak{G}_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$，則到 $|\Delta|$ 的二次項就够了：

$$\mathfrak{G}_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') - \int \tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{l})\Delta(\boldsymbol{l})\tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{r}') \times$$

$$\times \Delta^*(\boldsymbol{m})\tilde{\mathfrak{G}}_{-\omega}^{(0)}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{l})d\boldsymbol{m}\,d\boldsymbol{l}. \tag{38.7}$$

将此式代入(38.3)式第二个方程，求得 $\mathfrak{F}_\omega^+(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$，的展开式，借助此展开式从(38.1)式得到定 $\Delta^*(\boldsymbol{r})$ 的以下方程式：

$$\Delta^*(\boldsymbol{r}) = |\lambda| T\sum_\omega\int \tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{r})\Delta^*(\boldsymbol{l})\tilde{\mathfrak{G}}_{-\omega}^{(0)}(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{r})d\boldsymbol{l} -$$

$$- |\lambda| T\sum_\omega\iiint \tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m})\Delta(\boldsymbol{m})\tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{r}) \times$$

$$\times \Delta^*(\boldsymbol{s})\tilde{\mathfrak{G}}_{-\omega}^{(0)}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{m})\Delta^*(\boldsymbol{l})\tilde{\mathfrak{G}}_{-\omega}^{(0)}(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{r})d\boldsymbol{l}d\boldsymbol{m}d\boldsymbol{s}. \tag{38.8}$$

这个方程式中积分中的主要距离約为 $\xi_0$，因为从(38.4)式和(38.5)式看出，函数 $\tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ 在 $|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'| > \xi_0$ 时指数式地減小．同时能隙 $\Delta(\boldsymbol{r})$ 和場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ 的变化发生在数量級为穿透深度的距离上，后者在临界温度附近远大于 $\xi_0$．基于同样的原因，(38.5)式中的相 $\varphi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ 可写成：

$$\varphi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \simeq e(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}), \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}').$$

在 $T_c$ 附近 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \sim H\delta \sim \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}}$，因此相 $\varphi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ 很小而指数項可按 $\varphi$ 展开。

先討論右端第一項．設

$$K(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{r}) = T\sum_\omega \tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{r})\tilde{\mathfrak{G}}_{-\omega}^{(0)}(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{r}) = K_0(\boldsymbol{l} - \boldsymbol{r})e^{2ie(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}), \boldsymbol{l} - \boldsymbol{r})}.$$

利用格林函数在坐标空間中的表示(38.4)式，并完成对頻率的求和，得到 $K_0(R)$ 的表达式如下：

$$K_0(R)=\frac{m^2T}{(2\pi R)^2}\frac{1}{\operatorname{sh}\frac{2\pi TR}{v}}. \qquad (38.9)$$

我們已經指出，所有的量在距离 $\xi_0$ 上变化很小，在积分

$$\int K_0(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{r})e^{2ie(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}),\boldsymbol{l}-\boldsymbol{r})}\Delta^*(\boldsymbol{l})d\boldsymbol{l}$$

中可将各量在点 $\boldsymbol{r}$ 附近按 $(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{r})$ 冪展开。以 $(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{r})$ 的二次項为限，得到：

$$\Delta^*(\boldsymbol{r})\int K_0(R)d\boldsymbol{R}+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}+2ie\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\right)^2\Delta^*(\boldsymbol{r})\int K_0(R)R^2d\boldsymbol{R}.$$

根据(38.9)式，在 $R=0$ 处函数 $K_0(R)$ 如 $1/R^3$ 趋向无穷大，因此上式第一积分形式上是发散的。最好在动量空間中截断发散表达式。結果我們得到已知的式子：

$$\int K_0(R)\,d\boldsymbol{R}=\frac{mp_0}{2\pi^2}\int_0^{\omega_D}\operatorname{th}\left(\frac{\xi}{2T}\right)\frac{d\xi}{\xi}.$$

第二項在 $\boldsymbol{R}=0$ 附近积分时无奇异性。直接在坐标表象中算此积分，得：

$$\int R^2K_0(R)\,d\boldsymbol{R}=\frac{7\zeta(3)v^2}{8(\pi T)^2}\cdot\frac{mp_0}{2\pi^2}.$$

在方程式(38.8) $|\Delta|$ 的三次項中可忽略 $\Delta(\boldsymbol{r})$ 与坐标的关系。因此这項等于

$$\left(\frac{mp_0}{2\pi^2}\right)\Delta^*(\boldsymbol{r})|\Delta(\boldsymbol{r})|^2T\sum_\omega\int d\xi\frac{1}{(\omega^2+\xi^2)^2}=$$
$$=\left(\frac{mp_0}{2\pi^2}\right)\frac{7\zeta(3)}{8(\pi T)^2}\Delta^*(\boldsymbol{r})|\Delta(\boldsymbol{r})|^2.$$

将以上結果合并，我們求出，在临界温度附近函数 $\Delta^*(\boldsymbol{r})$ 滿足以下方程式：

$$\left\{\frac{1}{4m}\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}+2ie\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\right)^2+\frac{1}{\eta}\left[\frac{T_c-T}{T_c}-\frac{7\zeta(3)}{8(\pi T_c)^2}|\Delta(\boldsymbol{r})|^2\right]\right\}\times$$
$$\times\Delta^*(\boldsymbol{r})=0, \qquad (38.10)$$



其中

$$\eta=\frac{7\zeta(3)}{6(\pi T_c)^2}\varepsilon_F.$$

无外場时 $\Delta$ 不在空間变化，方程式(38.10)和展开式(36.4)前几項一致。

現在計算电流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$。前节的(37.5)式当然仍成立。然而由于 $\Delta$ 远小于 $T_c$，可对 $\boldsymbol{A}$ 和 $\Delta$ 展至不等于零的首次項。注意，电流密度(37.5)式中

$$-\frac{2e^2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})}{m}\mathfrak{G}_{t'=t+0}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r})\equiv-\frac{e^2}{m}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})N$$

这里 $N$ 是总电子数密度，它等于在正常金属中的值。$N$ 如改变，将和电中性条件矛盾。[(38.7)式的解滿足这个要求，即如果 $\mathfrak{G}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\tilde{\mathfrak{G}}^{(0)}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+\delta\mathfrak{G}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$，则 $T\sum_\omega\delta\mathfrak{G}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r})\equiv0$)。]

将(38.7)式代入(37.5)式，得：

$$T\sum_\omega\frac{ie}{m}(\nabla_{r'}-\nabla_r)\tilde{\mathfrak{G}}^{(0)}_{\omega\,r'\to r}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')-\frac{e^2}{m}N\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\equiv0,$$

这是因为正常金属在恆定磁場中电流为零。因此

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})=\frac{ie}{m}(\nabla_{r'}-\nabla_r)_{r'\to r}T\sum_\omega\delta\mathfrak{G}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'),$$

其中

$$\delta\mathfrak{G}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=$$
$$=-\int\tilde{\mathfrak{G}}^{(0)}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{l})\Delta(\boldsymbol{l})\tilde{\mathfrak{G}}^{(0)}_\omega(\boldsymbol{m},\boldsymbol{r}')\Delta^*(\boldsymbol{m})\tilde{\mathfrak{G}}^{(0)}_{-\omega}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{l})d\boldsymbol{m}\,d\boldsymbol{l}.$$

以(38.5)式代入此式，将各量在 $\boldsymbol{r}$ 附近展至一次項，并省去对角度积分时給出零的各項，我們得到：

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})=\left[\frac{ie}{m}\left(\Delta\frac{\partial\Delta^*}{\partial\boldsymbol{r}}-\Delta^*\frac{\partial\Delta}{\partial\boldsymbol{r}}\right)-\frac{4e^2|\Delta|^2}{m}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\right]C, \qquad (38.11)$$

其中

$$C=\frac{1}{3}T\sum_\omega\iint([(\nabla_r\mathfrak{G}^{(0)}_\omega(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{l}))\mathfrak{G}^{(0)}_\omega(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{r})-\mathfrak{G}^{(0)}_\omega(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{l})\times$$
$$\times(\nabla_r\mathfrak{G}^{0}_\omega(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{r}))]\cdot\boldsymbol{m})\mathfrak{G}^{(0)}_{-\omega}(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{l})d\boldsymbol{m}\,d\boldsymbol{l}.$$

$C$ 的計算宜用傅立叶分量作，只要作普通变換 $r \to i\frac{d}{dp}$. 我們省去这个很簡单的計算，給出最終結果：

$$C = \frac{7\zeta(3)N}{16(\pi T_c)^2}.$$

方程組(38.10)和(38.11)描述 $T_c$ 附近恆定磁場中超导体的性質．引入正比于 $\Delta(\boldsymbol{r})$ 的波函数 $\psi(r)$：

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \sqrt{\frac{7\zeta(3)N}{8(\pi T_c)^2}}\,\Delta(\boldsymbol{r}). \tag{38.12}$$

取(38.10)式的复数共軛方程式，各处代以(38.12)式，将这些方程式改写成：

$$\left\{\frac{1}{4m}\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} - 2ie\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\right)^2 + \frac{1}{\eta}\left[\frac{T_c - T}{T_c} - \frac{1}{N}|\psi|^2\right]\right\}\psi(\boldsymbol{r}) = 0,$$

$$j(\boldsymbol{r}) = -\frac{2ie}{4m}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{r}} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial\boldsymbol{r}}\right) - \frac{(2e)^2}{2m}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})|\psi|^2. \tag{38.13}$$

现在波函数 $\psi(\boldsymbol{r})$ 的意义就清楚了：所得方程式的形状很象质量为 $2m$，电荷为 $2e$ 的粒子的量子力学方程式． 既然 $\Delta(\boldsymbol{r})$ 的意义是比例于束縛对波函数的量，或更确切些，比例于相对慣性中心坐标的波函数，則以上的結果从物理上看是明白的．有意义的是，在金玆堡（Гинзбург）和兰道的唯象理論[75]中已提出了类似的方程式，只是那里只有一个元电荷．除了这个本質性的改变，新的超导理論証实了金玆堡和兰道理論在 $T_c$ 附近的正确性，还提供了計算这个理論中出現的常数的可能性．

在結束之前再次指出，我們在推导中利用了各量在距离 $\xi_0$ 上变化甚小这一事实．既然从(38.13)式和(37.19)式容易看出，一般情况下在 $T_c$ 附近，各量在約为 London 穿透深度的距离上显著变化，而对于 Pippard 型金屬，这个穿透深度只在极为接近 $T_c$ 的区域內才变得大于 $\xi_0$，則以上方程式对 Pippard 型金屬的适用范围，只是轉变温度附近很窄的温度区間．对于 London 型和中間型金屬，这些方程式适用于 $T_c$ 附近相当寬的温度区間．从实驗观点看来，这是很有趣的温度范围．应当指出，方程式(38.13)的推論和这个温度区間內的測量結果相当好地符合．



## § 39. 超导合金理論

**1. 問題提法．** 超导理論中的有意义的問題之一，是关于"合金"性質的問題，即含有其它元素或晶格缺陷的超导体性質（Абрикосов 和 Горьков[76]）．

在正常态这些晶格缺陷导致金属的所謂剩余电阻．在超导态杂質有新作用．我們已經指出过，超导体电子的相互作用引起它們的空間关联．例如，随着金屬从正常态轉变到超导态，坐标表象中各种格林函数对空間变量的关系在数量級为 $\xi_0$（对的有效尺寸）的距离上有本質变化．其它元素的原子以及晶格缺陷的存在，引起电子在杂質上的散射．由于散射是偶然地发生，散射角也是任意的，而被散射的电子又具有很短的波长，可見电子間的关联对散射很敏感．換言之，电子在杂質原子上的散射应削弱电子間的空間关联．

浓度很小时杂質的作用不大．

杂質浓度的增加，显然导致超导体內电子关联半径的减小．对浓度足够大的合金，电子自由程代替 $\xi_0$ 起关联参量的作用．在这种浓度下我們可以期待超导体显出新的特性．本书不以系統叙述超导合金理論为目的，我們只在此涉及一个問題——合金在弱恆定磁場中的性質．然而这已足以显示独特的場論方法，对研究这类对象是如何有益．

在前面 § 37 中已指出过，就在弱場中的电磁性質而論，多数实际超导体属于非局域型（Pippard 型或中間型）． 換言之，超导体放入电磁場后，其一定点的电流值由此点整个邻域的場値决定．当然，以 Cooper 关于电子形成束縛对这一思想为基础的理論，其本身已包含了这种非局域性． 束縛对的尺寸引起电子在約为 $\xi_0 \sim 10^{-4}$ 厘米距离上的关联；如果場在远小于 $\xi_0$ 的距离（其数量級約为穿透深度）上显著变化，則 $\xi_0$ 就要出現在电流与場的非局域关系中．在相反的 London 情况下，場在积分关系(37.3)的主要距

离$\sim \xi_0$上，几乎不变，因而可在$\boldsymbol{r}$点提出到积分符号之外.

上述关于杂质在超导体中作用的想法表明，杂质浓度足够大时，超导合金应属于第二种类型. 既然随着杂质浓度的增加，自由程开始起关联长度的作用，则在某一时刻，自由程会变得小于穿透深度，于是出現了 London 情形.

在継續叙述之前，还须闡明一点. 在实际超导体中$\xi_0$約为$10^{-4}$厘米. 然而从前面得知，超导体出現新性质的浓度，相当于自由程和穿透深度相等之时，而后者約为$10^{-5}$厘米. 十分重要的是，这些浓度还很小($\sim 1\%$). 間題在于，浓度很大时我們实质上是有了一种新物质，其性质可与初始的超导体毫无共同之处. 例如，电声子相互作用的性质会改变，因而超导轉变温度也要改变. 在浓度足够小时可以忽略这些晶格基本性质的变化.

然而这样小的浓度，已使超导体在磁場中的行为发生本质性的改变. 有趣的是，实験表明，这时它的热力学性质实际上和純超导体沒有差別.

为了解决上面提出的間題，利用輸运方程式的普通方法已不适用. 这个方法常用以研究如正常金属的剩余电阻等性质. 因此我們在下面重新回到量子場論方法.

**2. 正常金属的剩余电阻.** 为了使以后的叙述更为明白，我們先以計算絶对零度下有杂质的正常金属的剩余电阻为例，表述后面采用的方法 (Абрикосов 和 Горьков[76], Edwards[77]). 自然，这样得出的結果，和借助輸运方程得到的人所共知的結果，是完全等价的.

大家知道，杂质的存在导致正常金属的有限电导率$\sigma$，因而在外加均匀电場$\boldsymbol{E}$頻率足够低时，电流密度$\boldsymbol{j}$由下式給出:

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}.$$

以普通方式引入矢量势$\boldsymbol{A}(t)$, $\boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$，可将上式写成 (对場的单色分量):

$$\boldsymbol{j}_\omega = i\omega\sigma \boldsymbol{A}\omega.$$



这个关系式的形式和(37.3′)式一致. 这时核$Q(\boldsymbol{k}, \omega)$就等于:

$$Q(\boldsymbol{k}, \omega) = -i\omega\sigma.$$

下面我們用量子場論方法決定$Q(\boldsymbol{k}, \omega)$.

考虑到場論方法中格林函数定义在絶对零度和$T \neq 0$时的差別，代替(37.5)式我們得到:

$$\boldsymbol{j}(x) = \frac{ie}{m}(\boldsymbol{p}_{r'} - \boldsymbol{p}_r) \underset{r' \to r,\, t' = t+0}{G(x, x')} - \frac{Ne^2}{m}\boldsymbol{A}(x)$$

$$(\boldsymbol{p} = -i\nabla).$$

将函数$G(x, x')$展至外場的綫性項，得:

$$\boldsymbol{j}(x) = -\frac{ie^2}{2m^2}(\boldsymbol{p}_{r'} - \boldsymbol{p}_r)\int_{r' \to r} (\boldsymbol{A}(y), \underset{y' \to y}{\boldsymbol{p}_{y'} - \boldsymbol{p}_y}) G^{(0)}(x, y') \times$$

$$\times G^{(0)}(y, x') d^4y - \frac{Ne^2}{m}\boldsymbol{A}(x). \qquad (39.1)$$

在这个关系式中$G^{(0)}(x, y)$是正常金属无外場时的格林函数. 注意这些量已不再仅和变量之差$x - y$有关；我們令函数$G^{(0)}(x, y)$考虑了电子和杂质原子的相互作用. (以后含杂质的金属格林函数記为$G(x, y)$，而純金属的函数記为$G^{(0)}(x, y)$，其它依此类推). 电子和杂质原子相互作用的哈密頓量是:

$$H_{int} = \sum_a H_a,$$

$$H_a = \int u(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_a)\psi^+(x)\psi(x) d\boldsymbol{r}.$$

継續变換(39.1)式之前，先求函数$G(x, x')$.

有杂质存在时，格林函数和(7.7)式不一样. 将它写成:

$$G(x, x') = (2\pi)^{-4}\int G(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}'; \omega) e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{r} - i\boldsymbol{p}'\boldsymbol{r}' - i\omega(t-t')} d\boldsymbol{p}\, d\boldsymbol{p}'\, d\omega. \qquad (39.2)$$

根据熟知的場論規則，函数$G(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}'; \omega)$表示为图 103 所示的图



图 103

形之和．每条綫代表 $G^{(0)}(p)$．我們用斜十字表示杂質頂角．它对应的因子为 $\sum_{r_a} u(\boldsymbol{q})e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}_a}\delta(\omega-\omega')$，其中 $u(\boldsymbol{q})$ 是势 $u(\boldsymbol{r})$ 的傅立叶分量，而 $\boldsymbol{q}$ 是传递的动量．

图形的求和导致决定 $G(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}';\omega)$ 的积分方程式：

$$G(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}';\omega)=\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')G^{(0)}(p)+$$
$$+\frac{1}{(2\pi)^3}\sum_a G^{(0)}(p)\int u(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'')e^{i(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'')\boldsymbol{r}_a}G(\boldsymbol{p}'',\boldsymbol{p}';\omega)d\boldsymbol{p}''. \tag{39.3}$$

我們不关心 (39.3) 式的准确解．由于杂質原子在金属中无规分布，我們应将整个表达式对每个杂質原子的位置平均．这时重要的是，根据杂質原子浓度很小的前提，杂質原子間的平均距离，远大于金属晶格的原子距离，因此求平均时所取体积的尺度比原子間距离大得多．完成这种平均之后，格林函数显然成为：

$$\overline{G(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}';\omega)}=G(p)\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'). \tag{39.4}$$

我們关心的动量 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'$ 的值約为費米边界动量 $p_0$，后者本身的数量級是原子間距离的倒数．这就立即使求平均容易多了．

我們将在玻恩近似下作計算，即假設 $p_0^3\int u(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}\ll\varepsilon_F$．可以証明，最終結果通过碰撞时間表示之后，在一般情况下也是成立的．

$G(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}';\omega)$ 的最簡图形只包含一个斜十字．对杂質原子位置平均后的值是常数 $\overline{u(\boldsymbol{q})e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}_a}}=u(0)$，它可以納入基态能量并在今后視为零．下一个图形含有两个斜十字（图 104(a)）．如果斜十字分属不同的原子，則矩陣元含有因子 $u(\boldsymbol{p}''-\boldsymbol{p}')u(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'')\times$

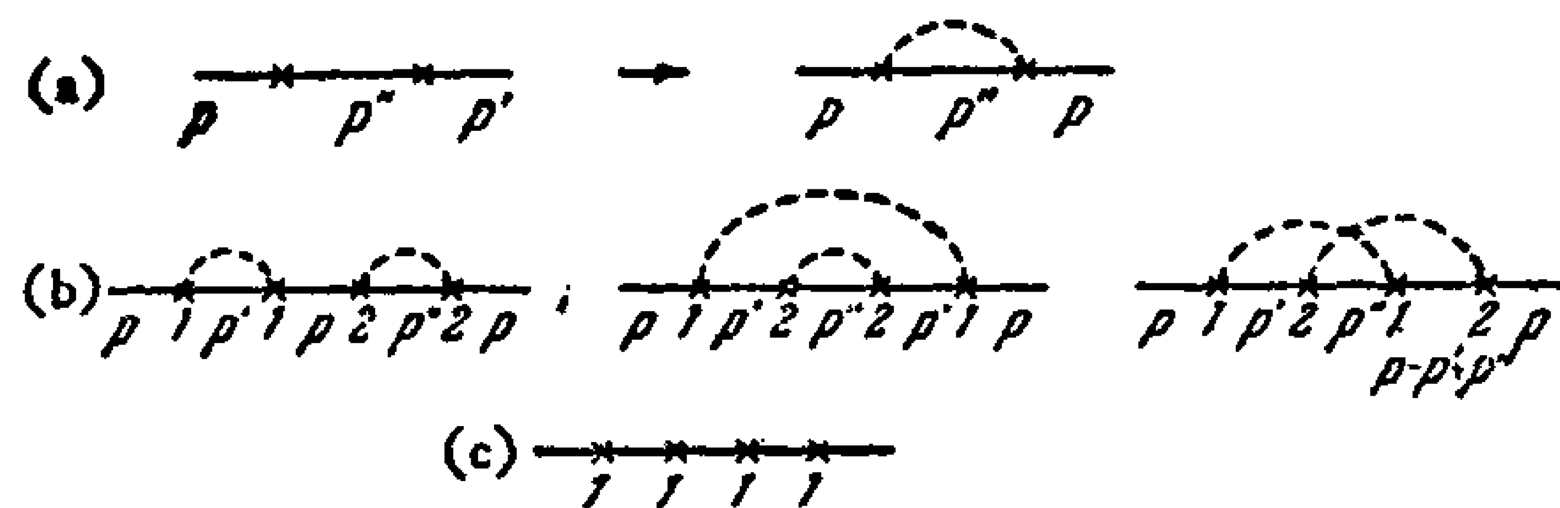



图 104



$\times e^{i(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'')\boldsymbol{r}_a+i(\boldsymbol{p}''-\boldsymbol{p}')\boldsymbol{r}_b}$，其平均值等于零．如果两个斜十字都描述在同一原子上的散射，而 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}'$，則此图（除去外綫 $G^{(0)}(p)$）的平均值不等于零而是：

$$\frac{1}{V}\int|u(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')|^2G^{(0)}(p')\frac{d\boldsymbol{p}'}{(2\pi)^3}, \tag{39.5}$$

其中 $V$ 是系統的体积．（为得此結果，宜在(39.2)式和(39.3)式中把对动量积分变成对不連續的値求和，平均之后再变換回来）．

以后我們将关心絕对值接近 $p_0$ 的 $\boldsymbol{p}$．和在 § 21 中一样，(39.5) 式中的积分可以分成两部分：对离費米面很远的 $\boldsymbol{p}'$ 值的积分，以及在費米面附近的 $\boldsymbol{p}'$ 值的积分（后者对 $|\boldsymbol{p}'|$ 的积分限可取对称于 $|\boldsymbol{p}'|-p_0$ 的值）．对远区間的积分給出实常数，它与 $u(0)$ 同为化学势的重整化，故可不予考慮．第二个积分里可認为 $u(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')$ 是变化很慢的函数．代入 $G^{(0)}(p)$ 的 (7.7) 式并对杂質原子求和（这意味着簡单地乘以原子数），得出对 $G$ 函数的主要貢献：

$$\frac{i\ \mathrm{sign}\ \omega}{2\tau},$$

其中

$$\frac{1}{\tau}=\frac{nmp_0}{(2\pi)^2}\int|u(\theta)|^2d\Omega \tag{39.6}$$

（$\theta$ 是矢量 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{p}'$ 的夹角．根据(39.6)式，$\tau$ 是玻恩近似下的碰撞时間，$n$ 是单位体积的杂質原子数）．由此可見，积分中起主要作用的是費米面附近的区間 $\left(v(|\boldsymbol{p}|-p_0)\sim\frac{1}{\tau}\right)$．

从这个观点看，并不是所有的图形都是等价的．例如，試比較图 102(b) 所示的三个图形（虛綫連結属于同一原子的斜十字）．不难看出，前两个式子中对 $\boldsymbol{p}'$ 和 $\boldsymbol{p}''$ 的积分可在費米面附近对动量間的任意夹角进行．相反，在第三个积分中要求所有 $G$ 函数的变量接近費米面，就限制了角度．結果这个图形的貢献比前者少 $\frac{1}{vp_0G}$ 倍．因为我們今后需要的值是 $\omega$ 和 $\xi\sim\frac{1}{\tau}$，其中 $\tau$ 是碰撞时

間，則"相交"图形貢献小的程度可估为 $\frac{1}{p_0 l}$，其中 $l = v\tau$——自由程。

容易証明，有两个以上斜十字来自同一杂质原子的图形，貢献也小。試比較图 104 (b) 第一图和图 104 (c) 的总貢献（来自全部杂质原子的貢献）。第一类图形約給出

$$\frac{1}{\tau^2} G^{(0)}(p) \sim \frac{1}{\tau},$$

而第二类图形約为：

$$\frac{1}{\tau} \frac{u^2(q)}{v^2} p_0^4 \sim \frac{1}{\tau} \left[ \frac{\int u d\boldsymbol{r} p_0^3}{\varepsilon_F} \right]^2 \ll \frac{1}{\tau}$$

（这是玻恩近似的后果）。由此可知，我們只須討論每个杂质原子給出两个斜十字的图形。

将一切主要图形（即"成对"而不含如图 104(b) 第三图的"相交"者）求和，得 $G$ 函数的如下方程式：

$$G(p) = G^{(0)}(p) + \frac{n}{(2\pi)^3} G^{(0)}(p) \int |u(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}')|^2 G(p') d\boldsymbol{p}' G(p). \tag{39.7}$$

如果不用玻恩近似，則須考虑一个杂質原子給出許多斜十字的图形。可以証明，由此而来的全部变化是将玻恩散射幅 $u(\theta)$ 换成完全散射幅。这个論断对以后的全部計算都成立。因此所有公式中的 $u(\theta)$ 可理解为完全散射幅。

方程式(39.7)的解是：

$$G(p) = \frac{1}{\omega - \xi - \overline{G}_\omega},$$

其中 $\overline{G}_\omega$ 滿足方程式：

$$\overline{G}_\omega = \frac{n}{(2\pi)^3} \int |u(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}')|^2 \frac{1}{\omega - \xi' - \overline{G}_\omega} d\boldsymbol{p}'.$$

設 $\overline{G}_\omega$ 是純虛数 $\overline{G}_\omega = -i\beta$ 并以同于(39.5)式的方法計算右端积分，得到：



$$\beta = \frac{\text{sign}\, \beta}{2\tau},$$

其中 $\tau$ 由 (39.6) 式决定。将这样得到的 $G(p)$ 和杂質很少时的結果 $(G(p) \to G^{(0)}(p))$ 比較，得 $\beta = \frac{\text{sign}\, \omega}{2\tau}$ 或者：

$$G(p) = \frac{1}{\omega - \xi + \frac{i\omega}{2|\omega|\tau}}. \tag{39.8}$$

轉到 $x$ 表象，不难看出，$G$ 不同于 $G^{(0)}$ 的全部变化，在于乘上了指数衰減因子：

$$G(x - x') = G^{(0)}(x - x') e^{-\frac{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}{2l}}. \tag{39.9}$$

实际上对角度积分后有：

$$G(x - x') \backsim \int p dp d\omega \frac{\sin pR e^{-i\omega(t-t')}}{R\left(\omega - \xi + \frac{i\omega}{2|\omega|\tau}\right)} \backsim$$

$$\backsim m \int d\xi d\omega e^{-i\omega(t-t')} \frac{e^{i\left(p_0 + \frac{\xi}{v}\right)R} - e^{-i\left(p_0 + \frac{\xi}{v}\right)R}}{R\left(\omega - \xi + \frac{i\omega}{|\omega| 2\tau}\right)}.$$

对 $\xi$ 积分并取留数，得(39.9)式。

現在計算核 $Q(\boldsymbol{k}, \omega)$。变到傅立叶分量后，宜把得自 (39.1) 式的 $Q$ 的表达式写成：

$$Q_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k}, \omega) = \frac{Ne^2}{m} \delta_{\alpha\beta} - \frac{2ie^2}{(2\pi)^4 m^2} \int p'_\alpha \Pi_\beta(p'_+, p'_-) d\boldsymbol{p}' d\omega', \tag{39.10}$$

其中 $p_\pm = \left(\boldsymbol{p}' \pm \frac{\boldsymbol{k}}{2}; \omega' \pm \frac{\omega}{2}\right)$。(39.10) 式中分出了一个光子頂角，第二个光子頂角包含在 $\Pi_\beta(p_+, p_-)$ 中，后者准确到系数，可看成是在电子綫中加入光子頂角 $p'_\beta$ 的結果。将这个頂角插入电子格林函数 $G(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}'; \omega)$，得到：

$$\Pi(p'_+, p'_-) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int G\left(\boldsymbol{p}'_+, \boldsymbol{p}''_+; \omega' + \frac{\omega}{2}\right) \boldsymbol{p}'' \times$$

$$\times G\left(\boldsymbol{p}''_-, \boldsymbol{p}'_-; \omega' - \frac{\omega}{2}\right) d\boldsymbol{p}''. \tag{39.11}$$

这里的函数 $G(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}'; \omega)$ 对应图 103 之和并满足方程式(39.3). 对杂质原子位置求平均时应注意，两个格林函数乘积的平均值不等于两个平均值的乘积.

对純金属，(39.11) 式对应图 105(a). 对杂质原子位置平均之后，除了对应从零級格林函数 $G^{(0)}(p)$ 变到函数 $G(p)$ (39.8) 式的簡单图形外，图 105(b) 的图形对 (39.11) 式也是重要的. 这些修正項貢献之所以較大，是因为頂角光子动量 $k \ll p_0$, 因此費米面附近的动量对积分有主要貢献. 另一类图形如图 105(c) 貢献就小得多，因为有一个积分要取在距費米面很远的动量区間. 因此，(39.11)式的平均就归結为图 105(b) 的"阶梯"图形之求和.

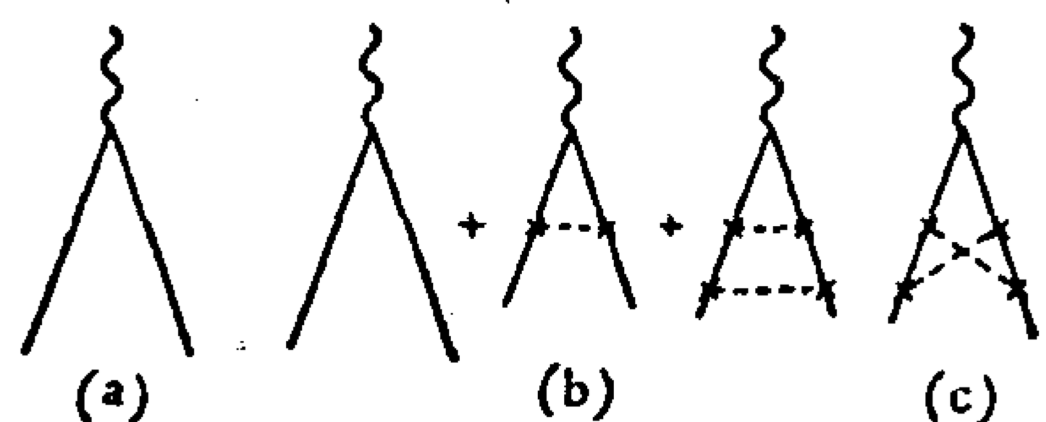


图 105

$\Pi(p_+, p_-)$ 的积分方程式如下:

$$\Pi(p_+, p_-) = $$
$$= G(p_+)G(p_-)\left[\boldsymbol{p} + \frac{n}{(2\pi)^3}\int |u(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')|^2 \Pi(p'_+, p'_-)dp'\right]. \tag{39.12}$$

可能有两种极限情形:

(1) 反常趋肤效应$\left(|\boldsymbol{k}|v \gg \frac{1}{\tau}\right)$; 容易驗証，这时(39.12)式右端的积分小得可略而不計 $\sim \frac{1}{|\boldsymbol{k}|v\tau} \ll 1$;

(2) 正常趋肤效应$\left(|\boldsymbol{k}|v \ll \frac{1}{\tau}\right)$; 正是这个情形对我們有意义. 这时方程式(39.12)中可令 $\boldsymbol{p}_+ = \boldsymbol{p}_-$.

从(39.12)式右端积分得到的矢量，显然平行于 $\boldsymbol{p}$. 引入記号:

$$\boldsymbol{p}\Lambda(\omega', \omega) = \frac{n}{(2\pi)^3}\int |u(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')|^2 \Pi(p'_+, p'_-)dp'. \tag{39.13}$$

由于 $|\boldsymbol{p}| \simeq p_0$, 可認为 $\Lambda(\omega', \omega)$ 与 $|\boldsymbol{p}|$ 无关. 将 (39.12) 式乘以



$\frac{n}{(2\pi)^3}|u(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{p})|^2$ 并对 $d\boldsymbol{p}$ 积分:

$$\boldsymbol{l}\Lambda(\omega', \omega) = \frac{n}{(2\pi)^3}\int |u(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{p})|^2 \boldsymbol{p}G(p_+)G(p_-)[1+\Lambda(\omega', \omega)]d\boldsymbol{p}. \tag{39.14}$$

以 $G(p)$ 的表达式(39.8)代入，容易求得，只有 $|\omega'| < \frac{\omega}{2}$ 时 $\Lambda(\omega', \omega)$ 才不等于零，因为在相反的情况下，由(7.7)式知，(39.14)式积分时两个极点处于同一半平面内. 在这个区間内 $\Lambda(\omega', \omega)$ 和 $\omega'$ 也无关. 对 $\xi$ 积分并利用关系式:

$$\cos\theta = \cos\theta'\cos\theta'' + \sin\theta'\sin\theta''\cos(\varphi'-\varphi''), \tag{39.15}$$

得到:

$$\Lambda(\omega', \omega) = \begin{cases} \frac{i}{\tau_1}\frac{1}{\omega + \frac{i}{\tau_{tr}}} & \text{当} \quad \omega'^2 < \frac{\omega^2}{4}, \\ 0 & \text{当} \quad \omega'^2 > \frac{\omega^2}{4}, \end{cases} \tag{39.16}$$

其中

$$\frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_{tr}},$$
$$\frac{1}{\tau_{tr}} = \frac{nmp_0}{(2\pi)^2}\int |u(\theta)|^2(1-\cos\theta)d\Omega. \tag{39.17}$$

将(39.16)式代入(39.12)式和(39.10)式并积分，得($\omega\tau \ll 1$):

$$Q_{\alpha\beta}(\omega) = -i\omega\sigma\delta_{\alpha\beta}.$$

正如所期待，电导率 $\sigma = \frac{Ne^2\tau_{tr}}{m}$ 中含有碰撞間的"輸运"时間.

这样我們就看到了，可能用場論方法計算对杂質原子位置平均后金属的各种特征量. 在我們所討論的情形中，平均就归結为对同一原子两次散射的成对平均，在图上以連結两个斜十字的虚綫代表. 具有动量 $\boldsymbol{q}$ 的这种綫，在矩陣元中对应因子 $n|u(\boldsymbol{q})|^2$, 它对虚綫起 $D$ 函数的作用. 在有虚綫进出的頂角，电子綫頻率不变. 重要的是，跨过任何电子綫动量变化很大的頂角的虚綫

$(q \sim p_0)$，貢献很小．其特例是可以忽略一切有相交虛綫的图形．这些图形貢献小的相对程度是 $\frac{1}{p_0 l} \ll 1$．

**3. 超导合金的电磁性質．** 現在我們应用上述方法来研究含有杂質的超导体．直接討論任意温度的情形．写出超导体在杂質的場中的方程組：

$$\left\{i\omega + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu - \sum_{r_a} u(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_a)\right\}\mathfrak{G}_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') + $$
$$+ \Delta(\boldsymbol{r})\mathfrak{F}^+_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')$$
$$\left\{-i\omega + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu - \sum_{r_a} u(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_a)\right\}\mathfrak{F}^+_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') - $$
$$- \Delta^*(\boldsymbol{r})\mathfrak{G}_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = 0.$$

和前面一样，我們自然只关心按杂質平均后的 $\mathfrak{G}$ 和 $\mathfrak{F}^+$ 值．为了求得平均值，須将所有的格林函数展成与杂質相互作用位势的冪級数，这和方程(39.3)相似，(見图 103)．这时还应注意到，加入杂質之后，能隙 $\Delta(\boldsymbol{r})$ 和 $\Delta^*(\boldsymbol{r})$ 一般也应有所変化．这本来会使图解法大为复杂化，因为由于条件 $\Delta(\boldsymbol{r}) = |\lambda|\mathfrak{F}(x, x')$，对 $\Delta$ 的修正項也应由某种积分方程决定．然而我們发現，平均之后 $\overline{\Delta(\boldsymbol{r})} = \Delta_0$，所有的修正項都等于零．只須直接研究 $\Delta(\boldsymbol{r})$ 諸修正項的結构，就可以証实这一点．我們在此事先假定这个事实成立，認为 $\Delta(\boldsymbol{r}) = \Delta_0$．这个假定以后将为最終結果証实，那时将看到，加入非磁性杂質后，任何 $\mathfrak{F}(x, x)$ 型的量都不改变．因此，和前面所述的全部差別就在于，超导体由三个格林函数描述，卽函数 $\mathfrak{G}$，$\mathfrak{F}$ 和 $\mathfrak{F}^+$．这就使图解法略有改变．容易看出，这种改变完全与 § 35 中类似，卽 $\mathfrak{G}$ 的图形中出現 $\mathfrak{F}$ 和 $\mathfrak{F}^+$ 綫，而且类似地，$\mathfrak{F}$ 和 $\mathfrak{F}^+$ 的图形中出現 $\mathfrak{G}$ 綫．

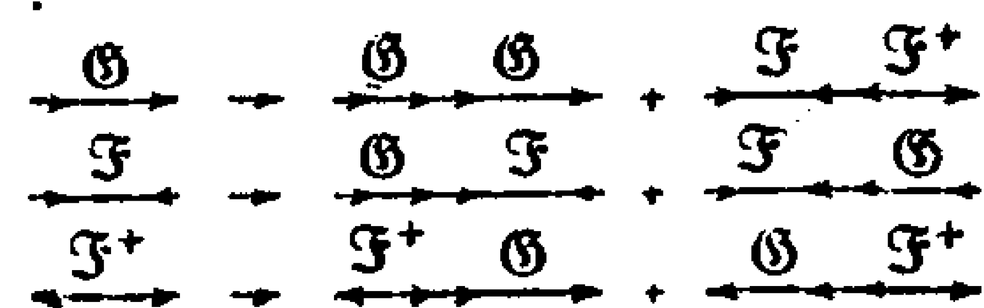




图 106

与杂質相互作用的哈密頓量中包含算符乘积 $\bar{\psi}\psi$．因此在每条电子綫中插入杂質頂角时，对每种 $\mathfrak{G}$，$\mathfrak{F}$ 和 $\mathfrak{F}^+$ 綫都出現两种可能性．这些可能情形示于图 106 中．其結果可写成：



$$\mathfrak{G}(x, x') \to \mathfrak{G}(x, y)\mathfrak{G}(y, x') - \mathfrak{F}(x, y)\mathfrak{F}^+(y, x'),$$
$$\mathfrak{F}^+(x, x') \to \mathfrak{F}^+(x, y)\mathfrak{G}(y, x') + \mathfrak{G}(y, x)\mathfrak{F}^+(y, x'),$$
$$\mathfrak{F}(x, x') \to \mathfrak{G}(x, y)\mathfrak{F}(y, x') + \mathfrak{F}(x, y)\mathfrak{G}(x', y).$$

代替方程式(39.3)的是函数 $\mathfrak{G}$ 和 $\mathfrak{F}^+$ 的以下方程式：

$$\mathfrak{G}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}'; \omega) = \mathfrak{G}^{(0)}(p)\delta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}') + $$
$$+ \frac{1}{(2\pi)^3}\left\{\mathfrak{G}^{(0)}(p)\int u(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}'')\sum_a e^{i(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'')\boldsymbol{r}_a}\mathfrak{G}(\boldsymbol{p}'', \boldsymbol{p}', \omega)d\boldsymbol{p}'' - \right.$$
$$\left. - \mathfrak{F}^{(0)}(p)\int u(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}'')\sum_a e^{i(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'')\boldsymbol{r}_a}\mathfrak{F}^+(\boldsymbol{p}'', \boldsymbol{p}'; \omega)d\boldsymbol{p}''\right\}, \quad (39.18)$$

$$\mathfrak{F}^+(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}'; \omega) = \mathfrak{F}^{+(0)}(p)\delta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}') + $$
$$+ \frac{1}{(2\pi)^3}\left\{\mathfrak{F}^{+(0)}(p)\int u(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}'')\sum_a e^{i(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'')\boldsymbol{r}_a}\mathfrak{G}(\boldsymbol{p}'', \boldsymbol{p}'; \omega)d\boldsymbol{p}'' + \right.$$
$$\left. + \mathfrak{G}^{(0)}(-p)\int u(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}'')\sum_a e^{i(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'')\boldsymbol{r}_a}\mathfrak{F}^+(\boldsymbol{p}'', \boldsymbol{p}'; \omega)d\boldsymbol{p}''\right\}.$$
$$(39.19)$$

原則上还应当考慮函数 $\mathfrak{F}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}'; \omega)$ 的方程式．純超导体无外場时 $\mathfrak{F}^{(0)}(x, x') = \mathfrak{F}^{+(0)}(x, x')$．我們省去証明，仅在此指出，合金的方程式(39.18)和(39.19)，在对杂質原子位置求平均后，也給出同样的結果．

很容易将上段的求平均方法推广到温度高于零的情形并应用于超导体．电子在靜止杂質上散射时，只有其动量的三个分量改变．因此虛綫仍然代表因子 $n|u(\boldsymbol{q})|^2$，而在杂質頂角电子綫的頻率守恆．所有为省略相交虛綫和跨越动量传递約为费米动量的頂点的虛綫，所作的估值、都还成立．在这些估值中起重要作用的，是正常金屬的格林函数的性質，其超导轉变温度甚低．平均了的函数 $\mathfrak{G}(p)$ 和 $\mathfrak{F}^+(p)$ 的方程式示于图 107 中．它們的結构不須闡述．我們指出、从图形角度看图 107 的方程式和 § 35 中电声子相

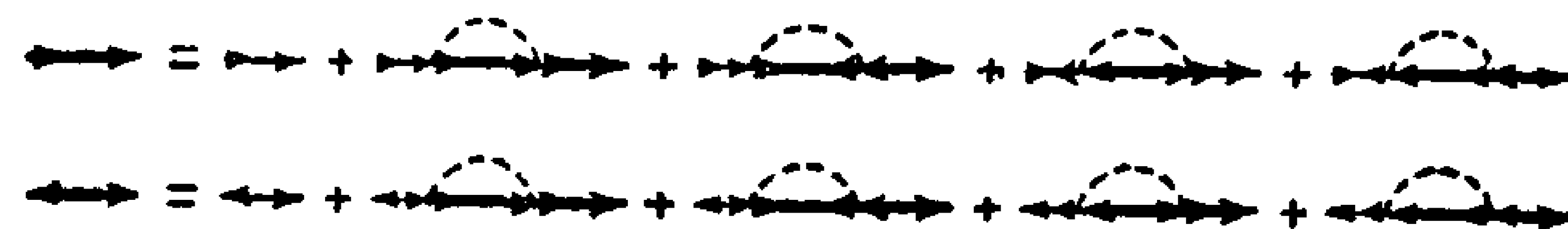


图 107

互作用系統的方程式(图 96)相似．差别只在于，图 107 中出現了各种“零級”綫：

$$\mathfrak{G}^{(0)}(p),\ \mathfrak{F}^{+(0)}(p) \quad 和 \quad \mathfrak{F}^{(0)}(p).$$

利用純超导体函数 $\mathfrak{G}^{(0)}$ 和 $\mathfrak{F}^{+(0)}$ 的明显表达式，我們将图 107 的方程組写成以下簡单形式：

$$(i\omega - \xi - \bar{\mathfrak{G}}_\omega)\mathfrak{G}(p) + (\Delta + \overline{\mathfrak{F}^+_\omega})\mathfrak{F}^+(p) = 1,$$
$$(i\omega + \xi + \bar{\mathfrak{G}}_{-\omega})\mathfrak{F}^+(p) + (\Delta + \overline{\mathfrak{F}^+_\omega})\mathfrak{G}(p) = 0,$$

其中

$$\bar{\mathfrak{G}}_\omega = \frac{n}{(2\pi)^3}\int |u(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}')|^2 \mathfrak{G}(p')d\boldsymbol{p}',$$
$$\overline{\mathfrak{F}^+_\omega} = \frac{n}{(2\pi)^3}\int |u(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}')|^2 \mathfrak{F}^+(p')d\boldsymbol{p}' \qquad (39.20)$$
$$\bar{\mathfrak{G}}_{-\omega}(p) = \bar{\mathfrak{G}}_\omega(-p)$$

$(p' = (\boldsymbol{p}'; \omega))$．这个方程組的解是(以后将証明 $\bar{\mathfrak{G}}_\omega = -\bar{\mathfrak{G}}_{-\omega}$)：

$$\mathfrak{G}(p) = -\frac{i\omega - \bar{\mathfrak{G}}_\omega + \xi}{-(i\omega - \bar{\mathfrak{G}}_\omega)^2 + \xi^2 + (\Delta + \overline{\mathfrak{F}^+_\omega})^2},$$

$$\mathfrak{F}^+(p) = \frac{\Delta + \overline{\mathfrak{F}^+_\omega}}{-(i\omega - \bar{\mathfrak{G}}_\omega)^2 + \xi^2 + (\Delta + \overline{\mathfrak{F}^+_\omega})^2}. \qquad (39.21)$$

将这些式子代入(39.20)式，就得出决定 $\bar{\mathfrak{G}}_\omega$ 和 $\overline{\mathfrak{F}^+_\omega}$ 的两个方程式．和从前一样我們看出，$\bar{\mathfrak{G}}_\omega$ 含有常数項，它是化学势的附加項．这項与温度无关，而来自远离费米面处对 $d\boldsymbol{p}'$ 的积分．因此它和在正常金属中一样：

$$\delta\mu \simeq \frac{n}{(2\pi)^3}\int |u(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}')|^2 \frac{d\xi}{\xi}.$$

从方程式(39.20)和(39.21)看出，除了这項之外，$\bar{\mathfrak{G}}_\omega$ 的其它部分和 $\overline{\mathfrak{F}^+_\omega}$ 由同一积分决定．因此

$$\frac{\bar{\mathfrak{G}}_\omega}{i\omega} = \frac{\overline{\mathfrak{F}^+_\omega}}{\Delta}.$$

引入符号：

$$\tilde{\Delta} = \Delta + \overline{\mathfrak{F}^+_\omega} = \Delta\eta_\omega, \quad i\tilde{\omega} = i\omega - \bar{\mathfrak{G}}_\omega = i\omega\eta_\omega.$$



这时对函数 $\eta_\omega$ 得到方程式：

$$\eta_\omega = 1 + \frac{\eta_\omega}{2\pi\tau}\int \frac{d\xi}{\xi^2 + (\omega^2 + \Delta^2)\eta_\omega^2},$$

其解为：

$$\eta_\omega = 1 + \frac{1}{2\tau\sqrt{\omega^2 + \Delta^2}}. \qquad (39.22)$$

由此可見，在純超导体的函数中作代換：

$$\{\omega, \Delta\} \to \{\omega\eta_\omega, \Delta\eta_\omega\}, \qquad (39.23)$$

就可以得出对杂質原子位置作了平均的函数 $\mathfrak{G}(p)$ 和 $\mathfrak{F}^+(p)$．不难証明，和正常金屬的情形一样，这些公式表明坐标空間里零級函数乘上了因子 $e^{-R/2l}$．由此可得出，合金中的量

$$\Delta = |\lambda|\mathfrak{F}^+(x, x)$$

和純超导体中的 $\Delta$ 一致．既然我們在 § 36 中已見到，超导体的热力学量只和 $\Delta$ 有关，这就証实了前面所作的論断，即杂質浓度足够小时，超导体的热力学性質不变[1]．

现在討論弱静磁場对超导合金穿透深度的温度依賴性．根据(37.10)式，电流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ 在对外場的綫性近似下为：

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \frac{e^2}{m^2}T\sum_\omega (\nabla_{\boldsymbol{r}} - \nabla_{\boldsymbol{r}'})_{\boldsymbol{r}'\to\boldsymbol{r}}\int [\mathfrak{G}_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{l})(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{l}), \nabla_{\boldsymbol{l}})\mathfrak{G}_\omega(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{r}') +$$
$$+ \mathfrak{F}_\omega(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{r})(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{l}), \nabla_{\boldsymbol{l}})\mathfrak{F}^+_\omega(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{l})]d\boldsymbol{l} - \frac{Ne^2}{m}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}),$$

然而式中的函数 $\mathfrak{G}_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ 和 $\mathfrak{F}^+_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ 包括了与杂質原子的相互作用．将此式对杂質位置求平均，并轉到傅立叶表象，把核 $Q_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k})$ 表示如下：

$$Q_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k}) = \frac{Ne^2}{m}\delta_{\alpha\beta} + \frac{2e^2T}{(2\pi)^3m^2}\sum_{\omega'}\int p'_\alpha \Pi^{(l)}_\beta(p'_+, p'_-)d\boldsymbol{p}' \quad (39.24)$$

---

1) 可能会以为这个結論只正确到 $\sim \frac{1}{\omega_D\tau} \sim 10^{-8}\frac{\text{厘米}}{l}$ 項(見(32.2),(34.37))．在更現实的声子模型中对頻率要截断，因而这些項根本不出現．两个模型的其它結果是一致的．(实际上不作人为的截断，也可以得出这一結果．——校者注．)

$\left(p'_\pm = p' \pm \frac{k}{2}, k = (\boldsymbol{k}, 0)\right)$,其中 $\Pi^{(1)}(p_+, p_-)$ 是下式的傅立叶分量:

$$\Pi^{(1)}(x-y, y-x') =$$
$$= -\frac{i}{2}(\nabla_y - \nabla_{y'})_{y'\to y}[\overline{\mathfrak{G}(x, y')\mathfrak{G}(y, x')} - \overline{\mathfrak{F}^+(y', x')\mathfrak{F}(x, y)}];$$

$$\Pi^{(1)}(x-y, y-x') = \frac{T^2}{(2\pi)^6}\sum_{\omega_+,\omega_-}\iint \Pi^{(1)}(p_+, p_-) \times$$
$$\times e^{i\boldsymbol{p}_+(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})-i\omega_+(\tau_x-\tau_y)}e^{i\boldsymbol{p}_-(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}')-i\omega_-(\tau_y-\tau_{x'})}d\boldsymbol{p}_+d\boldsymbol{p}_-.$$

和正常金属一样，两个格林函数乘积的平均值不等于平均值的乘积．为了对杂质原子位置求平均，又须求和若干图形的集合．由于超导性只在费米面附近才使格林函数变形，所需的图形仍和前段一样，属于"阶梯"型．然而，超导体中存在着三种不同的格林

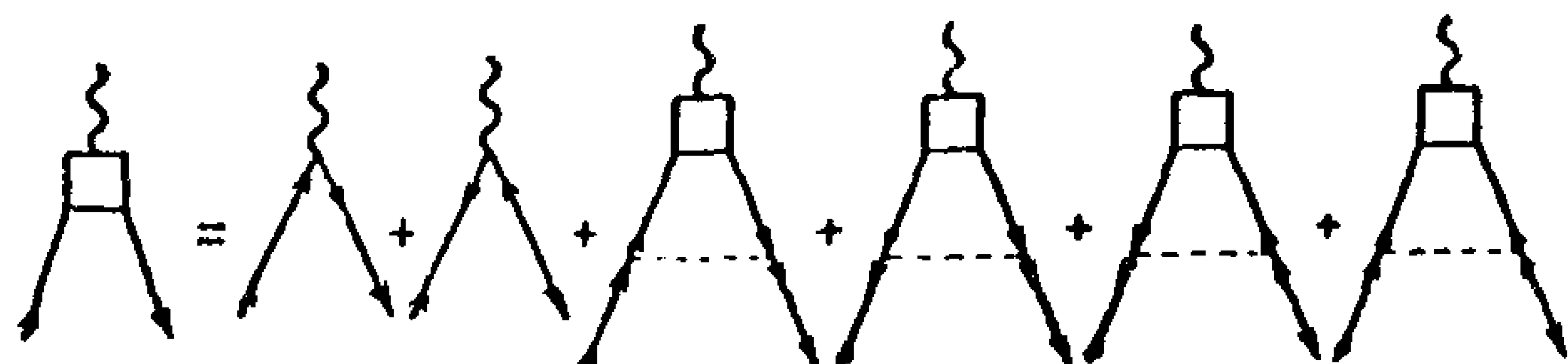


图 108

函数，这就使所有的方程式比表示图 105 求和的方程式更复杂些．从图 108 看出，为了确定 $\Pi^{(1)}(p_+, p_-)$，还须知道三个量，其图形和 $\Pi^{(1)}(p_+, p_-)$ 的差则是电子綫上箭头方向不同． 每个这种量对应 $\mathfrak{G}$ 和 $\mathfrak{F}^+$ 的一定組合:

$$\Pi^{(2)}(x-y, y-x') =$$
$$= -\frac{i}{2}(\nabla_y - \nabla_{y'})_{y'\to y}[\overline{\mathfrak{F}^+(x, y')\mathfrak{G}(y, x')} + \overline{\mathfrak{G}(y, x)\mathfrak{F}^+(y', x')}],$$

$$\Pi^{(3)}(x-y, y-x') =$$
$$= -\frac{i}{2}(\nabla_y - \nabla_{y'})_{y'\to y}[\overline{\mathfrak{G}(y, x)\mathfrak{G}(x', y')} - \overline{\mathfrak{F}^+(x, y')\mathfrak{F}(y, x')}],$$

$$\Pi^{(4)}(x-y, y-x') =$$
$$= -\frac{i}{2}(\nabla_y - \nabla_{y'})_{y'\to y}[\overline{\mathfrak{G}(x, y')\mathfrak{F}(y, x')} + \overline{\mathfrak{F}(x, y)\mathfrak{G}(x', y')}].$$



因此，在我們所討論的情形中，不是解簡单的方程式(39.12)，而是解傅立叶分量 $\Pi^{(i)}(p_+, p_-)(i = 1, \cdots 4)$ 的四个联立方程式．

引入符号:

$$\Lambda^{(i)}(\omega') = \frac{n}{(2\pi)^3}\int |u(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}')|^2\Pi^{(i)}(p'_+, p'_-)d\boldsymbol{p}'. \quad (39.25)$$

构成方程式的原则由图 108 可直接看出．例如有:

$$\Pi^{(1)}(p_+, p_-) = \boldsymbol{p}\{\mathfrak{G}(p_+)\mathfrak{G}(p_-) + \mathfrak{F}(p_+)\mathfrak{F}^+(p_-)\} +$$
$$+ \mathfrak{G}(p_+)\mathfrak{G}(p_-)\Lambda^{(1)}(\omega) - \mathfrak{F}(p_+)\mathfrak{G}(p_-)\Lambda^{(2)}(\omega) -$$
$$- \mathfrak{F}(p_+)\mathfrak{F}^+(p_-)\Lambda^{(3)}(\omega) - \mathfrak{G}(p_+)\mathfrak{F}^+(p_-)\Lambda^{(4)}(\omega).$$

其它三个方程式也是类似的． 将它們代入 (39.25) 式，得到諸 $\Lambda^{(i)}(\omega)$ 的方程組．我們不把它完全写出来，因为在一般情形下只有对球对称散射才能求解．同时我們也不关心对各量的比例为任意时的解．杂質浓度很小时，超导合金的性質接近純超导体．我們已經講过，大部分純超导体属于 Pippard 型或中間型．摻入杂質使关联半径減小，在杂質浓度相当小时，超导体就变成 London 型超导合金，其电动力学已是局域性的．这时局域性判据是穿透深度 $\delta$ 和杂質散射自由程 $l$ 之比（或者是特征値 $|\boldsymbol{k}| \sim \frac{1}{\delta}$ 与 $\frac{1}{l}$ 之比）．以后我們认为杂質浓度已使合金成为 London 型($|\boldsymbol{k}|l \ll 1$)．这种情形下，上述方程組大为化簡． 在 $\Pi^{(i)}(p_+, p_-)$ 中可忽略 $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{p}_+ = \boldsymbol{p}_-)$; 結果发現

$$\Lambda^{(1)}(\omega) = -\Lambda^{(3)}(\omega);$$
$$\Lambda^{(2)}(\omega) = \Lambda^{(4)}(\omega)$$

以及

$$\Lambda^{(1)}(\omega) = \boldsymbol{p}\Lambda^{(1)}(\omega);$$
$$\Lambda^{(2)}(\omega) = \boldsymbol{p}\Lambda^{(2)}(\omega).$$

因此

$$\Pi^{(1)}(p, p) = \boldsymbol{p}\{\mathfrak{G}^2(p) + \mathfrak{F}^{+2}(p)\}[1 + \Lambda^{(1)}(\omega)] -$$
$$- 2\boldsymbol{p}\mathfrak{G}(p)\mathfrak{F}^+(p)\Lambda^{(2)}(\omega), \quad (39.26)$$

而 $\Lambda^{(i)}(\omega)$ 的方程組成为:

$$\Lambda^{(1)}(\omega) = [\overline{\mathfrak{G}_\omega^2} + \overline{\mathfrak{F}_\omega^{+2}}][1 + \Lambda^{(1)}(\omega)] - 2\overline{\mathfrak{G}_\omega \mathfrak{F}_\omega^+}\Lambda^{(2)}(\omega),$$

$$\Lambda^{(2)}(\omega) = 2\overline{\mathfrak{G}_\omega \mathfrak{F}_\omega^+}[1 + \Lambda^{(1)}(\omega)] - [\overline{\mathfrak{G}_\omega^2} + \overline{\mathfrak{F}_\omega^{+2}}]\Lambda^{(2)}(\omega),$$

其中

$$\boldsymbol{p}\overline{\mathfrak{G}_\omega^2} = \frac{n}{(2\pi)^3}\int |u(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}')|^2 \mathfrak{G}^2(p')\boldsymbol{p}'\, d\boldsymbol{p}' = \frac{\Delta^2 \boldsymbol{p}}{4\tau_1 \eta_\omega (\sqrt{\omega^2 + \Delta^2})^3},$$

$$\boldsymbol{p}\overline{\mathfrak{F}_\omega^{+2}} = \frac{n}{(2\pi)^3}\int |u(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}')|^2 \mathfrak{F}^{+2}(p')\boldsymbol{p}'\, d\boldsymbol{p}' = \frac{\Delta^2 \boldsymbol{p}}{4\tau_1 \eta_\omega (\sqrt{\omega^2 + \Delta^2})^3},$$

$$\boldsymbol{p}\overline{\mathfrak{F}_\omega^+ \mathfrak{G}_\omega} = \frac{n}{(2\pi)^3}\int |u(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}')|^2 \mathfrak{F}^+(p')\mathfrak{G}(p')\boldsymbol{p}'\, d\boldsymbol{p}' =$$

$$= \frac{i\Delta\omega \boldsymbol{p}}{4\tau_1 \eta_\omega (\sqrt{\omega^2 + \Delta^2})^3}.$$

解之得 $\Lambda^{(1)}(\omega)$, $\Lambda^{(2)}(\omega)$ 的表达式:

$$\Lambda^{(1)}(\omega) = \frac{\Delta^2}{2\tau_1(\omega^2 + \Delta^2)\left(\sqrt{\omega^2 + \Delta^2} + \dfrac{1}{2\tau_{tr}}\right)},$$

$$\Lambda^{(2)}(\omega) = \frac{i\Delta\omega}{2\tau_1(\omega^2 + \Delta^2)\left(\sqrt{\omega^2 + \Delta^2} + \dfrac{1}{2\tau_{tr}}\right)}.$$

将后者代入(39.26)式,同时以 $\Pi^{(1)}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p})$ 代入(39.24)式,得到核 $Q(\boldsymbol{k})$ 的表达式:

$$Q \equiv Q(\boldsymbol{k}) = \frac{Ne^2}{m}\Bigg\{1 + T\sum_\omega \int d\xi \Bigg[(\xi^2 - \omega^2\eta_\omega^2 + \Delta^2\eta_\omega^2) \times$$
$$\times \left(1 + \frac{\Delta^2}{2\tau_1(\omega^2 + \Delta^2)^{3/2}\eta_{\omega tr}}\right) + \frac{2\Delta^2\omega^2\eta_\omega^2}{2\tau_1(\omega^2 + \Delta^2)^{3/2}\eta_{\omega tr}}\Bigg] \times$$
$$\times \frac{1}{[\xi^2 + (\omega^2 + \Delta^2)\eta_\omega^2]^2}\Bigg\} \tag{39.27}$$

(我們引入了記号 $\eta_{\omega tr} = 1 + \dfrac{1}{2\tau_{tr}\sqrt{\omega^2 + \Delta^2}}$). 这里又和 § 37 一样,遇見了形式上发散的积分. 基于同样的理由应先对频率求和. 将原括弧內的項組合成 $\xi^2 + (\omega^2 + \Delta^2)\eta_\omega^2 - 2\omega^2\eta_\omega^2$, 并利用 Abel 变换,后者乃是分部积分原理对级数的推广,卽:



$$\sum_{n=1}^{k}(B_n - B_{n-1})u_n = B_k u_k - B_0 u_1 - \sum_{n=1}^{k-1}(u_{n+1} - u_n)B_n.$$

应用此式于級数

$$2\pi T\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\xi^2 + (\Delta^2 + \omega^2)\eta_\omega^2},$$

其中

$$B_n = (2n + 1)\pi T = \omega,$$

$$B_n - B_{n-1} = 2\pi T,$$

可以消去(39.27)式的形式上发散的項. 然后得:

$$Q = \frac{Ne^2}{m}2\pi T\Delta^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\omega^2 + \Delta^2)\left(\sqrt{\omega^2 + \Delta^2} + \dfrac{1}{2\tau_{tr}}\right)}. \tag{39.28}$$

此式中只有碰撞間的"輸运"时間. 对穿透深度 $\delta$ 有:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{4\pi Q}}.$$

当 $\dfrac{1}{\tau} \to 0$, 此式成为普通的 London 公式:

$$\delta = \sqrt{\frac{m}{4\pi N_s e^2}},$$

其中 $N_s$ 是"超导电子数".

在相反的情形下, $l \ll \xi_0$, 可忽略(39.28)式括弧中的根号. 剩下的級数不难求和. 結果得到"脏"合金的穿透深度为:

$$\delta = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{\Delta\sigma\,\mathrm{th}\dfrac{\Delta}{2T}}},$$

其中 $\sigma$ 是正常金属的电导率.

## 文 献[1)]


[1] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, ГТТИ, 1951.
[2] Р. Е. Пайерлс, Квантовая теория твердых тел, ИЛ, 1956.
[3] Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **11**, 592, 1941.
[4] Л. Д. Ландау, Journ. of Phys. **11**, 91, 1947.
[5] Л. П. Питаевский, ЖЭТФ **31**, 536, 1956.
[6] R. P. Feynman, Phys. Rev. **91**, 262, 1954.
[7] J. L. Yarnell, G. P. Arnold, P. J. Bendt, E. C. Kerr, Phys. Rev. **113**, 1379, 1959.
[8] И. М. Халатников, УФН **59**, 673, 1956; **60**, 69, 1956.
[9] Е. М. Лифшиц, 見 В. Кеезом 书(文献[10])的附录.
[10] В. Кеезом, Гелий, ИЛ, 1949.
[11] Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **30**, 1058, 1956.
[12] Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **32**, 59, 1957.
[13] D. F. Brewer, J. G. Daunt, A. K. Sreedhar, Phys. Rev. **115**, 836, 1959.
[14] E. C. Kerr, Phys. Rev. **96**, 551, 1954.
[15] А. А. Абрикосов, И. Е. Дзялошинский, ЖЭТФ **35**, 771, 1958.
[16] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, ГТТИ, 1948.
[17] Н. Н. Боголюбов, Изв. АН СССР, сер. физ. **11**, 77, 1947.
[18] K. Huang, C. N. Yang, J. M. Luttinger, Phys. Rev. **105**, 776, 1957.
[19] K. Brueckner, K. Sawada, Phys. Rev. **106**, 1117, 1957.
[20] K. Huang, C. N. Yang, Phys. Rev. **105**, 767, 1957.
[21] T. D. Lee, C. N. Yang, Phys. Rev. **105**, 1119, 1957.
[22] А. А. Абрикосов, И. М. Халатников, ЖЭТФ **33**, 1154, 1957.
[23] В. М. Галицкий, ЖЭТФ **34**, 151, 1958.
[24] В. А. Беляков, ЖЭТФ **40**, 1210, 1961.
[25] А. И. Ахиезер и В. Б. Берестецкий, Квантовая электродинамика. Физматгиз., 1959.
[26] M. Gell-Mann, F. Low, Phys. Rev. **84**, 350, 1951.
[27] В. М. Галицкий, А. Б. Мигдал, ЖЭТФ **34**, 139, 1958.
[28] H. Lehmann, Nuovo Cimento **11**, 342, 1954.
[29] А. Б. Мигдал, ЖЭТФ, **32**, 399, 1957.
[30] T. Matsubara, Prog. Theor. Phys. **14**, 351, 1955.
[31] А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, ЖЭТФ **36**, 900, 1959.


1) 有*号者系譯者或校者补入。




[32] Е. С. Фрадкин, ЖЭТФ **36**, 1286, 1959.
[33] Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **34**, 262, 1958.
[34] Н. Н. Боголюбов, С. В. Тябликов, ДАН **126**, 53, 1959; 参閱 Д. Н. Зубарев, УФН **71**, 71, 1960.
[35] M. Cohen, R. P. Feynman, Phys. Rev. **107**, 13, 1957.
[36] P. Nozières, D. Pines, Phys. Rev. **109**, 741, 1958.
[37] Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **35**, 97, 1958.
[38] Л. П. Питаевский, ЖЭТФ **37**, 1794, 1959.
[39] J. M. Luttinger, J. C. Ward, Phys. Rev. **118**, 1417, 1960; J. M. Luttinger, Phys. Rev. **119**, 1153, 1960.
[40] Г. М. Элиашберг, ЖЭТФ, **42**, 1658, 1962.
[41] А. Б. Мигдал, ЖЭТФ **34**, 1438, 1958.
[42] Г. М. Элиашберг, ЖЭТФ, **43**, 1105, 1962.
[43] M. Gell-Mann, K. Brueckner, Phys. Rev. **106**, 364, 1957.
[44] А. А. Абрикосов, ЖЭТФ, **41**, 569, 1961.
[45] А. А. Веденов, ЖЭТФ **36**, 641, 1959.
[46] С. Т. Беляев, ЖЭТФ **34**, 417, 1958.
[47] С. Т. Беляев, ЖЭТФ **34**, 433, 1958.
[48] D. Pines, N. M. Hugenholtz, Phys. Rev. **116**, 489, 1959.
[49] Л. П. Питаевский, ЖЭТФ **36**, 1168, 1959.
[50] Л. П. Питаевский, ЖЭТФ **39**, 216, 1960.
[51] D. G. Henshaw, A. D. B. Woods, B. N. Brockhouse, Bull. Am. Phys. Soc. **5**, 12, C3, 1960.
[52] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, ГИТТЛ, 1957.
[53] И. Е. Дзялошинский, Л. П. Питаевский, ЖЭТФ **36**, 1797, 1959.
[54] М. И. Рязанов, ЖЭТФ **32**, 1244, 1957.
[55] И. Е. Дзялошинский, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, ЖЭТФ **37**, 229, 1959; Advances in Physics, **10**, 165, 1961.
[56] Е. М. Лифшиц, ЖЭТФ **29**, 94, 1955.
[57] F. London, Zs. f. Physik **60**, 491, 1930.
[58] H. B. C. Casimir, D. Polder, Phys. Rev. **73**, 360, 1948.
[59] Л. П. Питаевский, ЖЭТФ **37**, 577, 1959.
[60] E. Maxwell, Phys. Rev. **78**, 447, 1949; **79**, 173, 1950.
[61] C. A. Reynolds et al., Phys. Rev. **78**, 487, 1950.
[62] H. Fröhlich, Phys. Rev. **79**, 845, 1950.
[63] L. N. Cooper, Phys. Rev. **104**, 1189, 1956.
[64] J. Bardeen, L. N. Cooper, J. R. Schrieffer, Phys. Rev. **108**, 1175, 1957.
[65] Н. Н. Боголюбов, ЖЭТФ **34**, 58, 73, 1958.
[66] Н. Н. Боголюбов, В. В. Толмачев, Д. В. Ширков, Новый метод в теории сверхпроводимости, Изд-во АН СССР 1958. (中譯本科学出版社出版)
[67] Л. П. Горьков, ЖЭТФ **34**, 735, 1958.
[68] Г. М. Элиашберг, ЖЭТФ **38**, 966, 1960.

[69] А. А. Абрикосов, И. М. Халатников, УФН **65**, 551, 1958.
[70] H. London, F. London, Proc. Roy. Soc. **A149**, 71, 1935; Physica **2**, 341, 1935.
[71] A. B. Pippard, Proc. Roy. Soc. **A216**, 547, 1953.
[72] D. C. Mattis, J. Bardeen, Phys. Rev. **111**, 412, 1958.
[73] А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. М. Халатников, ЖЭТФ **35**, 265, 1958; **37**, 187, 1959.
[74] Л. П. Горьков, ЖЭТФ **36**, 1918, 1959.
[75] В. Л. Гинзбург, Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **20**, 1064, 1950.
[76] А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, ЖЭТФ **35**, 1158, 1958; **36**, 319, 1959.
[77] S. F. Edwards, Phil. Mag. **3**, 1020, 1958.
[78]* 朱洪元，量子場論，科学出版社，1960.
[79]* 王竹溪，統計物理学导論，高等教育出版社，1956.
[80]* G. Rickayzen, Phys. Rev. **115**, 795, 1959.
[81]* V. Ambegaokar, L. P. Kadanoff, Nuovo Cimento, **22**, 914, 1961.



## 外国人名对照表[1)]

尤拉 Euler
戈尔可夫 Горьков Л. П.
厄米 Hermit
兰道 Ландау Л. Д.
皮达也夫斯基 Питаевский Л. П.
弗留里希 Fröhlich H.
吉布斯 Gibbs
貝塞尔 Bessel
克罗尼克 Kronecker
伽俐略 Galilei G.
泡利 Pauli W.
波戈留博夫 Боголюбов Н. Н.
拉格朗日 Lagrange
阿布里科索夫 Абрикосов А. А.
加洛辛斯基 Дзялошинский И. Е.
金兹堡 Гинзбург В. Л.
馬克士韦 Maxwell
范德瓦尔斯 van der Waals
哈密頓 Hamilton
玻色 Bose
玻恩 Born M.
玻尔兹曼 Boltzmann
派尔斯 Peierls R. E.
海森堡 Heisenberg W.
格林 Green
伦琴 Roentgen W.
傅立叶 Fourier
費米 Fermi E.
費曼 Feynman R. P.
維克 Wick G. C.
德拜 Debye
薛定格 Schrödinger E.
戴逊 Dyson F. J.

1) 本书中外国人名原則上用原文. 凡中文譯法已相对稳定或行文中必須譯出者，用中文. 这些人名以笔划顺序列入此表，以供检索.

［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝统计物理学中的量子场论方法
作者＝Ａ．Ａ．阿布里科索夫　Л．П．戈尔可夫等著　郝伯林等译
页数＝１８４
ＳＳ号＝１０２８８５１６
出版日期＝１９６３年